VISIT…

LANZAROTE
Caliente.COM

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

КЛАССИКИ НАУКИ



ГЕОРГ КАНТОР

ТРУДЫ ПО ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Издание подготовили
А. Н. КОЛМОГОРОВ, Ф. А. МЕДВЕДЕВ,
А. П. ЮШКЕВИЧ

Ответственные редакторы
А. Н. КОЛМОГОРОВ, А. П. ЮШКЕВИЧ



МОСКВА
«НАУКА»
1985

УДК 510 22

СЕРИЯ «КЛАССИКИ НАУКИ»

Серия основана академиком *С. И. Вавиловым*

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

А. А. Баев (председатель),
И. Е. Дзялошинский (заместитель председателя),
А. Ю. Ишлинский, С. П. Капица, Б. М. Кедров,
И. Л. Кнунянц, А. Н. Колмогоров, С. Р. Микулинский,
Л. С. Полак, Я. А. Смородинский,
А. С. Спирин, А. Л. Яншин

Кантор Георг. **Труды по теории множеств.**— М.: Наука, 1985.

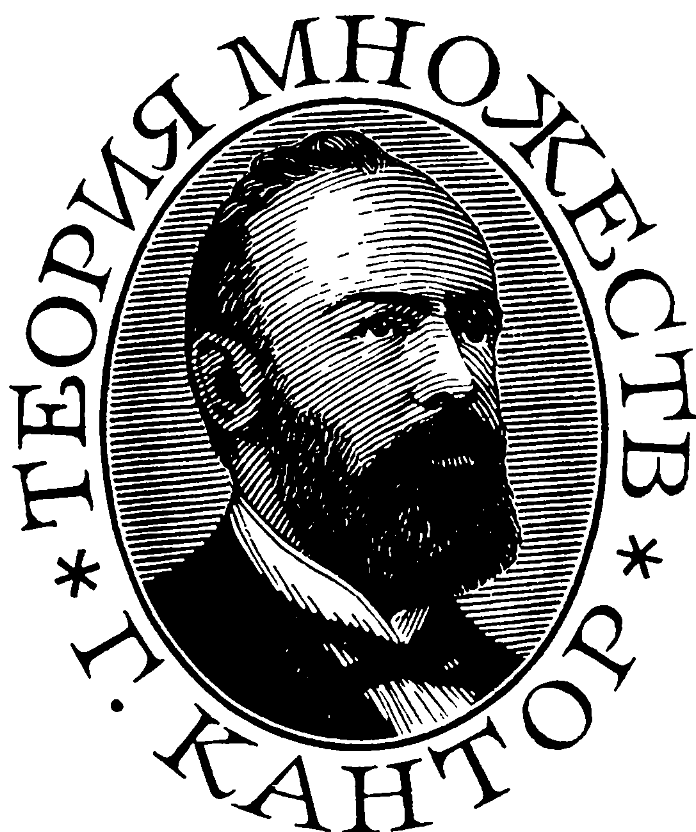
Теория множеств оказала огромное влияние на прогресс всей математики и на математическое мышление в целом. В предлагаемой книге содержатся переводы теоретико-множественных работ ее основного создателя Георга Кантора, включая недавно обнаруженную его большую статью и переписку с Р. Дедекиндом, а также примечания Э. Цермело к немецкому изданию его трудов и другие справочные материалы (краткую биографию Г. Кантора, примечания переводчика, список литературы, предметный и именной указатели). Настоящее издание — наиболее полное собрание работ Г. Кантора по теории множеств.

Книга представляет интерес для научных работников, аспирантов, студентов и всех, интересующихся историей математики и ее философскими аспектами.

Перевод
Ф. А. Медведева и П. С. Юшкевича

К $\frac{1702020000-169}{042(02)-85}$ 105-85-II

© Издательство «Наука», 1985 г.


ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ * Г. КАНТОР *

ОТ РЕДАКЦИИ

Вряд ли можно назвать какую-либо возникшую в последней трети прошлого столетия математическую дисциплину, которая оказала бы большее влияние на последующий прогресс всей математики и, шире, на математическое мышление в целом, чем теория множеств. К идеям теории множеств в разное время подходили с разных сторон многие ученые, но оформление ее в самостоятельную науку, со своими особыми предметом и методами исследования, осуществил на протяжении четверти века в работах 1872—1897 гг. Георг Кантор. Среди современников Кантора правильно оценили значение этих работ только немногие, прежде всего Рихард Дедекинд, который внес собственный значительный вклад в новую теорию. Обнаруженные в конце XIX — начале XX вв. логические и методологические парадоксы теории множеств отпугнули некоторых выдающихся математиков, первоначально приветствовавших ее появление, как Анри Пуанкаре. Однако плодотворные приложения теории множеств в различных областях анализа стимулировали ее дальнейшую разработку во многих направлениях, в том числе глубокое исследование самых ее основ средствами бурно расцветавшей математической логики. Какие-либо окончательные и общепризнанные решения всех трудностей не достигнуты и все более и более тонкие изыскания здесь продолжаются; вместе с тем современная математика не может обойтись без основного аппарата понятий и приемов теории множеств.

Издание на русском языке полного собрания ставших классическими теоретико-множественных работ Г. Кантора существенно обогатит нашу переводную математическую литературу. До сих пор на русский язык были переведены только три работы Кантора: «Основы общего учения о многообразиях», «О различных точках зрения на актуально бесконечное» и «К учению о многообразиях». Этот перевод, сделанный П. С. Юшкевичем, составил шестой выпуск «Новых идей в математике» (СПб., 1914), издававшихся под редакцией А. В. Васильева. Перевод П. С. Юшкевича, давно ставший библиографической редкостью, использован с небольшими редакционными изменениями Ф. А. Медведевым и в настоящем однотомнике. Остальные десять работ переведены Ф. А. Медведевым впервые, так же как и богатая содержанием переписка Кантора с Дедекиндом, весьма важная для уточнения роли последнего в развитии теории множеств.

Перевод статей Кантора сделан с однотомника его сочинений, вышедшего в 1932 г. под редакцией Э. Цермело[1]. Из названного однотомника

[1] *Cantor, Georg.* Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts. Mit erläuterenden Anmerkungen sowie mit Ergänzungen aus dem Briefwechsel Cantor — Dedekind/Hrsg. von Ernst Zermelo; Nebst einem Lebenslauf Cantors von Adolf Fraenkel. Berlin: Springer, 1932.

отобраны только работы по теории множеств и ее философским вопросам, к которым добавлена статья «Принципы теории порядковых типов. Первое сообщение», недавно опубликованная А. Граттан-Гиннесом[2],— при жизни Кантора она не увидела света и ее рукопись хранится в Шведском институте Г. Миттаг-Леффлера. Переписка Кантора с Дедекиндом, из которой в сборник сочинений под редакцией Цермело вошло всего пять писем 1899 г., дана в русском переводе по изданию Э. Нётер и Ж. Кавайеса[3], включающему 49 писем 1872—1899 гг.

Вслед за переводами отдельных работ помещены примечания Э. Цермело, написанные им при издании упомянутого однотомника сочинений Г. Кантора (они заключены в квадратные скобки), а в конце книги — статья-послесловие редакторов, биографический очерк и примечания, принадлежащие Ф. А. Медведеву, список литературы, предметный и именной указатели.

Москва, февраль 1983 г.

А. Н. Колмогоров
А. П. Юшкевич

---

[2] *Grattan-Guinness I.* An unpublished paper of George Cantor «Prinzipien einer Theorie der Ordnungstypen. Erste Mitteilung».— Acta math., 1970, vol. 124, p. 83—101. Эта статья, предназначенная для «Acta mathematica», была отклонена их редактором Миттаг-Леффлером, как слишком философская. В связи с этим второе сообщение не последовало.

[3] Briefwechsel Cantor — Dedekind/Hrsg. von E. Noether, J. Cavaillès. Paris, 1937.



Georg Cantor

I
РАБОТЫ ПО ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1. ОБОБЩЕНИЕ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ ИЗ ТЕОРИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ * [1]

В нижеследующем я предлагаю некоторое обобщение теоремы о том, что представления функций в форме тригонометрических рядов являются однозначными.

Тот факт, что два тригонометрических ряда

$$ {}^1/_2 b_0 + \sum (a_n \sin nx + b_n \cos nx) \text{ и } {}^1/_2 b_0' + \sum (a_n' \sin nx + b_n' \cos nx), $$

которые сходятся для каждого значения x и имеют ту же самую сумму, имеют одинаковые коэффициенты, я попытался доказать в «Journal für die reine und angewandte Mathematik», 1870, Bd. 72, S. 139; в заметке в том же журнале, связанной с этой работой, я далее показал, что указанная теорема остается справедливой и в том случае, если отказаться от сходимости или совпадения сумм рядов в конечном числе точек [2].

Предполагаемое здесь обобщение состоит в том, что мы отказываемся от сходимости или совпадения сумм рядов в бесконечном числе значений x на интервале $(0\ldots 2\pi)$ без того, чтобы нарушалась справедливость теоремы.

Однако этому я вынужден предпослать, причем большей частью в форме намеков, соображения, предназначенные для того, чтобы выяснить соотношения, встречающиеся всегда, когда задано конечное или бесконечное число числовых величин. При этом я введу несколько определений, которые формулируются здесь только для того, чтобы дать в § 3 по возможности наиболее краткое изложение доказательства рассматриваемой теоремы.

§ 1

Рациональные числа образуют основу для установления более общего понятия числовой величины; я буду называть эти числа (включая нуль) областью A.

Когда я говорю о числовой величине в обобщенном смысле, то это происходит прежде всего в том случае, когда предложена бесконечная последовательность рациональных чисел

$$ a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots, \tag{1} $$

---

* Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen.— Math. Ann., 1872, Bd. 5, S. 123—132. Перевод Ф. А. Медведева.

заданная при помощи некоторого закона и обладающая тем свойством, что разность $a_{n+m}-a_n$ становится бесконечно малой при возрастании n, каково бы ни было целое положительное число m, или, другими словами, что для произвольно выбранного (положительного рационального) ε существует такое целое число n_1, что $|a_{n+m}-a_n|<\varepsilon$, если $n\geqslant n_1$ и m — любое положительное целое число.

Это свойство последовательности (1) я выражаю словами: «*последовательность* (1) имеет *определенный предел* b».

Следовательно, эти слова не имеют никакого другого смысла, кроме смысла некоторого выражения для этого свойства последовательности, а из того обстоятельства, что с последовательностью (1) мы связываем особый знак b, вытекает, что различным таким последовательностям должны соответствовать и разные знаки $b, b', b'', \ldots$

Если задана другая последовательность

$$a_1', a_2', \ldots, a_n', \ldots, \tag{1'}$$

имеющая определенный предел b', то оказывается, что обе последовательности (1) и (1′) всегда находятся в одном из трех следующих отношений, исключающих друг друга: 1) a_n-a_n' становится бесконечно малой при возрастании n; 2) a_n-a_n' начиная с определенного n всегда остается больше некоторой положительной (рациональной) величины ε; 3) a_n-a_n' начиная с определенного n всегда остается меньше некоторой отрицательной (рациональной) величины $-\varepsilon$.

Если имеет место первое отношение, то я полагаю

$$b=b',$$

если второе, то $b>b'$, если третье, то $b<b'$.

Точно так же получается, что последовательность (1), имеющая предел b, находится только в одном из следующих трех отношений с рациональным числом a: 1) a_n-a становится бесконечно малой при возрастании n; 2) a_n-a начиная с определенного n всегда остается больше некоторой положительной (рациональной) величины ε; 3) a_n-a начиная с определенного n всегда остается меньше некоторой отрицательной (рациональной) величины $-\varepsilon$.

Для выражения этих отношений мы полагаем соответственно

$$b=a, \qquad b>a, \qquad b<a,$$

Из этих, а также непосредственно следующих определений получается в качестве *следствия*, что если b — предел последовательности (1), то $b-a_n$ при возрастании n становится бесконечно малой, чем, *между прочим*, находит определенное оправдание наименование «предел последовательности» для b.

Совокупность числовых величин b можно будет обозначить через B.

При помощи указанных выше формулировок можно распространить на взятые вместе области A и B элементарные операции, принятые для рациональных чисел.

А именно если b, b', b'' — три числовые величины из B, то формулы

$$b \pm b' = b'', \quad bb' = b'', \quad b/b' = b''$$

служат выражением того, что между последовательностями

$$a_1, a_2, \ldots, \quad a_1', a_2', \ldots, \quad a_1'', a_2'', \ldots,$$

соответствующим числам b, b', b'', имеют место соотношения

$$\lim (a_n \pm a_n' - a_n'') = 0, \quad \lim (a_n a_n' - a_n'') = 0,$$
$$\lim (a_n/a_n' - a_n'') = 0 \quad [\text{для } a_n' \neq 0],$$

где, по сказанному выше, я не вхожу подробнее в смысл знака «lim». Аналогичные определения вводятся для случая, когда из трех чисел одно или два принадлежат области A.

Вообще, всякое уравнение

$$F(b, b', \ldots, b^{(\rho)}) = 0,$$

образованное при помощи конечного числа элементарных операций, получается отсюда как выражение определенного соотношения между последовательностями, задающими числовые величины b, b', b'', ..., $b^{(\rho)}$ [1].

Область B получается из области A; она теперь вместе с областью A аналогично порождает новую область C.

А именно если задана бесконечная последовательность

$$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

числовых величин из областей A и B, не все из которых принадлежат области A, и если эта последовательность обладает тем свойством, что $b_{n+m} - b_n$ становится бесконечно малой при возрастании n, каково бы ни было m,— свойством, которое по предыдущим определениям представляет собой нечто вполне определенное в понятийном отношении,— то я говорю об этой последовательности, что она имеет определенный предел c.

Числовые величины c образуют область C.

Определения отношений равенства, больше и меньше, а также элементарных операций как для величин c, так между ними и величинами из областей B и A даются аналогично предыдущим.

Теперь если области B и A ведут себя по отношению друг к другу так, что каждая a может быть приравнена некоторой b, но не наоборот, то здесь оказывается, что как каждая b может быть приравнена некото-

---

[1] Если, например, уравнение μ-й степени $f(x) = 0$ с целочисленными коэффициентами имеет действительный корень ω, то это означает вообще лишь то, что имеется последовательность

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots,$$

обладающая свойством последовательности (1), для предела которой выбран знак ω и которая, кроме того, обладает свойством

$$\lim f(a_n) = 0.$$

рой c, так и наоборот, каждая c может быть приравнена некоторой b [3].

Хотя тем самым области B и C в некотором роде перекрываются друг с другом, однако в излагаемой здесь теории (в которой числовая величина первоначально появляется вообще как нечто беспредметное, лишь как составная часть теорем, придающих ей реальность, например теоремы, что соответствующая последовательность имеет пределом эту числовую величину) важно проводить понятийное различие между этими двумя областями B и C хотя бы уже из-за того, что даже установление равенства двух величин b, b' из B не влечет их идентичности, а лишь выражает некоторое определенное отношение между последовательностями, которым они сопоставляются.

Из области C и предшествующих ей аналогично получается область D, из всех их — область E и т. д.; посредством λ таких переходов (если переход от A к B рассматривается как первый) получается область L числовых величин. Если представить установленной цепь определений равенства, больше, меньше и элементарных операций от одной области к другой, то область L так относится к предыдущим, за исключением A, что числовая величина l всегда может быть сопоставлена одной из числовых величин $k, i, \ldots, c, b$ и наоборот.

Результаты анализа бесконечно малых можно (отвлекаясь от небольшого числа известных случаев) свести к форме таких сопоставлений, хотя (чего здесь можно коснуться, лишь учитывая указанные исключения) понятие числа, как оно развито здесь, несет в себе зародыш необходимого и абсолютно бесконечного обобщения.

Если в области L задана некоторая числовая величина, то, по-видимому, целесообразно пользоваться выражением: *она задана как числовая величина, значение или предел λ-го вида*, откуда видно, что слова *числовая величина, значение* и *предел* я употребляю вообще как равнозначные.

Уравнение $F(l, l', \ldots, l^{(\rho)})=0$, образованное при помощи конечного числа элементарных операций с числами $l, l', \ldots, l^{(\rho)}$, в развитой здесь теории рассматривается как выражение определенного соотношения между $\rho+1$ вообще *λ-кратно бесконечными последовательностями рациональных чисел*; это суть те последовательности, которые получаются из просто бесконечных последовательностей, первоначально связанных с величинами $l, l', \ldots, l^{(\rho)}$, когда их элементы заменены соответствующими этим элементам последовательностями, затем аналогично рассмотрены получающиеся вообще двукратно бесконечные последовательности и этот процесс продолжен до тех пор, пока не получим только рациональные числа.

Я оставляю за собой право возвратиться к более подробному рассмотрению всех этих соотношений в другой раз [4]. Равным образом, здесь не место рассматривать и то, как содержащиеся в данном параграфе определения и операции могут служить для нужд анализа бесконечно малых. Да и в следующем параграфе, где будет изложена взаимосвязь числовых величин с геометрией прямой линии, я ограничусь почти исключительно теми необходимыми предложениями, из которых, если я не

ошибаюсь, остальные можно получить при помощи чисто логических рассуждений. Для сравнения с § 1 и 2 упомяну десятую книгу «Начал» Евклида, которая остается образцом для рассмотренного в этих параграфах предмета.

§ 2

Точки прямой линии определяются тем, что при выбранной единице измерения их абсциссам, т. е. их расстояниям от некоторой фиксированной точки 0 этой прямой, придаются знаки «+» или «—» в зависимости от того, расположена ли соответствующая точка в (заранее фиксированной) положительной или отрицательной части линии от 0.

Если это расстояние имеет рациональное отношение к единице измерения, то оно выражается числовой величиной области A; в остальных случаях, когда точка известна, например, благодаря некоторому построению всегда возможно задать последовательность

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots, \tag{1}$$

обладающую указанным в § 1 свойством и имеющую к рассматриваемому расстоянию такое отношение, что точки прямой, которым соответствуют расстояния $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, при возрастании n подходят к этой точке бесконечно близко.

Это мы выражаем словами: *расстояние подлежащей определению точки от точки* 0 *равно* b, где b — числовая величина, соответствующая последовательности (1).

Тем самым оказывается, что отношения «больше», «меньше» и «равно» для известных расстояний совпадают с отношениями «больше», «меньше» и «равно» для соответствующих числовых величин, задающих эти расстояния.

Без труда получается, что и числовые величины областей C, D, ... тоже пригодны для выражения известных расстояний. Однако, чтобы излагаемая в этом параграфе взаимосвязь числовых величин, определенных в § 1, с геометрией прямой линии стала полной, нужно еще добавить *аксиому*, состоящую просто в том, что и, обратно, каждой числовой величине соответствует определенная точка прямой, координата которой равна этой числовой величине и притом равна в том смысле, который объяснен в указанном параграфе [2].

Я называю это утверждение *аксиомой*, так как оно недоказуемо по самой его природе. Благодаря ей числовые величины дополнительно приобретают определенную предметность, от которой они, однако, совершенно не зависят.

---

[2] Следовательно, всякой числовой величине соответствует определенная точка; однако точке соответствует бессчетно много числовых величин, как ее координат в вышеуказанном смысле. Действительно, как было отмечено ранее, из чисто логических соображений вытекает, что равным числовым величинам *не* могут соответствовать различные точки и что неравным числовым величинам *не* может в качестве координат соответствовать одна и та же точка.

В соответствии со сказанным выше я рассматриваю точку прямой как определенную, если ее расстояние от 0, *рассматриваемое с определенным знаком, задано как числовая величина, значение или предел* λ*-вида.*

Теперь мы, приступая к более подробному изучению нашего первоначального вопроса, намереваемся рассмотреть те отношения, которые нам встретятся, когда числовые величины заданы в конечном или бесконечном числе.

Согласно предшествующему мы можем мыслить числовые величины соотнесенными точкам прямой линии. Ради наглядности (а не по существу дела) мы пользуемся далее этим представлением всегда, когда говорим о точках, имея в виду те значения, при помощи которых они заданы.

Заданное конечное или бесконечное число числовых величин я для краткости называю *множеством значений* и в соответствии с этим заданное конечное или бесконечное число точек прямой — *точечным множеством.* То, что в последующем будет говориться о точечных множествах, можно по сказанному непосредственно перенести на множества значений.

Если на конечном интервале задано точечное множество, то вместе с ним вообще задано некоторое второе точечное множество, с последним — некоторое третье и т. д., которые существенны для понимания природы первого множества.

Чтобы определить эти вспомогательные точечные множества, мы вынуждены обратиться к понятию *предельной точки* [*«точки сгущения»*] *точечного множества.*

Под «предельной точкой точечного множества P» я понимаю точку прямой, расположенную так, что во всякой ее окрестности содержится бесконечно много точек из P, причем может случиться, что и она сама принадлежит этому множеству. Под «окрестностью точки» здесь будет пониматься всякий интервал, содержащий эту точку *внутри себя.* В соответствии с этим легко доказать, что точечное множество [«ограниченное»], состоящее из бесконечного числа точек, всегда имеет по крайней мере *одну* предельную точку.

Теперь каждая точка прямой имеет определенное отношение к заданному множеству — является или не является его предельной точкой, а потому вместе с точечным множеством P *определенно* задается и множество его предельных точек, которое я буду обозначать через P' и называть *«первым производным точечным множеством* множества P».

Если точечное множество P' состоит не из конечного числа точек, то оно тоже имеет производное точечное множество P''; я называю его *вторым производным* множества P. Такими ν переходами получается ν-е производное точечное множество $P^{(\nu)}$ множества P.

Например, если множество P состоит из всех точек прямой, которым соответствуют рациональные абсциссы, заключенные между 0 и 1, включая или исключая границы, то производное множество P' состоит из *всех* точек интервала $(0 \ldots 1)$, включая концы. Последующие множества

P'', P''', ... совпадают с P'. Или, если множество P состоит из точек, которым отвечают абсциссы $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$, то множество P' состоит из *одной* точки 0 и само не имеет производных.

Может случиться, и только этот случай интересует нас здесь, что после ν переходов окажется, что множество $P^{(\nu)}$ состоит из конечного числа точек, а значит, само производного не имеет; в этом случае мы будем называть первоначальное точечное множество P множеством ν-го вида. Отсюда следует, что тогда P', P'', ... являются множествами $(\nu-1)$-го, $(\nu-2)$-го, ... видов.

Пример точечного множества ν-го вида дается уже единственной точкой, если ее абсцисса предполагается числовой величиной ν-го вида, удовлетворяющей некоторым легко устанавливаемым условиям. А именно если мы разложим эту числовую величину на члены $(\nu-1)$-го вида соответствующей ей последовательности, затем эти члены на составляющие их члены $(\nu-2)$-го вида и т. д., то получим в конце концов бесконечно много рациональных чисел; если мы вообразим точечное множество, соответствующее этим числам, то оно и будет множеством ν-го вида[3].

Теперь после этой подготовительной работы мы в состоянии коротко сформулировать и доказать в следующем параграфе задуманную теорему.

§ 3

Теорема. *Если равенство вида*

$$0 = C_0 + C_1 + \ldots + C_n + \ldots, \tag{1}$$

в котором $C_0 = {}^1/_2 d_0$, $C_n = c_n \sin nx + d_n \cos nx$, *выполняется для всех* x, *за исключением тех, которые соответствуют точкам некоторого точечного множества* P ν*-го вида, заданного на интервале* $(0 \ldots 2\pi)$, *причем* ν *означает произвольно большое целое число, то*

$$d_0 = 0, \qquad c_n = d_n = 0.$$

Доказательство. Как легко видеть из дальнейшего, когда в этом доказательстве речь идет о P, то предполагается не только множество точек исключения, заданное на $(0 \ldots 2\pi)$, но и точечное множество на всей бесконечной линии, получаемое периодическим повторением этого P.

Рассмотрим теперь функцию

$$F(x) = C_0 \frac{xx}{2} - C_1 - \frac{C_2}{4} - \ldots - \frac{C_n}{nn} - \ldots$$

Из определения точечного множества ν-го вида легко получается, что должен существовать интервал $(\alpha \ldots \beta)$, в котором не содержится ни од-

[3] Следовало бы, пожалуй, подчеркнуть, что это не всегда возможно. Вообще, точечное множество, полученное таким образом из числовой величины ν-го вида, может оказаться как меньшего, так и большего, нежели ν-й, вида или даже не иметь определенного вида.

ной точки множества P. Следовательно, для всех значений x этого интервала, ввиду предложенной сходимости нашего ряда (1), будет

$$\lim (c_n \sin nx + d_n \cos nx) = 0,$$

а значит, по известной теореме (Math. Ann., Bd. 4, S. 139) [5]

$$\lim c_n = 0, \qquad \lim d_n = 0.$$

Следовательно (см.: *Riemann*. Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch trigonometrische Reihe, § 8) [6], функция $F(x)$ обладает такими свойствами:

1) она непрерывна в окрестности каждого значения x;

2) $\lim \dfrac{F(x+\alpha)+F(x-\alpha)-2F(x)}{\alpha\alpha} = 0,$

если $\lim \alpha = 0$ для всех значений x, за исключением тех, которые соответствуют точкам множества P;

3) $\lim \dfrac{F(x+\alpha)+F(x-\alpha)-2F(x)}{\alpha} = 0,$

если $\lim \alpha = 0$ для каждого без исключения значения x.

Теперь я хочу показать, что $F(x) = cx + c'$.

Для этого я сначала рассматриваю интервал $(p \ldots q)$, в котором расположено лишь конечное число точек множества P; пусть этими точками будут $x_0, x_1, \ldots, x_r$.

Я утверждаю, что $F(x)$ *линейна* в интервале $(p \ldots q)$. Действительно, ввиду свойств 1) и 2) $F(x)$ является линейной функцией в каждом из интервалов, на которые разделен $(p \ldots q)$ точками $x_1, x_2, \ldots, x_r$. А так как ни в одном из этих интервалов не содержатся исключительные точки, то для них справедливо рассуждение, примененное в нашей статье (см.: J. reine und angew. Math., Bd. 72, S. 139) [7]. Поэтому остается доказать только идентичность этих линейных функций.

Я сделаю это для любых двух соседних интервалов и выберу с этой целью функции на интервалах $(x_0 \ldots x_1)$ и $(x_1 \ldots x_2)$.

Пусть $F(x) = kx + l$ на $(x_0 \ldots x_1)$ и $F(x) = k'x + l'$ на $(x_1 \ldots x_2)$.

По 1) $F(x_1) = kx_1 + l$. Далее, для достаточно малого значения α

$$F(x_1+\alpha) = k'(x_1+\alpha) + l'; \qquad F(x_1-\alpha) = k(x_1-\alpha) + l.$$

Следовательно, по 3) имеем

$$\lim \frac{(k'-k)x_1 + l' - l + \alpha(k'-k)}{\alpha} = 0, \text{ если } \lim \alpha = 0,$$

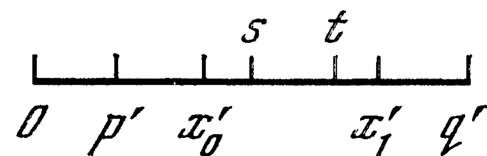
что возможно только тогда, когда

$$k = k', \qquad l = l'.$$

(A). «*Если $(p \ldots q)$ — какой-либо интервал, на котором расположено лишь конечное число точек множества P, то $F(x)$ линейна на этом интервале*».

Далее, я рассматриваю какой-нибудь интервал $(p' \dots q')$, содержащий лишь конечное число точек $x_0', x_1', \dots, x_r'$ первого производного множества P', и прежде всего утверждаю, что на всяком из частичных интервалов, на которые $(p' \dots q')$ разбивается точками $x_0', x_1', \dots, x_r'$, функция $F(x)$ линейна, например на интервале $(x_0' \dots x_1')$.

Действительно, хотя каждый из этих частичных интервалов содержит вообще бесконечно много точек из P, так что результат (A) непосредственно к ним неприменим, но зато всякий интервал $(s \dots t)$, полностью расположенный внутри $(x_0' \dots x_1')$, содержит лишь конечное число точек из P (так как в противном случае между x_0' и x_1' попали бы и другие точки множества P'), а значит, на $(s \dots t)$ эта функция линейна по (A). Из того же обстоятельства, что концевые точки s и t можно брать сколь угодно близкими к x_0' и x_1', без труда заключаем о линейности непрерывной функции $F(x)$ и на $(x_0' \dots x_1')$.



После того как это доказано для каждого частичного интервала из $(p' \dots q')$, при помощи такого же умозаключения, каким установлен результат (A), получаем

(A'). *«Если $(p' \dots q')$ — какой-либо интервал, на котором находится лишь конечное число точек множества P', то $F(x)$ линейна на этом интервале».*

Доказательство продолжается аналогично. *А именно как только установлено, что $F(x)$ является линейной функцией на каком-либо интервале $(p^{(k)} \dots q^{(k)})$, содержащем лишь конечное число точек k-го производного точечного множества P^k множества P, то, действуя так же, как при переходе от* (A) *к* (A'), *получаем, что $F(x)$ оказывается линейной функцией и на любом интервале $(p^{(k+1)} \dots q^{(k+1)})$, содержащем лишь конечное число точек $(k+1)$-го производного точечного множества $P^{(k+1)}$.*

Таким образом, при помощи *конечного* числа *переходов* мы заключаем, что $F(x)$ линейна на всяком интервале, содержащем лишь конечное число точек множества $P^{(\nu)}$.

Если теперь множество P является, как предположено, множеством ν-го вида, то произвольно взятый на прямой интервал $(a \dots b)$ вообще содержит лишь конечное число точек из $P^{(\nu)}$. Следовательно, $F(x)$ линейна на всяком произвольно выбранном интервале $(a \dots b)$. Отсюда, как легко видеть, вытекает, что $F(x)$ имеет вид $F(x) = cx + c'$ для всех значений x. После того, как это установлено, доказательство продолжается далее естественно, как в уже дважды цитированной работе, до тех пор, пока для $F(x)$ не получится линейная форма.

Доказанной здесь теореме можно придать и такой вид:

«Разрывная функция $f(x)$, которая для всех значений x, соответствующих точкам заданного на интервале $(0 \dots 2\pi)$ точечного множества P ν-го вида, отлична от нуля или неопределенна, а для всех остальных значений x равна нулю, не может быть представлена тригонометрическим рядом».

[Примечания]

В этой работе обобщение теоремы единственности, обещанное в II.3 [8], доводится до случая, когда исключительные значения аргумента образуют *бесконечное* множество P, обладающее лишь конечным числом «производных» P', P'', ..., $P^{(\nu)}$.

Хотя это обобщение и не окончательно, но данная работа важна в двух отношениях.

1. В ней в сжатом виде впервые излагается так называемая канторовская теория иррациональных чисел, где эти числа определяются как «пределы» сходящихся последовательностей рациональных чисел (позднее названных Кантором «фундаментальными последовательностями»). Под «числовой величиной» здесь везде понимается то, что сегодня обычно называют «действительным числом».

2. В § 2 из понятия «предельной точки» бесконечного точечного или числового множества (сегодня обычно называемой «точкой сгущения») развивается понятие «производного точечного множества», приводящее затем через α-кратную итерацию к определению «точечного множества α-го вида». Дальнейшее расширение этого определения за пределы любого конечного индекса α привело впоследствии исследователя к необходимости создания понятия «трансфинитных» порядковых чисел ω, $\omega+1$, ..., ω^2,... Тем самым в этом понятии «высших производных» точечного множества мы видим зародыш, а в теории тригонометрических рядов — место рождения канторовской «теории множеств».

2. ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ СОВОКУПНОСТИ ВСЕХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ*

Под действительным алгебраическим числом вообще будет пониматься действительная числовая величина ω, удовлетворяющая отличному от тождества уравнению вида

$$a_0\omega^n+a_1\omega^{n-1}+\ldots+a_n=0, \tag{1}$$

где n, a_0, a_1, ..., a_n — целые числа; при этом числа n и a_0 можно брать положительными, коэффициенты a_0, a_1, ..., a_n — взаимно простыми, а уравнение (1) — неприводимым. Этими условиями достигается то, что по известным основным теоремам арифметики и алгебры уравнение (1), которому удовлетворяет некоторое алгебраическое число, оказывается вполне определенным; обратно, уравнению вида (1) соответствует, как известно, самое большее столько алгебраических чисел, какова его степень n. Рассматриваемые все вместе, действительные алгебраические числа образуют некоторую совокупность числовых величин, которая будет обозначаться через (ω). Как вытекает из простых соображений, эта совокупность обладает тем свойством, что во всякой окрестности любого мыслимого числа α расположено бесконечно много чисел из (ω). Поэто-

---

* Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen.— J. reine und angew. Math., 1874, Bd. 77, S. 258—262. Перевод Ф. А. Медведева.

му, на первый взгляд, тем поразительнее может показаться замечание, что совокупности (ω) можно однозначно поставить в соответствие совокупность всех целых положительных чисел ν, которая будет обозначаться через (ν), и притом так, что всякому алгебраическому числу ω соответствует определенное целое положительное число ν и, наоборот, всякому целому положительному числу ν соответствует определенное число ω; а значит, выражая то же самое другими словами, совокупность (ω) можно мыслить в форме законченной бесконечной последовательности

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots, \quad (2)$$

в которую входят все индивиды из (ω), причем каждый из них занимает определенное место в (2), задаваемое соответствующим индексом. Как только найден один закон, по которому можно представить такое соответствие, так его можно произвольно модифицировать; поэтому достаточно предложить в § 1 такой метод, который, как мне кажется, доставит меньше всего хлопот.

Чтобы указать на одно применение этого свойства совокупности всех действительных алгебраических чисел, к § 1 я добавлю § 2, где устанавливаю, что если предложена любая последовательность действительных числовых величин вида (2), то во всяком заданном интервале ($\alpha \ldots \beta$) можно определить числа η, которые *не* содержатся в (2). Комбинируя содержание этих двух параграфов, получаем новое доказательство установленной впервые Лиувиллем теоремы, что во всяком заданном интервале ($\alpha \ldots \beta$) имеется бесконечно много *трансцендентных*, т. е. не алгебраических, действительных чисел [1]. Далее, теорема из § 2 оказывается основанием того, почему совокупность всех действительных числовых величин, образующую так называемый континуум (например, совокупность всех действительных чисел, которые $\geqslant 0$ и $\leqslant 1$), нельзя однозначно отобразить на совокупность (ν). Таким образом, я нашел четкое различие между так называемым континуумом и совокупностью вида совокупности всех действительных алгебраических чисел.

§ 1

Если мы обратимся к уравнению (1), которому удовлетворяет алгебраическое число ω и которое по сделанным предположениям является вполне определенным, то сумму абсолютных величин его коэффициентов, увеличенную на число $n-1$, где n — степень числа ω, можно назвать *высотой* числа ω и обозначить через N; следовательно, применяя ставший обиходным способ обозначений, имеем

$$N = n - 1 + |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_n|. \quad (3)$$

Тем самым, высота N всякого действительного алгебраического числа ω является определенным целым положительным числом. Обратно, для всякого положительного целочисленного значения N существует лишь конечное число алгебраических действительных чисел высоты N;

пусть их число будет $\varphi(N)$; например, $\varphi(1)=1$, $\varphi(2)=2$, $\varphi(3)=4$. Тогда числа совокупности (ω) можно упорядочить следующим образом: в качестве первого числа ω_1 берем число высоты $N=1$; за ним будут следовать $\varphi(2)=2$ алгебраических числа, имеющих высоту $N=2$ и расположенных по величине, и их мы обозначим через ω_2, ω_3; за ними идут $\varphi(3)=4$ числа, имеющих высоту $N=3$ и расположенных по величине; вообще после того как таким способом перечислены все числа из (ω) до некоторой высоты $N=N_1$ и помещены на определенные места, то за ними следуют действительные алгебраические числа высоты $N=N_1+1$, причем они идут в порядке возрастания их величин. Так мы получаем совокупность (ω) всех действительных алгебраических чисел в виде

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots,$$

и, принимая во внимание это расположение, можно говорить о ν-м действительном алгебраическом числе, причем ни одно из чисел совокупности (ω) не потеряно.

§ 2

Если по какому-нибудь закону задана бесконечная последовательность отличных друг от друга числовых величин

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots, \tag{4}$$

то во всяком заданном интервале $(\alpha \ldots \beta)$ можно определить число η (а значит, и бесконечно много таких чисел), которое не содержится в последовательности (4). Это и предстоит теперь доказать.

Мы начинаем с произвольно заданного интервала $(\alpha \ldots \beta)$, и пусть $\alpha<\beta$. Два первых числа последовательности (4), которые расположены в этом интервале (за исключением концов), можно обозначить через α', β', и пусть $\alpha'<\beta'$; аналогично два первых числа нашей последовательности, расположенных внутри $(\alpha' \ldots \beta')$, обозначим через α'', β'', и пусть $\alpha''<\beta''$; по тому же закону образуем следующий интервал $(\alpha''' \ldots \beta''')$ и т. д. Здесь, следовательно, α', α'', ... по самому определению являются определенными числами нашей последовательности (4), индексы которых все время возрастают; то же самое справедливо для чисел β', β'', ... Примем, далее, числа α', α'', ... возрастающими по величине, а числа β', β'', ... убывающими по величине. Каждый из интервалов $(\alpha \ldots \beta)$, $(\alpha' \ldots \beta')$, $(\alpha'' \ldots \beta'')$, ... содержит в себе все следующие за ним. Теперь мыслимы только два случая.

Или число построенных таким образом интервалов конечно, и пусть последний из них будет $(\alpha^{(\nu)} \ldots \beta^{(\nu)})$. Так как внутри него может быть расположено самое большее одно число последовательности (4), то в этом интервале можно взять число, не содержащееся в последовательности (4), и тем самым для этого случая теорема доказана.

Или число построенных интервалов бесконечно. Тогда числа α, α', α'', ..., поскольку они возрастают по величине, не возрастая до бесконечности, имеют определенный предел α^∞; то же самое верно для чисел

$\beta, \beta', \beta'', \ldots$, так как они убывают по величине, и пусть их предел β^∞. Если $\alpha^\infty = \beta^\infty$ (случай, имеющий место для совокупности (ω) всех действительных алгебраических чисел), то легко убедиться, обратившись к определению интервала, что число $\eta = \alpha^\infty = \beta^\infty$ не может содержаться в нашей последовательности[1]. Если же $\alpha^\infty < \beta^\infty$, то всякое число η внутри интервала $(\alpha^\infty \ldots \beta^\infty)$ или на его границе удовлетворяет выставленному требованию не содержаться в последовательности (4).

Теоремы, доказанные в этой статье, можно обобщать в разных направлениях, из которых здесь упомянем лишь об одном:

«Если $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots$ — конечная или бесконечная последовательность линейно независимых друг от друга чисел (так что невозможно равенство $a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + \ldots + a_n\omega_n = 0$ с целочисленными коэффициентами, не все из которых равны нулю) и мы вообразим совокупность (Ω) всех тех чисел Ω, которые можно представить в виде рациональных функций с целочисленными коэффициентами от заданных чисел ω, то во всяком интервале $(\alpha \ldots \beta)$ существует бесконечно много чисел, не содержащихся в (Ω)».

Действительно, при помощи умозаключения, аналогичного изложенному в § 1, убеждаемся, что совокупность (Ω) можно представить в виде последовательности

$$\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_\nu, \ldots,$$

откуда, принимая во внимание вывод § 2, следует справедливость этого предложения.

Совсем частный случай приведенной здесь теоремы (когда последовательность $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots$ конечна, а степень рациональных функций, задающих совокупность (Ω), фиксирована) доказан господином Миннигероде (см.: Math. Ann., Bd. 4, S. 497) [2] путем сведения к принципам Галуа.

[Примечание]

В настоящей статье, открывающей серию теоретико-множественных работ, речь идет еще исключительно об элементарном понятии «счетных множеств». В ней показывается, что как совокупность рациональных, так и совокупность *алгебраических* чисел подпадают под это понятие, а совокупность действительных чисел конечного интервала *не подпадает* под него. *Первое* доказательство, которое странным образом только одно вошло в название работы, является относительно простым и естественно получается из понятия алгебраического числа, так только поставлен сам вопрос. Напротив, приведенное в § 2 доказательство «несчетности» действительных чисел удалось Кантору, как он утверждает сам, с трудом и после нескольких тщетных попыток. Оно представляется нам сегодня несравненно более глубоким результатом данного исследования, а по его методу оно типично для специфически теоретико-множественного способа умозаключений. Только после доказательства того, что существуют и вполне

---

[1] Если бы число η содержалось в нашей последовательности, то мы имели бы $\eta = \omega_p$, где p — определенный индекс; однако это невозможно, ибо ω_p *не* содержится внутри интервала $(\alpha^{(p)} \ldots \beta^{(p)})$, тогда как число η по его определению расположено внутри этого интервала.

определенные «несчетные» математические совокупности, понятие «счетности» получает смысл и значение, и тогда переход к общему понятию «мощности» является лишь следующим шагом. Терминология в этой основополагающей работе еще не установилась: вместо слова «множество» речь идет о «собрании» или «совокупности», да и слово «счетное» здесь еще отсутствует; все время говорится об «однозначном соответствии» элементов одного собрания элементам другого. Ввиду ясности канторовского изложения, особых пояснений здесь не требуется. Впрочем, не совсем ясно, почему Кантор ограничил свою теорему «действительными» алгебраическими числами, тогда как его доказательство в целом непосредственно применимо ко *всем* (действительным и комплексным) алгебраическим числам.

3. К УЧЕНИЮ О МНОГООБРАЗИЯХ *

Если два вполне определенных многообразия M и N можно однозначно и полно поэлементно сопоставить друг с другом (что всегда возможно и многими другими способами, если это сделано каким-либо одним), то далее удобно говорить, что эти многообразия имеют *равную мощность* или же что они *эквивалентны*. Под *составной частью* многообразия M мы понимаем всякое другое многообразие M', элементы которого одновременно являются элементами многообразия M. Если два многообразия M и N не имеют равной мощности, то или M с составной частью N, или N с составной частью M имеют равную мощность; в первом случае мы называем мощность M *меньшей*, а во втором *большей*, чем мощность N.

Когда рассматриваемые многообразия *конечны*, т. е. состоят из конечного числа элементов, то, как легко видеть, понятие мощности соответствует понятию *численности*, а следовательно, понятию *целого положительного числа*, так как у двух таких многообразий мощности равны именно тогда и только тогда, когда численность их элементов одинакова. Составная часть конечного многообразия всегда имеет меньшую мощность, чем само это многообразие; это отношение перестает быть полностью справедливым для *бесконечных*, т. е. состоящих из бесконечного числа элементов, многообразий. Только из одного того обстоятельства, что некоторое бесконечное многообразие M является составной частью другого многообразия N или что оно может быть поставлено в однозначное и полное соответствие с некоторой его составной частью, ни в коем случае нельзя заключить, что его мощность меньше мощности N; это заключение справедливо лишь тогда, когда известно, что мощность M не равна мощности N. Равным образом то обстоятельство, что N является составной частью M или может быть поставлено в однозначное и полное соответствие с некоторой такой частью, нельзя рассматривать как достаточное для того, чтобы мощность M была больше мощности N.

---

* Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre.— J. reine und angew. Math., 1878, Bd. 84, S. 242—258. Перевод Ф. А. Медведева.

Напомним один простой пример. Пусть M — последовательность целых положительных чисел ν, а N — последовательность четных целых положительных чисел 2ν. Здесь N является составной частью M и тем не менее M и N имеют одинаковую мощность.

Как можно легко показать, последовательность целых положительных чисел дает наименьшую из всех мощностей, соответствующих бесконечным многообразиям. Тем не менее класс многообразий, имеющих эту наименьшую мощность, является чрезвычайно богатым и обширным. К этому классу принадлежат, например, все те многообразия, которые г-н Р. Дедекинд в своих прекрасных и ценных исследованиях по алгебраическим числам называет «конечными полями» (см.: Dirichlets Vorlesungen über Zahlentheorie. 2. Aufl. Braunschweig, 1871, S. 425 f.) [[1]], далее здесь можно привести те рассмотренные впервые мною многообразия, которые я назвал «точечными множествами ν-го вида» (см.: Math. Ann., Bd. 5, S. 129) [здесь I.1] [1]. К нему же, очевидно, принадлежит всякое многообразие, выступающее в виде простой бесконечной последовательности с общим членом a_ν; но и двойные и вообще n-кратные последовательности с общим членом $a_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_n}$ (где $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ независимо друг от друга пробегают все целые положительные числа) содержатся в этом классе. В одном предшествующем случае даже было доказано, что совокупность (ω) всех действительных (и можно было бы добавить: всех комплексных) алгебраических чисел можно мыслить в форме последовательности с общим членом ω_ν, что означает не что иное, как то, что и многообразие (ω), и любая его бесконечная составная часть имеют мощность всего числового ряда.

Для многообразий этого класса справедливы следующие легко доказуемые теоремы:

«Если M является многообразием мощности последовательности целых положительных чисел, то и каждая бесконечная составная часть M имеет такую же мощность, что и M».

«Если $M', M'', M''', \ldots$ — конечная или просто бесконечная последовательность многообразий, каждое из которых имеет мощность последовательности целых положительных чисел, то и многообразие M, полученное из объединения $M', M'', M''', \ldots$, имеет ту же самую мощность».

В последующем мы изучим так называемые непрерывные n-кратные многообразия в отношении их мощности.

В исследованиях, которые провели Риман [2] и Гельмгольц [3], а за ними и другие [4], о гипотезах, лежащих в основаниях геометрии, их авторы ис-

[1] Здесь и далее имеется в виду — в настоящем издании раздел I, статья 1.— *Примеч. пер.*

[2] См.: Riemanns gesammelte mathematische Werke. Leipzig, 1876, S. 254 f. [[2]].

[3] См.: *Helmholtz H.* Ueber die tatsächlichen Grundlagen der Geometrie.— Verh. natur.-med. Vereins Heidelberg, 1868, Bd. 4, S. 197—202; Über die Tatsachen, welche der Geometrie zugrunde liegen.— Nachr. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl., 1868, N 9; Populäre Vorträge. Braunschweig, 1876, H. 3, S. 21 ff. [[3]].

[4] См.: *Rosanes J.* Über die neuesten Untersuchungen in betreff unserer Anschauung vom Raume. Breslau, 1871, S. 13; *Liebmann O.* Zur Analysis der Wirklichkeit. Strassburg, 1876, S. 58; *Erdmann B.* Die Axiome der Geometrie. Leipzig, 1877, S. 45 [[4]].

ходили, как известно, из понятия n-кратно протяженного непрерывного многообразия и существенный признак его видели в том обстоятельстве, что его элементы так зависят от n не зависящих друг от друга действительных непрерывных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, что каждому элементу этого многообразия соответствует допустимая система значений $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n$ и, наоборот, каждой допустимой системе значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответствует определенный элемент многообразия. Кроме того, как это вытекает из контекста указанных исследований, обычно принималось то *предположение*, что взятое за основу соответствие между элементами многообразия и системами значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ является *непрерывным*, так что каждому бесконечно малому изменению системы значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответствует бесконечно малое изменение отвечающего ей элемента и, наоборот, каждому бесконечно малому изменению элемента соответствует такое же изменение значений его координат. Можно ли считать это предположение достаточным или же его нужно дополнить более специальными условиями с тем, чтобы обеспечить непротиворечивость понятия n-кратного непрерывного многообразия, его надежность [5],— это пока можно оставить в стороне. Здесь будет лишь показано, что если мы отбросим его, т. е. не будем накладывать никакого ограничения на соответствие между многообразием и его координатами, то признак, считавшийся названными авторами существенным (т. е. что n-кратно протяженное многообразие — это такое многообразие, элементы которого можно определить по n не зависящим друг от друга действительным непрерывным координатам), оказывается совершенно непригодным.

Как будет показано в нашем исследовании, элементы n-кратно протяженного непрерывного многообразия можно будет однозначно и полно определить даже при помощи одной-единственной действительной непрерывной координаты t. Отсюда тогда вытекает, что если о характере соответствия не делать никаких предположений, то число независимых непрерывных действительных координат, требующихся для однозначного и полного определения элементов n-кратно протяженного непрерывного многообразия, можно брать произвольным, а значит, оно не может рассматриваться как неизменный признак заданного многообразия. Оказалось, что на поставленный мною вопрос о том, можно ли непрерывное многообразие n измерений однозначно и полно отобразить на непрерывное многообразие только одного измерения, так что каждому элементу одного из них соответствует один и *только* один элемент другого, приходится ответить утвердительно.

Итак, непрерывную поверхность можно однозначно и полно отобразить на непрерывную линию; то же справедливо для непрерывных тел и непрерывных образов любого числа измерений.

---

[5] Ответ на этот вопрос, к которому я возвращусь в другой связи, мне кажется не представляющим никакой трудности. [Об этом см. работу I.4 и соответствующие примечания.]

Поэтому, пользуясь введенным выше выражением, мы можем сказать, что мощность любого непрерывного n-кратно протяженного образа *равна* мощности однократно протяженного непрерывного многообразия, например ограниченного непрерывного отрезка прямой линии.

§ 1

Так как два непрерывных образа *одинакового* числа измерений можно однозначно и полностью отобразить друг на друга при помощи аналитических функций, то для поставленной нами цели (а именно: доказать возможность однозначного и полного отображения образов различного числа измерений) все сводится, как легко видеть, к доказательству следующей теоремы:

(А). «Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — n независимых друг от друга действительных переменных величин, каждая из которых может принимать все значения, которые $\geqslant 0$ и $\leqslant 1$, а t — некоторая другая переменная с той же областью изменения $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, то величину t можно так поставить в соответствие системе n величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, что всякому определенному значению t будет соответствовать определенная система значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и, наоборот, каждой определенной системе значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ будет соответствовать определенное значение t».

Тогда в качестве следствия этой теоремы получается другая теорема, которую мы и имели в виду:

(В). «Непрерывное n-мерное многообразие можно однозначно и полно отобразить на непрерывное многообразие одного измерения; два непрерывных многообразия, одно из которых n, а другое m измерений, где $n \lesseqgtr m$, имеют одинаковую мощность; элементы непрерывного n-мерного многообразия можно однозначно определить при помощи одной-единственной непрерывной действительной координаты t, но их можно также определить однозначно и полностью при помощи системы m непрерывных координат $t_1, t_2, \ldots, t_m$».

§ 2

К доказательству теоремы (А) мы приходим из известной теоремы, что всякое *иррациональное число* $e \gtreqless 0$ можно вполне определенным образом представить в форме бесконечной цепной дроби

$$e = \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cdots + \cfrac{1}{\alpha_\nu + \ldots}}} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots),$$

где α_ν — целые положительные рациональные числа.

Каждому иррациональному числу $e \gtreqless 0$ соответствует определенная бесконечная последовательность положительных целых чисел и, наобо-

рот, всякая такая последовательность определяет некоторое иррациональное число $e \gtrless 0$.

Если теперь $e_1, e_2, \ldots, e_n$—n независимых друг от друга переменных величин, каждая из которых может принимать все иррациональные числовые значения интервала $(0 \ldots 1)$, причем каждое из них берется только один раз, то полагаем

$$\begin{array}{l} e_1 = (\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \ldots, \alpha_{1,\nu}, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_\mu = (\alpha_{\mu,1}, \alpha_{\mu,2}, \ldots, \alpha_{\mu,\nu}, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n = (\alpha_{n,1}, \alpha_{n,2}, \ldots, \alpha_{n,\nu}, \ldots). \end{array}$$

Эти n иррациональных чисел однозначно определяют $\overline{n+1}$-е иррациональное число $d \gtrless {0 \atop 1}$, а именно

$$d = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu, \ldots),$$

если между числами α и β ввести следующее соотношение:

$$\beta_{(\nu+1)n+\mu} = \alpha_{\mu,\nu} \begin{cases} \mu = 1, 2, \ldots, n, \\ \nu = 1, 2, \ldots \text{ до бесконечности.} \end{cases} \tag{1}$$

Но и, обратно, если мы исходим из иррационального числа $d \gtrless {0 \atop 1}$, то оно определяет последовательность чисел β_ν, а через (1) и последовательность чисел $\alpha_{\mu,\nu}$, т. е. d однозначно определяет систему n иррациональных чисел $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Из этого соображения сразу же получается следующая теорема:

(С). «Если $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — независимые друг от друга переменные величины, каждая из которых может принимать все иррациональные значения из интервала $(0 \ldots 1)$, и d — другая переменная величина, принимающая те же самые значения, то величину d и систему n величин $e_1, e_2, \ldots, e_n$ можно сопоставить друг с другом однозначно и полностью».

§ 3

После того как в предыдущем параграфе доказана теорема (С), нам нужно теперь доказать такую теорему:

(D). «Переменную величину e, которая может принимать все иррациональные значения, можно однозначно отобразить на переменную x, принимающую все действительные, т. е. рациональные и иррациональные, значения, которые $\geqslant 0$ и $\leqslant 1$, так что всякому иррациональному значению $e \gtrless {0 \atop 1}$ соответствует одно и только одно действительное значение $x \gtreqless 0$ и, обратно, каждому действительному значению x соответствует некоторое иррациональное значение e».

Действительно, как только теорема (D) доказана, так *в соответствии* с нею представляем себе $n+1$ переменных величин, обозначенных в § 2 через $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и d, сопоставленными однозначно и полно с другими переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и t, где каждая из последних переменных принимает без ограничения всякое действительное значение, которое $\geqslant 0$ и $\leqslant 1$. Так как между переменной d и системой n переменных $e_1, e_2, \ldots, e_n$ из § 2 однозначное и полное соответствие уже установлено, то тем самым получаем однозначное и полное соответствие между непрерывной переменной t и системой n непрерывных переменных $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n$, а тем справедливость теоремы (A) оказывается установленной.

Поэтому в последующем нам нужно заняться лишь доказательством теоремы (D). С этой целью для краткости можно воспользоваться простой символикой, которую мы теперь опишем.

Под *линейным* многообразием действительных чисел будем понимать всякое вполне определенное многообразие отличных друг от друга, т. е. не равных, действительных чисел, так что одно и то же число входит в линейное многообразие в качестве элемента не более одного раза.

Все действительные переменные, которые будут рассматриваться в настоящем исследовании, таковы, что областью изменения каждой из них, т. е. многообразием значений, которые они могут принимать, является заданное линейное многообразие; поэтому далее эту молчаливо принимаемую предпосылку мы не будем выделять особо. О двух таких переменных a и b мы будем говорить, что они не имеют *никакой связи*, если никакое из значений a не может быть равным какому-либо значению b; т. е. когда придется говорить, что a и b *не связаны*, то это означает, что два многообразия значений, которые могут принимать переменные a и b, не имеют общих элементов [6].

Если имеется конечная или бесконечная последовательность a', a'', $a''', \ldots, a^{(\nu)}, \ldots$ вполне определенных переменных или констант, которые попарно не имеют никакой связи, то можно определить переменную a тем, что область ее изменения получается из объединения областей изменения у $a', a'', a''', \ldots, a^{(\nu)}, \ldots$; обратно, заданную переменную a можно разными способами разложить на другие переменные $a', a'', \ldots$, которые попарно не имеют никакой связи. В обоих случаях отношение переменной a к переменным $a', a'', \ldots, a^{(\nu)}, \ldots$ мы выражаем следующей формулой:

$$a \equiv \{a', a'', \ldots, a^{(\nu)}, \ldots\}.$$

Поэтому для справедливости этой формулы нужно: 1) чтобы всякое значение, которое может принимать какая-либо из переменных $a^{(\nu)}$, было вместе с тем значением переменной a; 2) чтобы всякое значение, которое может принимать a, принималось одной и только одной из величин $a^{(\nu)}$. Для пояснения этой формулы пусть, например, φ — переменная, которая

[6] Два многообразия M и N или не имеют *никакой связи*, а именно когда они не имеют никакого общего элемента, принадлежащего им, или же они связаны при помощи определенного третьего многообразия P, а именно при помощи многообразия их общих элементов [«пересечения» M и N].

может принимать все рациональные числовые значения $\geqslant 0$ и $\leqslant 1$, e — переменная, могущая принимать все иррациональные числовые значения из интервала $(0\ldots 1)$, и, наконец, x — переменная, могущая принимать все действительные, рациональные и иррациональные числовые значения, которые $\geqslant 0$ и $\leqslant 1$; тогда

$$x=\{\varphi, e\}.$$

Если a и b — две такие переменные величины, что их можно однозначно и полно отобразить друг на друга, другими словами, если области их значений имеют одинаковую мощность, то мы будем называть a и b эквивалентными друг другу и выражать это одной из двух формул

$$a\sim b \text{ или } b\sim a.$$

В соответствии с этим определением эквивалентности двух переменных величин легко получаем, что $a\sim a$ и, далее, что если $a\sim b$ и $b\sim c$, то всегда $a\sim c$.

В различных местах данного исследования будет применяться нижеследующая теорема, доказательство которой из-за его простоты можно опустить:

(E). «Если $a', a'', \ldots, a^{(\nu)}, \ldots$ — конечная или бесконечная последовательность переменных или констант, которые попарно не имеют никакой связи, и $b', b'', \ldots, b^{(\nu)}, \ldots$ — другая последовательность, обладающая тем же свойством, причем каждой переменной $a^{(\nu)}$ первой последовательности соответствует определенная переменная $b^{(\nu)}$ другой и эти соответствующие переменные всегда эквивалентны друг другу, т. е. $a^{(\nu)}\sim b^{(\nu)}$, то всегда

$$a\sim b,$$

где

$$a\equiv\{a', a'', \ldots, a^{(\nu)}, \ldots\}$$

и

$$b\equiv\{b', b'', \ldots, b^{(\nu)}, \ldots\}.$$

§ 4

Наше исследование доведено теперь до того пункта, что нам осталось лишь доказать теорему (D) из § 3. Для достижения этой цели мы исходим из того, что все рациональные числа, которые $\geqslant 0$ и $\leqslant 1$, можно записать в форме простой бесконечной последовательности

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_\nu, \ldots$$

с общим членом φ_ν. Наиболее просто это можно сделать так. Если p/q неприводимая форма некоторого рационального числа, которое $\geqslant 0$ и $\leqslant 1$, где, следовательно, p и q — целые неотрицательные числа с наибольшим общим делителем, равным 1, то полагаем $p+q=N$. Тогда всякому числу p/q соответствует определенное целочисленное положительное значение N и, наоборот, такому значению N всегда соответствует лишь конечное число чисел p/q. Если теперь числа p/q представить в

форме такой последовательности, что числа, отвечающие меньшим значениям N, предшествуют тем, которые отвечают большим значениям N, а числа с одним и тем же значением N расположены по их величине — бо́льшие после меньших, то всякое число p/q будет расположено во вполне определенном месте простой бесконечной последовательности, общий член которой можно обозначить через φ_ν. Но эту же теорему можно получить из доказанной мною в свое время[7] теоремы, по которой совокупность (ω) всех действительных *алгебраических* чисел можно представить в форме бесконечной последовательности

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots$$

с общим членом ω_ν. Действительно, это свойство совокупности (ω) переносится на совокупность всех рациональных чисел, которые $\geqslant 0$ и $\leqslant 1$, так как это многообразие является *частью* предыдущего.

Пусть теперь e — переменная, входящая в теорему (D), принимающая все действительные числовые значения из интервала $(0 \ldots 1)$, за исключением чисел φ_ν. Берем, далее, в интервале $(0 \ldots 1)$ какую-либо бесконечную последовательность иррациональных чисел ε_ν, удовлетворяющих лишь тому условию, что $\varepsilon_\nu < \varepsilon_{\nu+1}$ и $\lim \varepsilon_\nu = 1$, например $\varepsilon_\nu = 1 - \sqrt{2}/2^\nu$.

Обозначим через f переменную, которая может принимать все действительные значения из интервала $(0 \ldots 1)$, за исключением значений ε_ν, а через g — другую переменную, которая принимает все действительные значения из интервала $(0 \ldots 1)$, за исключением ε_ν и φ_ν.

Мы утверждаем, что

$$e \sim f.$$

Действительно, в обозначениях § 3

$$e \equiv \{g, \varepsilon_\nu\}, \qquad f \equiv \{g, \varphi_\nu\},$$

а так как $g \sim g$, $\varepsilon_\nu \sim \varphi_\nu$, то по теореме (E) заключаем, что

$$e \sim f.$$

Поэтому подлежащая доказательству теорема (D) сводится к такой теореме:

(F). «Переменная f, которая может принимать все значения из интервала $(0 \ldots 1)$, за исключением значений заданной последовательности ε_ν, удовлетворяющей тем условиям, что $\varepsilon_\nu < \varepsilon_{\nu+1}$ и $\lim \varepsilon_\nu = 1$ при $\nu = \infty$, может быть однозначно и полностью сопоставлена переменной x, принимающей все значения $\geqslant 0$ и $\leqslant 1$; другими словами, $f \sim x$».

§ 5

Доказательство теоремы (F) мы основываем на следующих теоремах.

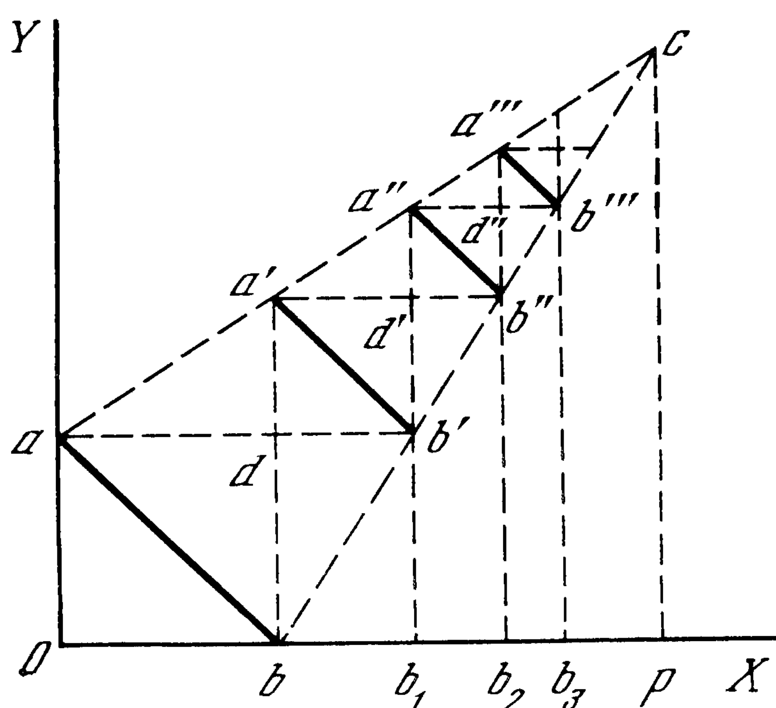
(G). «Если y — переменная, принимающая все значения из интервала $(0 \ldots 1)$, за исключением 0, а x — переменная, принимающая все без

[7] Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen.— J. reine und angew. Math., Bd. 77, S. 258 f. [здесь I.2].

исключения значения из интервала $(0\dots 1)$, то

$$y \sim x».$$

Доказательство этой теоремы (G) наиболее просто [?] получается из рассмотрения приведенной кривой, абсциссы которой начиная с 0 обозначены через x, а ординаты — через y. Эта кривая состоит из бесконечного числа параллельных друг другу, становящихся бесконечно малыми при бесконечном возрастании ν отрезков



$$\overline{ab},\quad \overline{a'b'},\ \dots,\ \overline{a^{(\nu)}b^{(\nu)}},\ \dots$$

и изолированной точки c, к которой эти отрезки приближаются асимптотически. При этом концевые точки $a, a', \dots$ $\dots, a^{(\nu)}, \dots$ считаются принадлежащими кривой, а концевые точки $b, b', \dots$, напротив, рассматриваются как исключенные из нее.

Входящие в эту фигуру длины таковы:

$$\overline{0p} = \overline{pc} = 1, \quad \overline{0b} = \overline{bp} = \overline{0a} = {}^1/_2, \quad \overline{a^{(\nu)}d^{(\nu)}} = \overline{d^{(\nu)}b^{(\nu)}} = \overline{b_{\nu-1}b_\nu} = \frac{1}{2^{\nu+1}}.$$

Легко убедиться, что когда абсцисса x принимает все значения от 0 до 1, ордината y получает все эти же значения, *за исключением* единственного значения 0.

После того как таким путем доказана теорема (G), мы при помощи формул преобразования

$$y = \frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}, \qquad x = \frac{u-\alpha}{\beta-\alpha}$$

сразу же получаем такое обобщение теоремы (G):

(H). «Переменная z, могущая принимать все значения из интервала $(\alpha\dots\beta)$, $\alpha \gtreqless \beta$, за исключением концевого значения α, эквивалентна переменной u, принимающей все без исключения значения из того же самого интервала».

Отсюда мы приходим к следующей теореме:

(J). «Если w — переменная, принимающая все значения из интервала $(\alpha\dots\beta)$, за исключением обоих концов α и β, а u — та же самая переменная, что и в теореме (H), то

$$w \sim u».$$

Действительно, пусть γ — какое-либо значение между α и β. Введем четыре новых переменных w', w'', u'' и z.

Пусть z — та же самая переменная, что и в (H); w' принимает все значения из интервала $(\alpha\dots\beta)$, за исключением обоих концов α и β;

w'' принимает все значения из интервала $(\gamma \ldots \beta)$, за исключением концевого значения β; пусть, наконец, u'' — переменная, принимающая все значения из интервала $(\gamma \ldots \beta)$, включая концевые значения.

Тогда

$$w \equiv \{w', w''\}, \qquad z \equiv \{w', u''\}.$$

Но по теореме (H) имеем

$$w'' \sim u'';$$

отсюда заключаем, что

$$w \sim z.$$

Но по теореме (H) имеем и

$$z \sim u;$$

следовательно, получаем $w \sim u$, что и доказывает теорему (J).

Теперь теорему (F) можно доказать так.

Сохраняя за переменными f и x значения, указанные в теореме (F), введем вспомогательные переменные

$$f', f'', \ldots, f^{(\nu)}, \ldots$$

и

$$x'', x^{\mathrm{IV}}, \ldots, x^{(2\nu)}, \ldots,$$

где f' — переменная, принимающая все значения из интервала $(0 \ldots \varepsilon_1)$, за исключением концевого значения ε_1; $f^{(\nu)}$ при $\nu > 1$ — переменная, принимающая все значения из интервала $(\varepsilon_{\nu-1} \ldots \varepsilon_\nu)$, за исключением обоих концов $\varepsilon_{\nu-1}$ и ε_ν; $x^{(2\nu)}$ — переменная, принимающая все без исключения значения из интервала $(\varepsilon_{2\nu-1} \ldots \varepsilon_{2\nu})$.

Если мы присоединим к переменным $f', f'', \ldots, f^{(\nu)}, \ldots$ еще постоянное число 1, то получим, что все эти величины, взятые вместе, имеют ту же область изменения, что и f, т. е.

$$f \equiv \{f', f'', \ldots, f^{(\nu)}, \ldots, 1\}.$$

Точно так же убеждаемся, что

$$x \equiv \{f', x'', f''', x^{\mathrm{IV}}, \ldots, f^{(2\nu-1)}, x^{(2\nu)}, \ldots, 1\}.$$

Но по теореме (J)

$$f^{(2\nu)} \sim x^{(2\nu)};$$

далее,

$$f^{(2\nu-1)} \sim f^{(2\nu-1)}, \quad 1 \sim 1.$$

Поэтому по теореме (E) из § 3

$$f \sim x,$$

что и требовалось доказать.

§ 6

Теперь я хочу дать более краткое доказательство теоремы (D); одним только им я не ограничился потому, что вспомогательные теоремы (F), (G), (H), (J), использованные при усложненном доказательстве, интересны сами по себе.

Как и ранее, под x мы понимаем переменную, принимающую все действительные значения из интервала $(0\ldots 1)$, включая концевые значения, под e — переменную, получающую лишь иррациональные значения из интервала $(0\ldots 1)$; требуется доказать, что $x \sim e$.

Рациональные числа $\geqslant 0$ и $\leqslant 1$ мы мыслим, как и в § 4, в форме последовательности с общим числом φ_ν, где ν пробегает последовательность чисел 1, 2, 3, ... Далее, берем произвольную бесконечную последовательность отличных друг от друга иррациональных чисел интервала $(0\ldots 1)$; пусть общим членом этой последовательности будет η_ν (например, $\eta_\nu = \sqrt{2}/2^\nu$).

Под h понимается переменная, принимающая все значения из интервала $(0\ldots 1)$, за исключением φ_ν и η_ν.

Тогда в соответствии с введенной в § 3 символикой

$$x \equiv \{h,\ \eta_\nu,\ \varphi_\nu\} \tag{1}$$

и

$$e \equiv \{h,\ \eta_\nu\}.$$

Последнюю формулу мы можем записать и так:

$$e \equiv \{h,\ \eta_{2\nu-1},\ \eta_{2\nu}\}. \tag{2}$$

Если теперь заметим, что

$$h \sim h, \qquad \eta_\nu \sim \eta_{2\nu-1}, \qquad \varphi_\nu \sim \eta_{2\nu},$$

и применим к формулам (1) и (2) теорему (E) из § 3, то получим

$$x \sim e,$$

что и требовалось доказать.

§ 7

Теперь возникает соображение применить для доказательства теоремы (A) вместо использованных нами цепных дробей форму представления чисел в виде десятичных дробей. Хотя могло бы показаться, что этот путь привел бы к цели быстрее, тем не менее на нем возникает некоторая трудность, на которую я хочу обратить здесь внимание; она явилась причиной того, что я в этом исследовании отказался от применения десятичных дробей.

Если, например, имеются две переменные x_1 и x_2 и мы положим

$$x_1 = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \ldots + \frac{\alpha_\nu}{10^\nu} + \ldots,$$

$$x_2 = \frac{\beta_1}{10} + \frac{\beta_2}{10^2} + \ldots + \frac{\beta_\nu}{10^\nu} + \ldots$$

с условием, что числа α_ν, β_ν являются целыми числами $\geqslant 0$ и $\leqslant 9$ и не принимают, начиная с некоторого ν, все время значение 0 (за исключением того случая, когда x_1 или x_2 сами равны нулю), то эти представле-

ния переменных x_1, x_2 будут однозначными всегда, т. е. x_1 и x_2 определяют бесконечные последовательности чисел α_ν и β_ν и наоборот. Если теперь из x_1 и x_2 мы образуем число

$$t=\frac{\gamma_1}{10}+\frac{\gamma_2}{10^2}+\ldots+\frac{\gamma_\nu}{10^\nu}+\ldots,$$

положив

$$\gamma_{2\nu-1}=\alpha_\nu \qquad \gamma_{2\nu}=\beta_\nu, \qquad \nu=1,2,\ldots,$$

то получим тем самым однозначное [взаимно однозначное] соответствие между системой x_1, x_2 и переменной t, ибо к заданному значению t приводит *лишь единственная* система значений x_1, x_2. Однако переменная t принимает — и это является подчеркиваемым здесь обстоятельством — не все значения из интервала $(0\ldots 1)$; она ограничена в своей изменчивости, тогда как на x_1 и x_2 в этом интервале никаких ограничений не накладывается.

Все значения суммы ряда

$$\frac{\gamma_1}{10}+\frac{\gamma_2}{10^2}+\ldots+\frac{\gamma_\nu}{10^\nu}+\ldots,$$

у которых, начиная с некоторого $\nu>1$, все $\gamma_{2\nu-1}$ или все $\gamma_{2\nu}$ имеют значение нуль, должны рассматриваться как исключенные из области переменной t, ибо они сводились бы к исключенным, а именно к *конечным*, десятичным представлениям.

§ 8

После того как в предшествующих параграфах задуманное исследование доведено до конца, в заключение можно сделать несколько общих замечаний. Теорема (A), а тем самым и теорема (B) могут быть обобщены до предложения, в соответствии с которым и непрерывные многообразия бесконечно большого числа измерений имеют ту же мощность, что и непрерывное многообразие одного измерения; однако это обобщение существенно связано с одним допущением, а именно что бесконечное число измерений само образует многообразие, имеющее мощность последовательности целых положительных чисел.

Здесь вместо (A) выступает такая теорема:

(A′). «Если $x_1, x_2, \ldots, x_\mu, \ldots$ — просто бесконечная последовательность независимых друг от друга переменных действительных величин, каждая из которых может принимать все значения, которые $\geqslant 0$ и $\leqslant 1$, а t — другая переменная с тою же областью изменения $(0\leqslant t\leqslant 1)$, то величину t можно однозначно и полностью поставить в соответствие системе бесконечно многих величин $x_1, x_2, \ldots, x_\mu, \ldots$».

При помощи теоремы (D) из § 3 эта теорема сводится к следующей:

(C′). «Если $e_1, e_2, \ldots, e_\mu, \ldots$ — бесконечная последовательность независимых друг от друга переменных величин, каждая из которых может принимать все иррациональные числовые значения из интервала $(0\ldots 1)$,

а d — другая иррациональная переменная с тою же областью изменения, то величину d можно однозначно и полностью поставить в соответствие системе бесконечно многих величин $e_1, e_2, \ldots, e_\mu, \ldots$»

Наиболее простое доказательство теоремы (C′) получается, если, применяя разложения в цепные дроби, положить, как в § 2,

$$e_\mu = (\alpha_{\mu,1}, \alpha_{\mu,2}, \ldots, \alpha_{\mu,\nu}, \ldots), \qquad \mu = 1, 2, \ldots,$$
$$d = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\lambda, \ldots),$$

а между целыми положительными числами α и β установить связь

$$\alpha_{\mu,\nu} = \beta_\lambda,$$

где

$$\lambda = \mu + (\mu+\nu-1)(\mu+\nu-2)/2.$$

Действительно, как легко показать, функция $\mu + {}^1/_2(\mu+\nu-1)(\mu+\nu-2)$ обладает тем замечательным свойством, что она представляет все целые положительные числа и причем каждое из них только один раз, когда у нее μ и ν независимо друг от друга пробегают всякое положительное целочисленное значение [1].

Одновременно теоремой (A′), по-видимому, достигается тот предел, до которого возможно обобщение теоремы (A) и ее следствий.

Поскольку на этом пути для чрезвычайно богатой и обширной области многообразий получается то свойство, что эти многообразия можно однозначно и полно отобразить на ограниченную непрерывную прямую или часть ее (под частью линии понимается всякое многообразие точек, содержащихся в ней), то возникает вопрос о том, как ведут себя в отношении мощности различные части непрерывной прямой линии, т. е. различные мыслимые в ней бесконечные многообразия точек. Если мы освободим эту проблему от ее геометрического одеяния и, как это уже сделано в § 3, будем понимать под *линейным* многообразием действительных чисел всякую мыслимую совокупность бесконечно многих отличных друг от друга чисел, то спрашивается: на сколько и на какие классы распадаются линейные многообразия, если отнести в один и тот же класс многообразия одинаковой мощности, а многообразия различной мощности — в различные классы? При помощи некоторого метода индукции, в изложение которого мы не будем входить здесь подробнее, получается теорема, что число классов линейных многообразий, получаемых в соответствии с этим принципом разбиения, является конечным и даже равным *двум* [2].

Сообразно с этим линейные многообразия состояли бы из двух классов [8], из которых первый включает в себя все многообразия, которые можно привести к виду functio ips. ν (где ν пробегает все целые положитель-

---

[8] Что эти два класса действительно различны, вытекает из теоремы, установленной в работе, которая указана в § 2 [здесь I.2], согласно которой если предложена закономерная бесконечная последовательность $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots$, то во всяком заданном интервале $(\alpha \ldots \beta)$ всегда можно найти числа, не входящие в заданную последовательность.

ные числа), тогда как второй охватывает все те многообразия, которые сводятся к виду functio ips. x (где x может принимать все действительные значения $\geqslant 0$ и $\leqslant 1$) [5]. Поэтому соответственно этим двум классам у бесконечных линейных многообразий получились бы лишь две мощности. Точное исследование этого вопроса мы откладываем до другого раза.

[Примечания]

В этой второй работе по теории множеств [6], вершиной которой является общее понятие «мощности», ставится и решается задача сравнения друг с другом «непрерывных многообразий» любого числа «измерений» в отношении их мощности. Здесь Кантору удалось получить тот (тогда еще парадоксальный) результат, что все такие многообразия любого конечного и даже (счетно) бесконечного числа измерений имеют одинаковую мощность, а именно что они все эквивалентны множеству всех действительных чисел (замкнутого) единичного отрезка, и отсюда он заключил наряду с прочим, что понятие «размерности» должно опираться прежде всего на непрерывное (и даже взаимно непрерывное) отображение многообразий друг на друга.

Доказательство того, что точки квадрата, например, можно поставить во взаимно однозначное соответствие с точками отрезка, автор основывает здесь на разложении (однозначном) в цепные дроби действительных иррациональных чисел и образовании (механическом) из двух таких разложений

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots) \text{ и } (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots)$$

третьего разложения

$$(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3, \ldots).$$

Но из этого пока получается только эквивалентность иррациональных точечных множеств, содержащихся в квадрате и соответственно в отрезке. Чтобы распространить этот результат и на (замкнутые) точечные множества (включая рациональные точки), Кантор пользуется здесь несколько усложненной системой вспомогательных теорем, в каждой из которых нужна счетность рациональных точек, содержащихся в отрезке.

[1] А именно: для всякого фиксированного значения суммы индексов $\sigma=\mu+\nu$ значениям

$$\mu=1, 2, \ldots, \sigma-1$$

и

$$\nu=\sigma-1, \sigma-2, \ldots, 1$$

соответствуют последовательные значения

$$\lambda=\frac{(\sigma-1)(\sigma-2)}{2}+1, \quad \frac{(\sigma-1)(\sigma-2)}{2}+2, \ldots, \frac{\sigma(\sigma-1)}{2},$$

причем всякое число между $(\sigma-1)(\sigma-2)/2$ и $\sigma(\sigma-1)/2$ принимается функцией λ в точности один раз. Следовательно, всякому фиксированному значению $\mu+\nu$ всегда соответствует определенный частичный отрезок, ограниченный двумя следующими друг за другом треугольными числами, а потому всем парам значений μ, ν с $\mu+\nu\leqslant\sigma$ соответствует *целый* отрезок $\lambda\leqslant\sigma(\sigma-1)/2$.

[2] Здесь Кантор впервые высказывает предположение, что линейному континууму соответствует «вторая мощность» — канторовская «гипотеза континуума».

4. ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ИЗ ТЕОРИИ НЕПРЕРЫВНЫХ МНОГООБРАЗИЙ *

В работе о некоторых вопросах учения о многообразиях, опубликованной мною в журнале Крелле, том 84 [здесь I.3], было доказано, что два ограниченных или неограниченных непрерывных многообразия M_μ и M_ν μ-го и ν-го порядков, где $\mu<\nu$, определенно могут быть поставлены в такое отношение друг к другу, что всякому элементу из M_μ соответствует элемент из M_ν и, наоборот, всякому элементу из M_ν соответствует элемент из M_μ; этот *факт* был выражен тем, что областям M_μ и M_ν приписывалась *одинаковая мощность*.

Зависимость, в которую таким образом ставились две *непрерывные* области различных порядков, была, как легко видеть из предложенных там относительно простых законов, всюду *разрывной*, и можно с довольно большой вероятностью предположить, что возможность установления двусторонне однозначного соответствия между непрерывными областями различных порядков *существенно* связана именно с этим обстоятельством.

Поэтому уже тогда, не входя в рассмотрение вопроса более детально, я смог указать на возникающее отсюда требование *доказать* теорему, что M_μ и M_ν при $\mu<\nu$ *нельзя* отобразить друг на друга непрерывно и двусторонне однозначно.

Тем временем за его решение взялись другие. Сначала Люрот в «Sitzungsberichten der physikalisch-medizinischen Sozietät in Erlangen» (8. Juli 1878) рассмотрел случай $\mu=2$ и $\nu=3$. Вскоре за этим Томе в «Göttingen Nachrichten» (August 1878) указал, как получить искомое доказательство для произвольного ν. Однако Люрот на одном из заседаний математической секции собрания естествоиспытателей в Касселе *правильно* отметил, что эта дедукция опирается на одно топологическое *предположение*, которое *равнозначно* доказываемой теореме, так что оказывалось невозможным усмотреть причину того, почему вспомогательное предложение *не нуждается* в обосновании, а *равнозначная* с ним теорема требует доказательства. В связи с этим Э. Юргенс сделал (в Касселе) доклад, примыкающий по содержанию к работе Люрота, о случае $\nu=3$ нашей теоремы. К этим доказательствам недавно добавилось еще одно в работе Нетто, где тоже рассмотрен случай любого ν (Crelles Journal, Bd. 86, S. 263) [1].

В последующем я хочу воспользоваться отличным от применявшихся до сих пор методов, при помощи которого рассматриваемая теорема — или, скорее ее обобщение, обозначенное далее через (III),— сводится к одной часто используемой в анализе теореме, в обсуждение которой здесь входить не место, а именно к такой известной теореме:

(I) «Однозначная непрерывная действительная функция $f(t)$ дейст-

* Über einen Satz aus der Theorie der stetigen Mannigfaltigkeiten.—Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1879, S. 127—135. Перевод Ф. А. Медведева.

вительной переменной t, которая для $t=t_1$ принимает положительное значение $f(t_1)>0$, а для $t=t_2$ отрицательное значение $f(t_2)<0$, по крайней мере для одного значения t_0 переменной t, расположенного между t_1 и t_2, принимает значение нуль, так что $f(t_0)=0$»[1].

Эта теорема (I) лежит в основе другой теоремы (II), формулировке которой мы предпошлем нижеследующие определения, нужные и для дальнейшего изложения.

Если M_μ — непрерывное многообразие μ-го порядка [размерности], элементы которого непрерывно и однозначно зависят от μ непрерывных независимых координат $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$, то под сферой $(\mu-1)$-го порядка $K_{\mu-1}$ **понимается принадлежащая** M_μ область $(\mu-1)$-го порядка, выделяемая из M_μ равенством

$$F\equiv (x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+\ldots+(x_\mu-a_\mu)^2-r^2=0.$$

Такая $K_{\mu-1}$ разлагает M_μ на три части: на часть, расположенную *вне* $K_{\mu-1}$, для точек которой $F>0$; на часть, расположенную *внутри* $K_{\mu-1}$, для точек которой $F<0$, и, наконец, на часть, для которой $F=0$ и которая поэтому есть не что иное, как сама $K_{\mu-1}$ [1].

Точки непрерывного многообразия M_μ распадаются на два класса: на так называемые *внутренние точки* и *граничные точки*. Точка p из M_μ называется внутренней, если вокруг p как центра можно описать сферу $K_{\mu-1}$ со столь малым r, что все точки, расположенные внутри и на $K_{\mu-1}$, принадлежат области M_μ; всякая точка p из M_μ, для которой такая конструкция *невозможна*, будет причисляться к *границе* M_μ. Полная граница непрерывной области M_μ есть область более низкого порядка, которая или образует один непрерывно связанный кусок, или состоит из нескольких таких отдельных кусков.

Из (I) легко получается теорема:

(II). «Если $K_{\mu-1}$ — сфера $(\mu-1)$-го порядка, расположенная в M_μ, a — точка внутри $K_{\mu-1}$, b — точка вне $K_{\mu-1}$ и N — какая-либо непрерывно связная область (любого порядка) внутри M_μ, содержащая обе точки a и b, то существует по крайней мере одна точка c, одновременно принадлежащая областям $K_{\mu-1}$ и N».

Подлежащую доказательству теорему мы формулируем теперь так:

(III) «Если между двумя непрерывными областями M_μ и M_ν имеет место такая зависимость, что каждой точке z из M_μ соответствует *самое большее* одна точка Z из M_ν, а каждой точке Z из M_ν соответствует по крайней мере одна точка z из M_μ и, далее, это соответствие является непрерывным, так что бесконечно малому изменению z соответствует бесконечно малое изменение Z и, наоборот, бесконечно малому изменению Z соответствует бесконечно малое изменение z, то $\mu\geqslant\nu$.

Для $\nu=1$ справедливость этой теоремы непосредственно очевидна; мы намереваемся доказать правильность ее для любого ν тем, что предположим ее выполнимость для $\nu=n-1$ и в этом предположении докажем ее справедливость и для $\nu=n$. Это получается при помощи следующего соображения.

[1] См.: *Cauchy A.* Cours d'analyse algébrique. Note III, p. 460 [2].

Если бы теорема (III) была неверной для $\nu=n$, то M_n можно было бы отобразить на M_μ, $\mu<n$, так, что каждой точке z из M_μ соответствовала бы *самое большее* одна точка Z из M_n, а каждой точке Z из M_n соответствовала бы *по крайней мере* одна точка z из M_μ, причем это соответствие между z и Z было бы непрерывным. Покажем, что это предположение приводит к противоречию с теоремой (II), а значит, и с теоремой (I).

Пусть A — *внутренняя* точка области M_n, которой соответствует по крайней мере одна *внутренняя* точка a области M_μ; такую точку взять можно, так как в противном случае M_n отображалась бы на границу области M_μ и тогда вместо M_μ можно было бы взять область меньшего порядка. Точке A из M_n могут, помимо a, соответствовать и другие точки из M_μ, совокупность которых будем обозначать через (a'). Пусть B — какая-либо точка из M_n, не совпадающая с A; совокупность всех соответствующих ей точек из M_μ обозначим через (b).

Вокруг A как центра опишем в M_n сферу K_{n-1} так, чтобы точка B была расположена вне ее.

Вокруг a как центра тоже опишем в M_μ сферу $K_{\mu-1}$, столь малую, чтобы: 1) все точки совокупности (b) располагались вне $K_{\mu-1}$, 2) образ G сферы $K_{\mu-1}$ в M_n был расположен внутри сферы K_{n-1}. Вследствие положенной в основу непрерывности соответствия эти два условия могут быть удовлетворены путем достаточного уменьшения сферы $K_{\mu-1}$.

На сфере $K_{\mu-1}$ отделяем точки z', которым соответствуют точки области M_n, от *тех* точек z'', которым вообще не соответствует никакого образа в M_n.

Точки z' образуют одну или несколько отдельных непрерывных частей сферы $K_{\mu-1}$; им в M_n соответствует в качестве образа область G, которая тоже может состоять из одной или нескольких непрерывных частей.

Каждой точке z' из $K_{\mu-1}$ соответствует определенная точка ζ из G, тогда как точке ζ из G может соответствовать несколько точек z' из $K_{\mu-1}$.

Хотя образ G вообще не будет содержать точку A, тем не менее мыслим и случай, когда A является точкой в G, а именно когда на $K_{\mu-1}$ попадают точки совокупности (a'). Если теперь ζ' — отличная от A точка ζ образа G, то проводим в M_n прямолинейный луч $A_{\zeta'}$; он при его продолжении коснется сферы K_{n-1} во вполне определенной точке Z'.

Таким образом, мы получаем для каждой точки z' на $K_{\mu-1}$, за исключением принадлежащих (a'), вполне определенную точку Z' на K_{n-1}, и это соответствие между z' и Z' является, как легко видеть, непрерывным.

Точки Z' *не могут* покрывать сферу K_{n-1} полностью. Действительно, если бы точки Z' могли заполнить все места в K_{n-1}, то существовало бы непрерывное отображение сферы K_{n-1} на $K_{\mu-1}$, причем каждой точке из $K_{\mu-1}$ соответствовала бы *самое большее* одна точка из K_{n-1}, а каждой точке из K_{n-1} соответствовала бы *по крайней мере* одна точка из $K_{\mu-1}$, что ввиду $\mu-1<n-1$ противоречило бы нашей теореме (III) для случая $\nu=n-1$, которая для него предположена справедливой.

Поэтому на K_{n-1} должны существовать точки, с которыми Z' никогда не совпадает; *если мы соединим точку A с одной из таких точек P пря-*

молинейным лучом AP, то AP определенно не затронет образ G ни в какой точке, отличной от A.

Если теперь точка P будет соединена с точкой B простой непрерывной линией PB, полностью расположенной вне сферы K_{n-1} области M_n, то получим непрерывную линию APB, ведущую от A к B, которая не имеет ни одной точки, общей с G, помимо, возможно, ее начальной точки A.

Этой линии APB в M_μ соответствует непрерывная область N, исходящая из точки a и ведущая к одной или нескольким точкам (b), которая не имеет с $K_{\mu-1}$ *ни одной* общей точки. Действительно, N не может иметь ни одной из точек (a'), общей с $K_{\mu-1}$, так как линия APB при ее продолжении к точке A не возвращается назад; не может N иметь с $K_{\mu-1}$ общей и какую-либо другую точку z', ибо G соприкасается с APB лишь в A; наконец, N не может содержать также ни одной точки z'' из $K_{\mu-1}$, поскольку z'' были теми точками, которым в M_n не отвечают никакие образы.

Тем самым мы имеем некую непрерывную область N, исходящую из точки a и идущую к одной или нескольким точкам (b), расположенным вне $K_{\mu-1}$, которая не имеет с $K_{\mu-1}$ ни одной общей точки. *Но это противоречит теореме* (II), *а значит, и теореме* (I). Отсюда заключаем, что наша теорема (III) верна и для случая $\nu=n$, а значит, справедлива вообще для всякого ν.

[Примечание]

Данное в настоящей работе доказательство основной теоремы теории размерности можно считать столь же неудовлетворительным, как и указанные в ней и раскритикованные автором предшествующие доказательства. Об этом см., в частности, критическое изложение Э. Юргенса в «Jahresber. Dt. Math. Ver.», 1899, Bd. 7, S. 50—55 [3]. В частности, у Кантора отсутствует «доказательство того, что в соответствии между величинами z' и Z' последняя зависит от первой непрерывно, а это доказательство может представить особо большие трудности, когда Z' является многозначной функцией от z'». Вообще применение здесь бесконечнозначных непрерывных функций рискованно, ибо для них, как показал Юргенс, не выполняется даже та основная теорема, что они вместе с двумя значениями принимают все промежуточные. Довольно неудачной мыслью Кантора была и его попытка свести теорему об инвариантности числа измерений к кажущемуся более общим предложению об одно-многозначном непрерывном отображении, поскольку последнее, если оно справедливо, было бы труднее доказать, чем первоначальное.

Первое удовлетворительное доказательство общей теоремы, что многообразия различного числа измерений нельзя отобразить друг на друга одновременно взаимно однозначно и взаимно непрерывно дал Л. Э. Я. Брауэр в «Math. Ann.», 1910, Bd. 70, S. 161—165 [4]. Из более новых доказательств следует упомянуть: *Sperner E.* Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionzahl und des Gebietes.— Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg, 1928, Bd. 6, S. 265—272 [5].

[1] Здесь речь идет о так называемой сегодня «теореме Жордана» для частного случая многомерной сферы.

5.1. О БЕСКОНЕЧНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ТОЧЕЧНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ * [1]

В одной работе, напечатанной в журнале Крелле, т. 84 [здесь I.3], я доказал для очень широкой области геометрических и арифметических многообразий, как непрерывных, так и разрывных, что они могут быть однозначно и полно отображены на прямолинейный отрезок или на разрывную составную часть его.

Тем самым последние многообразия — мы называем их *линейными точечными многообразиями* или, короче, *линейными точечными множествами*, которые, следовательно, образуют конечные или бесконечные прямолинейные отрезки или же всеми своими точками содержатся в них как части, приобретают особый интерес, а потому может оказаться полезным посвятить им ряд соображений и прежде всего изучить их классификацию. Различные точки зрения и связанные с ними принципы классификации приводят нас к тому, чтобы распределить линейные точечные множества по определенным группам. Чтобы развить какую-либо из этих точек зрения, вспомним *понятие производного множества* заданного точечного множества P, которое было изложено в одной работе о тригонометрических рядах (Math. Ann., Bd. 5) [I. 1]. В недавно появившемся труде Дини (Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali. Pisa, 1878) [2] мы находим это понятие развитым еще далее тем, что он взял его за исходный пункт ряда замечательных обобщений известных аналитических предложений [1]. Впрочем, понятие *производного множества* заданного многообразия не ограничивается линейными многообразиями, но равным образом годится для *плоских*, *пространственных* и *n-кратных* непрерывных и разрывных многообразий. На нем, как мы предполагаем показать позднее, основывается простейшее и одновременно полное объяснение, соответственно определение, *континуума*.

А именно производное P' линейного точечного множества P есть многообразие всех точек, которые обладают свойством *предельной точки*, причем безразлично, является ли предельная точка одновременно точкой из P или нет.

Так как в соответствии со сказанным производное точечного множества P является определенным точечным множеством P', то можно находить и производное этого множества, которое тогда называется *вторым производным множеством множества* P и будет обозначаться через P''; продолжая этот процесс, получаем ν-е производное множества P, которое будет обозначаться через $P^{(\nu)}$.

Может случиться, что последовательность производных P', P'', ... приведет к производному множеству $P^{(n)}$, состоящему из точек, число

---

* Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten. N 1.— Math. Ann., 1879, Bd. 15, S. 1—7. Перевод Ф. А. Медведева.

1 См. также: *Ascoli G.* Nuove ricerche sulla serie di Fourier.— Reale Accad. Lincei, 1877—1878 [3].

которых конечно в конечной области, так что $P^{(n)}$ не содержит *ни одной* предельной точки, а значит, не имеет производного множества; в этом случае о множестве P мы скажем, что оно является множеством *первого рода* и n-го *вида*. Если же последовательность производных множества P, т. е. последовательность P', P'', P''', ..., $P^{(\nu)}$, ... не обрывается, то мы говорим, что точечное множество P является множеством *второго рода*.

Отсюда легко видеть, что если P первого рода и n-го вида, то и P', P'', P''', ... принадлежат к первому роду и при этом соответственно $(n-1)$-го, $(n-2)$-го, $(n-3)$-го, ... видов; что, далее, если P принадлежит ко второму роду, то это же верно и для всех его производных P', P'', ... Замечательно затем то, что все точки множеств P'', P''', ... всегда являются точками множества P', тогда как точка, принадлежащая P', не обязательно принадлежит множеству P.

Далее получаются важные свойства точечного множества P, если принять во внимание его поведение относительно заданного непрерывного интервала $(\alpha \ldots \beta)$ (концы которого мы рассматриваем как принадлежащие ему). Здесь может случиться, что отдельные или же все точки этого интервала одновременно являются точками множества P, а также что никакая точка из $(\alpha \ldots \beta)$ не является точкой из P; в последнем случае мы скажем, что P расположено полностью *вне* интервала $(\alpha \ldots \beta)$. Если P расположено в интервале $(\alpha \ldots \beta)$ полностью или частично, то может представиться замечательный случай, когда *любой сколь угодно малый* интервал $(\gamma \ldots \delta)$, содержащийся в $(\alpha \ldots \beta)$, содержит точки множества P. В этом случае мы будем говорить, что P *всюду плотно в интервале* $(\alpha \ldots \beta)$. *Примерами* таких *всюду плотных* в интервале $(\alpha \ldots \beta)$ точечных множеств являются: 1) всякое точечное множество, которому в качестве элементов принадлежат все точки интервала $(\alpha \ldots \beta)$; 2) точечное множество, состоящее из всех тех точек интервала $(\alpha \ldots \beta)$, абсциссами которых являются рациональные числа; 3) точечное множество, состоящее из всех тех точек интервала $(\alpha \ldots \beta)$, абсциссами которых являются рациональные числа вида $(2n+1)/2^m$ (где n и m — целые рациональные числа).

Из этого объяснения выражения *«всюду плотное в заданном интервале»* следует, что если некоторое множество точек *не* является *всюду плотным* в интервале $(\alpha \ldots \beta)$, то в последнем необходимо должен существовать интервал $(\gamma \ldots \delta)$, в котором нет ни одной точки множества P. Можно, далее, показать, что если P всюду плотно в интервале $(\alpha \ldots \beta)$, то P' не только всюду плотно в нем, но и содержит в себе *все точки* интервала $(\alpha \ldots \beta)$. Это свойство множества P' тоже можно взять за исходный пункт определения *всюду плотности*, т. е. сказать: точечное множество P будет называться *всюду плотным* в интервале $(\alpha \ldots \beta)$, если его производное P' содержит в качестве элементов все точки интервала $(\alpha \ldots \beta)$.

Если P *всюду плотно* в некотором интервале $(\alpha \ldots \beta)$, то P *всюду плотно* и в каждом интервале $(\alpha' \ldots \beta')$, содержащемся в $(\alpha \ldots \beta)$.

Точечное множество P, *всюду плотное* в интервале $(\alpha \ldots \beta)$, необходимо является множеством *второго рода*. Действительно, тогда P', а потому и P'', P''', ... *всюду плотны* в интервале $(\alpha \ldots \beta)$; эта последовательность производных множества P является неограниченной, т. е. P принадлежит ко *второму роду*.

Отсюда мы заключаем, что точечное множество P *первого рода* определенно не является всюду плотным ни в каком заданном интервале $(\alpha \ldots \beta)$ и что, следовательно, внутри $(\alpha \ldots \beta)$ всегда можно найти интервал $(\gamma \ldots \delta)$, не содержащий ни одной точки множества P.

Вопросом о том, обладает ли, обратно, всякое точечное множество *второго рода* тем свойством, что существует интервал $(\alpha \ldots \beta)$, в котором оно *всюду плотно*, мы займемся позднее [в конце I. 5.2].

Теперь мы переходим к совершенно иной, не менее замечательной *основе деления* линейных точечных многообразий, а именно к их *мощности*.

В указанной выше работе[2] мы общим образом сказали, что два геометрические, арифметические или какие-либо другие многообразия M и N, принадлежащие четко образованной области понятий, имеют *одинаковую мощность*, если мы в состоянии так сопоставить их по какому-либо определенному закону друг с другом, что каждому элементу из M соответствует элемент из N и, наоборот, каждому элементу из N соответствует элемент из M.

Теперь в зависимости от того, имеют ли два многообразия одинаковые или различные мощности, их можно отнести к *одному и тому же* или к *различным классам*. Это общее правило можно, в частности, применить и к *линейным точечным множествам*, и они поэтому распадаются на *определенные классы*; все точечные множества одного класса имеют одинаковую *мощность*, тогда как точечные множества, отнесенные в различные классы, имеют разные мощности.

Каждое отдельное множество точек можно рассматривать как *представителя* того класса, которому оно принадлежит.

Прежде всего здесь появляется класс точечных множеств, *перечислимых в бесконечности*, т. е. тех точечных множеств, которые имеют равную мощность с последовательностью натуральных чисел 1, 2, 3, ..., ..., ν, ... и, следовательно, могут быть представлены в форме простой бесконечной последовательности. Этому классу принадлежат, например, все точечные множества *первого рода*; но в этот класс попадают многие точечные множества *второго рода*, как, например: 1) точечное множество, состоящее из всех тех точек интервала, абсциссы которых являются *рациональными числами*[3]; 2) точечное множество, состоящее из всех тех точек интервала, абсциссы которых являются *алгебраическими* числами[4].

Затем перед нами выступает тот класс линейных точечных множеств,

---

[2] J. reine und angew. Math., 1879, Bd. 84, S. 242 [здесь I.3].
[3] Ibid., S. 250 [I.3].
[4] Ibid., 1874, Bd. 77, S. 258 [I.2].

представителем которого мы считаем любой непрерывный интервал, к примеру множество всех точек, абсциссы которых $\geqslant 0$ и $\leqslant 1$.

Этому классу принадлежат, например:

1) всякий непрерывный интервал $(\alpha \ldots \beta)$;

2) всякое точечное множество состоящее из многих раздельных непрерывных интервалов $(\alpha \ldots \beta)$, $(\alpha' \ldots \beta')$, $(\alpha'' \ldots \beta'')$, ... в конечном или бесконечном числе;

3) всякое точечное множество, получаемое из непрерывного интервала тем, что из него удаляется *конечное* или *счетно бесконечное* многообразие точек $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots$ [5]

Являются ли два указанных класса единственными, на которые распадаются линейные точечные множества,— это здесь пока исследоваться не будет; напротив, мы хотим доказать, что они являются *действительно различными* классами. Для этого необходимо показать, что любые два представителя этих классов нельзя однозначно и полностью отобразить друг на друга.

В качестве представителя второго класса здесь выберем тоже непрерывный интервал $(0 \ldots 1)$. Если бы это многообразие одновременно принадлежало первому классу, то должна была бы существовать просто бесконечная последовательность

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots,$$

состоящая *из всех действительных чисел* $\geqslant 0$ и $\leqslant 1$ и такая, что всякое число ζ из этого интервала занимало бы определенное место в этой последовательности. Этому, однако, противоречит весьма общая теорема, которую со всей строгостью мы доказали в журнале Крелле, т. 77 [здесь I.2], а именно такая:

«*Если имеется просто бесконечная последовательность*

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots$$

неравных действительных чисел, заданная по какому-либо закону, то во всяком данном интервале $(\alpha \ldots \beta)$ *можно указать число* η (*а значит, и бесконечно много таких чисел*), *которое не содержится в этой последовательности* (*как ее член*)».

Ввиду большого интереса, который представляет эта теорема не только для рассматриваемого вопроса, но и во многих других как арифметических, так и аналитических отношениях, будет не лишним, если мы более отчетливо проведем данное там доказательство, применяя упрощающие его модификации.

Для взятой исходной последовательности

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots$$

(которую мы обозначим символом (ω)) и произвольного интервала $(\alpha \ldots \beta)$, в котором $\alpha < \beta$, нужно будет показать, что в этом интервале можно найти действительное число η, не содержащееся в (ω).

[5] Ibid., 1879, Bd. 84, S. 254 [I.3].

I. Прежде всего замечаем, что если наше многообразие (ω) *не является всюду плотным* в интервале, то внутри этого интервала должен существовать другой интервал $(\gamma \ldots \delta)$, все числа которого не принадлежат (ω); тогда в качестве η можно брать любое число интервала $(\gamma \ldots \delta)$; оно расположено в интервале $(\alpha \ldots \beta)$ и определенно *не* содержится в нашей последовательности (ω). Этот случай не доставляет поэтому никаких хлопот, и мы можем перейти к более трудному.

II. Пусть многообразие (ω) *всюду плотно* в интервале $(\alpha \ldots \beta)$. В этом случае всякий сколь угодно малый интервал $(\gamma \ldots \delta)$, расположенный в $(\alpha \ldots \beta)$, содержит числа нашей последовательности (ω). Чтобы показать, что тем не менее в интервале $(\alpha \ldots \beta)$ существуют числа η, не содержащиеся в (ω), мы прибегаем к следующему соображению.

Так как в нашей последовательности определенно имеются числа, содержащиеся *внутри* интервала $(\alpha \ldots \beta)$, то одно из них должно иметь *наименьший индекс*, скажем $\omega_{\varkappa_1}$, а некоторое другое число $\omega_{\varkappa_2}$ должно быть с непосредственно бо́льшим индексом.

Обозначим меньшее из двух чисел $\omega_{\varkappa_1}$, $\omega_{\varkappa_2}$ через α', а большее через β' (их равенство исключается, так как мы предположили, что наша последовательность состоит из различных чисел).

Тогда по определению

$$\alpha<\alpha'<\beta'<\beta,$$

причем

$$\varkappa_1<\varkappa_2.$$

Кроме того, следует заметить, что все числа ω_μ нашей последовательности, для которых $\mu<\varkappa_2$, не находятся внутри интервала $(\alpha' \ldots \beta')$, что непосредственно вытекает из определения чисел $\omega_{\varkappa_1}$, $\omega_{\varkappa_2}$. Совершенно так же можно рассмотреть два числа $\omega_{\varkappa_3}$, $\omega_{\varkappa_4}$ нашей последовательности, которые попадают *внутрь* интервала $(\alpha' \ldots \beta')$ и меньшее из них будет обозначено через α'', а большее — через β''.

Тогда имеем

$$\alpha'<\alpha''<\beta''<\beta',$$

$$\varkappa_2<\varkappa_3<\varkappa_4$$

и очевидно, что все числа ω_μ нашей последовательности, для которых $\mu<\varkappa_4$, *не попадают внутрь* интервала $(\alpha'' \ldots \beta'')$.

После того как, следуя тому же закону, получим интервал $(\alpha^{(\nu-1)} \ldots \beta^{(\nu-1)})$, оказывается, что следующий интервал получается из него тем, что находим два первых (т. е. взятых с наименьшими индексами) числа нашей последовательности (ω) (пусть они будут $\omega_{\varkappa_{2\nu-1}}$ и $\omega_{\varkappa_{2\nu}}$), которые попадают *внутрь* интервала $(\alpha^{(\nu-1)} \ldots \beta^{(\nu-1)})$; меньшее из этих чисел будет обозначаться через $\alpha^{(\nu)}$, а большее — через $\beta^{(\nu)}$.

Тогда интервал $(\alpha^{(\nu)} \ldots \beta^{(\nu)})$ расположен внутри всех предшествующих интервалов и находится к нашей последовательности (ω) в том *своеобразном* отношении, что все числа ω_μ, для которых $\mu\leqslant\varkappa_{2\nu}$, *опреде-*

ленно расположены вне него. Так как, очевидно,

$$\varkappa_1 < \varkappa_2 < \varkappa_3 < \ldots < \varkappa_{2\nu-2} < \varkappa_{2\nu-1} < \varkappa_{2\nu} < \ldots$$

и эти числа, будучи индексами, являются *целыми* числами, то

$$\varkappa_{2\nu} \geqslant 2\nu,$$

а потому

$$\nu < \varkappa_{2\nu};$$

мы можем поэтому определенно сказать — и этого для последующего достаточно, что

если ν — произвольное целое число, то величина ω_ν расположена вне интервала $(\alpha^{(\nu)} \ldots \beta^{(\nu)})$.

Так как числа $\alpha', \alpha'', \alpha''', \ldots, \alpha^{(\nu)}, \ldots$ возрастают по величине, будучи, однако, заключенными в интервале $(\alpha \ldots \beta)$, то по известной основной теореме учения о величинах они имеют определенный предел, который мы обозначим через A, так что

$$A = \operatorname{Lim} \alpha^{(\nu)} \text{ для } \nu = \infty.$$

То же самое справедливо для чисел $\beta', \beta'', \beta''', \ldots, \beta^{(\nu)}, \ldots$, которые убывают и притом тоже расположены в интервале $(\alpha \ldots \beta)$; их предел мы обозначим через B, так что

$$B = \operatorname{Lim} \beta^{(\nu)} \text{ для } \nu = \infty.$$

Очевидно, что

$$\alpha^{(\nu)} < A \leqslant B < \beta^{(\nu)}.$$

Но легко видеть, что случай $A < B$ представиться *не может*, так как в противном случае всякое число ω_ν нашей последовательности было бы расположено *вне* интервала $(A \ldots B)$, ибо ω_ν находится вне интервала $(\alpha^{(\nu)} \ldots \beta^{(\nu)})$; тогда, вопреки предположению, наша последовательность не была бы *всюду плотной* в интервале $(\alpha \ldots \beta)$.

Остается поэтому лишь случай $A = B$; а тогда оказывается, что число

$$\eta = A = B$$

не принадлежит нашей последовательности (ω).

Действительно, если бы оно было членом нашей последовательности, например ν-м, то имели бы $\eta = \omega_\nu$. Последнее же равенство невозможно ни для какого значения ν, так как η расположено *внутри* интервала $(\alpha^{(\nu)} \ldots \beta^{(\nu)})$, а ω_ν *вне* его.

5.2. О БЕСКОНЕЧНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ТОЧЕЧНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ *

Для облегчения последующего изложения позволю себе сначала ввести некоторые формулы.

Тождество двух точечных множеств P и Q будет выражаться формулой $P \equiv Q$. Если два множества P и Q не имеют общего элемента, то скажем, что они *не связаны*. Если множество P возникает из объединения нескольких множеств P_1, P_2, P_3, ... в конечном или бесконечном числе и эти множества попарно не связаны, то мы пишем

$$P \equiv \{P_1, P_2, P_3, \ldots\}.$$

Если все точки множества P принадлежат другому множеству Q, то мы скажем, что P *содержится* в Q или же что P является делителем Q, а Q — кратным P. Если P_1, P_2, P_3, ... — какие-либо точечные множества, в конечном или бесконечном числе, то точечными множествами являются как наименьшее общее кратное, которое мы обозначаем через

$$\mathfrak{M}(P_1, P_2, P_3, \ldots) \text{ [«множество-объединение»]},$$

представляющее собой множество, состоящее из всех различных точек множеств P_1, P_2, P_3, ... и не содержащее в качестве элементов никаких других точек, так и наибольший общий делитель, который мы обозначим через

$$\mathfrak{D}(P_1, P_2, P_3, \ldots) \text{ [«пересечение»]}$$

и который есть множество точек, общих всем P_1, P_2, P_3, ... Например, если P', P'', P''', ... — следующие друг за другом производные точечного множества P [см. статью 5.1], то мы можем сказать, что P'' является делителем P', P''' — делителем как P'', так и P', и вообще $P^{(\nu)}$ является делителем $P^{(\nu-1)}$, $P^{(\nu-2)}$, ..., P'; напротив, P' вообще не есть делитель P. Если, однако, само P — производное множество некоторого множества Q, то P' — делитель P [4].

Далее целесообразно располагать знаком, выражающим отсутствие точек. Для этого мы выбираем 0 [5]. Следовательно, $P \equiv 0$ означает, что множество P не содержит *ни одной* точки, а значит, строго говоря, как таковое не существует. Пример дает точечное множество первого рода и n-го вида, характеризуемое тем, что

$$P^{(n+1)} \equiv 0,$$

и напротив, $P^{(n)}$ отлично от 0.

Два множества *связываются* их наибольшим делителем, и если последний $\equiv 0$, то они *не связаны*.

Если два точечных множества P и Q имеют равную мощность, то они

---

* Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten. N 2.— Math. Ann., 1880, Bd. 17, S. 355—358. Перевод Ф. А. Медведева.

принадлежат к одному классу (№ 1); мы называем их эквивалентными и выражаем это формулой

$$P \sim Q.$$

Если $P \sim Q$ и $Q \sim R$, то всегда

$$P \sim R.$$

Если, далее, $P_1, P_2, P_3, \ldots$ — последовательность множеств, которые попарно не связаны, $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ — другая последовательность множеств с тем же свойством и имеет место $P_1 \sim Q_1$, $P_2 \sim Q_2$, $P_3 \sim Q_3, \ldots$, то и

$$\{P_1, P_2, P_3, \ldots\} \sim \{Q_1, Q_2, Q_3, \ldots\}.$$

Точечные множества первого рода можно, как мы только что видели, полностью охарактеризовать понятием производного множества, насколько последнее развито до сих пор. Для множеств второго рода этого понятия недостаточно; здесь требуется обобщение, представляющееся само собой при более глубоком рассмотрении.

Мы замечаем, что в последовательности производных $P', P'', P''', \ldots$ множества P всякий член является делителем предыдущего, следовательно, каждое новое производное $P^{(\nu)}$ возникает из предшествующего производного $P^{(\nu-1)}$ путем *удаления* некоторых точек и *без того*, чтобы добавлялись новые точки.

Если P принадлежит второму роду, то P' состоит из двух существенно различных точечных множеств Q и R, так что

$$P' \equiv \{Q, R\},$$

причем Q содержит те точки множества P', которые при достаточном продолжении последовательности $P', P'', P''', \ldots$ теряются, а другое множество R включает те точки, которые остаются во *всех* членах последовательности $P', P'', P''', \ldots$, и, следовательно, R определяется формулой

$$R \equiv \mathfrak{D}(P', P'', P''', \ldots).$$

Но, очевидно, мы имеем и

$$R \equiv \mathfrak{D}(P'', P''', P^{\mathrm{IV}}, \ldots),$$

и вообще

$$R \equiv \mathfrak{D}(P^{(n_1)}, P^{(n_2)}, P^{(n_3)}, \ldots),$$

где $n_1, n_2, n_3, \ldots$ — любая последовательность возрастающих до бесконечности целых положительных чисел.

Это точечное множество R, получаемое из множества P, будет обозначаться знаком

$$P^{(\infty)}$$

и называться «производным множеством порядка ∞ множества P» [вместо многозначного ∞ Кантор позднее применил знак ω].

Первое производное множества $P^{(\infty)}$ будет обозначаться через $P^{(\infty+1)}$, n-е производное множества $P^{(\infty)}$ — через $P^{(\infty+n)}$. Если же $P^{(\infty)}$ будет

иметь производное порядка ∞ вообще отличное от O, то мы обозначим его через $P^{(2\infty)}$. Продолжая это построение, мы приходим к производным множествам, которые последовательно обозначаются через

$$P^{(n_0\infty+n_1)},$$

где n_0, n_1 — целые положительные числа. Но мы можем превзойти и их, образовывая

$$\mathfrak{D}(P^{(\infty)}, P^{(2\infty)}, P^{(3\infty)}, \ldots)$$

и устанавливая для этого знак $P^{(\infty^2)}$.

Путем повторения этой операции и комбинирования ее с введенными выше получаем общее понятие

$$P^{(n_0\infty^2+n_1\infty+n_2)},$$

а через продолжение этого процесса приходим к

$$P^{(n_0\infty^\nu+n_1\infty^{\nu-1}+\ldots+n_\nu)},$$

где n_0, n_1, ..., n_ν — целые положительные числа. Дальнейшие понятия получаются тогда, когда ν станем считать переменным; мы полагаем

$$P^{(\infty^\infty)} \equiv \mathfrak{D}(P^{(\infty)}, P^{(\infty^2)}, P^{(\infty^3)}, \ldots).$$

Продолжая последовательно, получим новые понятия

$$P^{(n\infty^\infty)},\quad P^{(\infty^{\infty+1})},\quad P^{(\infty^{\infty+n})},\quad P^{(\infty^{n\infty})},\quad P^{(\infty^{\infty^n})},\quad P^{(\infty^{\infty^\infty})} \text{ и т. д.}$$

Мы видим здесь некое диалектическое порождение понятий, которое ведет все дальше и дальше, причем оно свободно от какого-либо произвола, остается необходимым и последовательным в себе.

Для точечных множеств первого рода, как это следует из самого их понятия, имеем

$$P^{(\infty)} \equiv O.$$

Замечательно то, что можно доказать и обратное: всякое точечное множество, для которого выполняется это равенство, является множеством первого рода. Следовательно, множества первого рода *полностью характеризуются* этим равенством.

Легко построить пример точечного множества второго рода, для которого $P^{(\infty)}$ состоит из одной точки p. Если в интервалах, следующих друг за другом, примыкающих друг к другу, становящихся бесконечно малыми и сходящимися к точке p, взять точечные множества первого рода, порядковые числа которых неограниченно возрастают при приближении соответствующего интервала к p, то они, взятые вместе, дают такой пример, который одновременно является ответом на вопрос, поставленный в № 1 [I.5.1]: всегда ли точечному множеству второго рода должен соответствовать некий интервал, в котором оно всюду плотно? Из этого примера мы видим, что это *совсем* не обязательно.

Столь же легко строятся точечные множества второго рода, для которых $P^{(\infty+n)}$, или $P^{(2\infty)}$, или вообще

$$P^{(n_0\infty^{\nu}+n_1\infty^{\nu-1}+\ldots+n_\nu)}$$

состоит из заданной точки p.

Все эти множества нигде не плотны *ни в каком* интервале и, кроме того, принадлежат первому классу; в этих двух отношениях они совпадают с точечными множествами первого рода.

[Примечание]

Настоящая работа, публиковавшаяся в нескольких томах «Annalen» за 1879—1884 гг., по своим результатам выходит далеко за пределы, обозначенные ее названием, и фактически включает все результаты, полученные Кантором как в области абстрактного, так и прикладного учения о множествах, в частности теорию эквивалентности и мощности, а также вполне упорядоченность и порядковые числа. В ней более подробно изложена также канторовская теория иррациональных чисел (№ 5, § 9), а также философская полемика с противниками актуально бесконечного (в том же № 5, § 4 и след.), которая позднее была продолжена в II.1—II.3 [6].

5.3. О БЕСКОНЕЧНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ТОЧЕЧНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ *

В двух предшествующих статьях 5.1 и 5.2 мы строго придерживались темы, обозначенной в названии работы, и занимались исключительно *линейными* точечными множествами, т. е. многообразиями точек, принадлежащих непрерывной прямой линии и заданных по некоторому закону. Я намеренно ограничивал пока изложение этими пределами, поскольку — принимая во внимание результаты, полученные мною в работе «К учению о многообразиях» (журнал Крелле, т. 84, с. 242) [I.3], в соответствии с которыми плоские, пространственные и вообще n-кратно протяженные образы могут быть поставлены в однозначное соответствие с линейными множествами,— с самого начала можно будет принять, что бо́льшую часть свойств линейных точечных множеств и соотношений между ними удастся доказать путем соответствующих модификаций и для точечных множеств, содержащихся в плоских, пространственных или n-мерных непрерывных областях. Но это обобщение я должен теперь более отчетливо выдвинуть на передний план, так как оно не только интересно само по себе, но и приводит к новой точке зрения в познании области линейных точечных множеств.

Начну с того, что рассмотренные до сих пор понятия *производных множеств* различных порядков,— причем последние определяются не

* Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten. N 3.— Math. Ann., 1882, Bd. 20, S. 113—121. Перевод Ф. А. Медведева.

только при помощи конечных целых чисел, но и в зависимости от обстоятельств их приходится характеризовать некоторыми четко определенными символами бесконечного,— без труда распространяются на точечные множества в непрерывных n-мерных областях. И здесь понятие производного множества опирается на понятие *предельной точки* заданного точечного множества P, которая определяется тем, что в любой сколь угодно малой ее окрестности содержатся точки множества P, отличные от нее, причем безразлично, принадлежит ли эта предельная точка множеству P или нет. Теорема о том, что всякое точечное множество из расположенной в конечном n-кратно протяженной непрерывной области, состоящее из бесконечно многих точек, обладает *по крайней мере одной* предельной точкой, была впервые высказана, доказана и широчайшим образом применена в теории функций К. Вейерштрассом [7].

Совокупность всех предельных точек множества P образует вообще отличное от P точечное множество P', которое я называю *первым производным множеством* множества P. Отсюда путем итерации этого образования понятий в виде конечной или даже *бесконечной* последовательности получается в определенном смысле необходимая диалектика понятий производных высших порядков. При этом наступает то легко обосновываемое явление, что всякое производное множество, за исключением первого, всегда содержится как составная часть в предшествующем, включая первое производное P', тогда как первоначально заданное множество P содержит вообще совсем иные точки, чем его производные множества. Равным образом, понятие *всюду плотного множества*, которое ранее мы рассматривали только для линейных точечных множеств, без труда переносится на множества более высоких размерностей; а именно содержащееся в непрерывной n-мерной области A точечное множество P будет называться *всюду плотным в области a*, где a — непрерывная подобласть области A, если всякая подобласть a' из a, имеющая такое же, как и a, число измерений, содержит внутри себя точки множества P.

Первое производное P' (а также все следующие) точечного множества P, всюду плотного в некоторой непрерывной области a, содержит саму эту непрерывную область a со всеми точками границы последней, и, наоборот, это свойство точечного множества P может быть принято за исходный пункт определения его всюду плотности в области a.

Понятие мощности, которое включает в себя в качестве частного случая понятие целого числа — этого фундамента учения о величинах — и которое следует рассматривать как поистине самый общий признак многообразий, тоже столь мало относится к линейным точечным множествам, что его, скорее, можно рассматривать как атрибут всякого *вполне определенного* многообразия, каковы бы ни были по своим свойствам его элементы.

Многообразие (совокупность, множество) элементов, принадлежащих любой сфере понятий, я называю *вполне определенным*, если на основе его определения и вследствие логического принципа исключенного третьего становится возможным рассматривать *внутренне определенным* как *то*, является или не является его элементом любой объект из этой

сферы понятий, *так и то*, равны или нет друг другу два принадлежащих множеству объекта, несмотря на формальные различия в способах их задания.

Вообще с помощью имеющихся в нашем распоряжении способностей и методов соответствующие решения достоверно и точно в действительности недостижимы; но здесь совсем речь не об этом, а *лишь* о *внутреннем определении*, которое в конкретных случаях, в зависимости от целей, приводится к некоторому *актуальному* (*внешнему*) *определению* через усовершенствование вспомогательных средств.

Для пояснения напомню определение множества всех алгебраических чисел, которое несомненно можно понимать так, что вместе с ним дано и внутреннее определение, позволяющее решить, принадлежит ли к алгебраическим числам произвольно заданное число или нет. Тем не менее, как известно, проблема фактического осуществления этого решения для заданного числа η относится к труднейшим проблемам; таков, например, все еще остающийся открытым и чрезвычайно интересный вопрос о том, является ли число π, выражающее отношение длины окружности к диаметру, алгебраическим или, что в высшей степени вероятно, трансцендентным числом [1]. Для основания системы натуральных логарифмов e эта задача впервые была решена восемь лет тому назад Ш. Эрмитом в достойной восхищения работе «Sur la fonction exponentielle». Paris, 1874 [8]. В ней показано, что число e не удовлетворяет как корень никакому алгебраическому уравнению с целочисленными рациональными коэффициентами.

Если приходится иметь дело с геометрическим многообразием, элементами которого могут быть не только точки, но и линии, поверхности или тела, то и здесь, когда это многообразие является *вполне определенным*, тотчас же возникает вопрос о его мощности и о том, будет ли последняя *равна* некоторой мощности, соответствующей точечным множествам, или же она будет *больше* всех таких мощностей.

Что касается, в частности, *точечных множеств*, содержащихся в n-мерных непрерывных областях, то я строго показал (журнал Крелле, т. 84, с. 242) [I.3], что их мощности совпадают с мощностями линейных точечных множеств. А именно этот факт можно рассматривать как простое следствие доказанной там теоремы, согласно которой n-кратно протяженный непрерывный образ можно поставить во взаимно однозначное соответствие с одномерной непрерывной областью, т. е. с *прямолинейным континуумом*. Тем самым вопрос о различных мощностях *точечных множеств* можно, не ограничивая общности, исследовать для *линейных* множеств, как я и подчеркнул в заключении только что указанной работы.

Выражение «мощность» я заимствовал у Я. Штейнера[1], который употреблял его в совершенно частном, но все же родственном смысле — чтобы выразить, что два образа при помощи *проективного соответствия*

---

[1] См. его «Vorlesungen über synthetische Geometrie der Kegelschnitte», изданные Шрётером, § 2 [9].

можно сопоставить друг с другом так, что каждому элементу одного соответствует один и только один элемент другого. Хотя в рассматриваемом нами абсолютном понятии мощности взаимная однозначность соответствия сохраняется, однако на закон соответствия не накладывается никакого ограничения, а именно никакого ограничения в отношении непрерывности или разрывности; так что два множества обладают *одинаковой мощностью* тогда, но и только тогда, когда они могут быть поставлены во взаимно однозначное соответствие по какому-либо закону. Если оба множества являются *вполне определенными*, то вопрос о том, имеют ли они равные мощности или нет, следует рассматривать как *внутренне определенный*; однако *фактическое решение* этого вопроса в конкретных случаях часто принадлежит к числу наиболее трудных задач. Так, лишь после многих безуспешных попыток в течение восьми лет мне с помощью теоремы, которую я доказал как в журнале Крелле, т. 77, с. 260 [здесь I.2], так и в № 1 настоящего сочинения, удалось установить, что линейный континуум имеет мощность, *не* равную мощности последовательности натуральных чисел.

Учение о многообразиях в его лишь отчасти развитом здесь понимании включает в себя,— если мы ограничимся одной математикой, а остальные сферы понятий оставим пока в стороне,— области арифметики, теории функций и геометрии; оно на основе понятия мощности объединяет их в некоторое высшее единство. *Непрерывное* и *разрывное* рассматриваются, таким образом, с одной и той же точки зрения и измеряются одинаковой мерой.

Наименьшая мощность, которая вообще может встретиться у бесконечных, т. е. состоящих из бесконечно многих элементов, множеств,— это мощность множества последовательности целых положительных рациональных чисел. Я назвал многообразия этого класса *перечислимыми в бесконечности множествами* или, короче и проще, *счетными множествами.* Они характеризуются тем, что их можно представить (многими способами) в форме закономерной просто бесконечной последовательности

$$E_1, E_2, \ldots, E_\nu, \ldots,$$

так что каждый элемент множества находится на определенном месте этой последовательности, а сама эта последовательность не содержит никаких других членов, помимо элементов заданного множества.

Всякая бесконечная составная часть счетного множества опять-таки образует бесконечное счетное множество.

Если имеется конечное или счетно бесконечное множество множеств (E), (E'), (E''), ..., каждое из которых в свою очередь счетно, то и множество, получаемое из объединения всех элементов множеств (E), (E'), (E''), ..., является счетным.

Эти две простые и легко доказуемые теоремы образуют основу доказательства счетности. Так, из них сразу же вытекает, что все множества, задаваемые в форме n-кратно бесконечной последовательности с общим членом $E_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n}$ (где $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ независимо друг от друга могут принимать все целочисленные положительные значения), можно предста-

вить в форме просто бесконечной последовательности. Да и множества, общий член которых имеет вид

$$E_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\mu},$$

где теперь и μ может получать все целые положительные значения, тоже принадлежат этому классу. Особенно удивительным случаем последнего рода является совокупность всех алгебраических чисел (журнал Крелле, т. 77, с. 258) [I.2]. Таким образом, арифметика и алгебра доставляют неисчерпаемый запас примеров счетности; не менее богата в этом отношении и геометрия. Представление о последнем дает следующая теорема, допускающая многочисленные красивые применения в теории чисел и в теории функций.

Теорема. Пусть в n-мерном непрерывном пространстве A, всюду простирающемся в бесконечность, определено бесконечное число n-мерных непрерывных[2] частичных областей a, отделенных друг от друга и самое большее соприкасающихся их границами. *Многообразие* (a) *таких частичных областей всегда счетно.*

Следует подчеркнуть, что здесь не делается никаких предположений о способе разбиения и величине объема областей a; они могут бесконечно близко примыкать любой малостью их протяженности ко всякой не принадлежащей им точке из A. Теорема не имеет исключений, если только всякая частичная область a (все a по предположению n-мерные) имеет определенный (произвольно малый) объем и различные a совпадают самое большее их границами.

Доказательство этой теоремы можно провести так. n-Мерное бесконечное пространство A при помощи обратных радиус-векторов отображается на n-кратно протяженный образ B, заключенный в $(n+1)$-мерном бесконечном пространстве A' и определяемый тем, что его точки имеют постоянное расстояние 1 от некоторой фиксированной точки пространства A'. (В случае $n=1$ — это единичная окружность, а в случае $n=2$ — единичная сфера.) Всякой n-мерной частичной области a соответствует некоторая n-мерная частичная область b из B с определенным объемом. Если теперь можно доказать счетность множества (b), то вследствие взаимно однозначного соответствия отсюда следует и счетность множества (a).

Множество же (b) счетно потому, что число областей b, объемы которых больше произвольно заданного числа γ, необходимо конечно, ибо их сумма меньше числа $2^n\pi$ [2], т. е. меньше объема образа B, в котором содержатся все b. Отсюда следует, что области b по величине их объемов можно так расположить в просто бесконечную последовательность, что меньшие следуют за большими и в конце концов становятся в этой последовательности бесконечно малыми.

---

[2] У каждого непрерывного образа точки его границы рассматриваются как принадлежащие ему [имеются в виду «замкнутые» образы, содержащие все свои предельные точки].

Случай $n=1$ дает следующую теорему, существенную для дальнейшего построения теории линейных точечных множеств: *всякая совокупность отделенных интервалов* $(\alpha \ldots \beta)$, *самое большее совпадающих их концами, которые определены на бесконечной прямой линии, необходимо является счетной совокупностью.* То же самое справедливо, следовательно, и для множества концевых точек α и β, но не всегда верно для производного множества последнего.

Случай $n=2$, указывающий на счетность всякой совокупности разделенных и самое большее соприкасающихся своими границами частей плоскости в бесконечной области, полезен, по-видимому, в теории функций комплексных величин. Замечу, что эту теорему нетрудно распространить и на совокупность разделенных частей плоскости, определенных в некоторой области, покрывающей плоскость m раз и даже бесконечное число раз.

Что касается счетных *точечных множеств*, то с ними связано одно удивительное явление, которое я мог бы охарактеризовать так. Рассмотрим какое-либо точечное множество (M), *всюду плотное* в некоторой непрерывной и связной n-мерной области A и обладающее свойством счетности, так что принадлежащие (M) точки можно представить в виде последовательности

$$M_1, M_2, \ldots, M_\nu, \ldots$$

Примером служит множество всех тех точек нашего трехмерного пространства, все три координаты которых x, y, z в прямоугольной системе координат являются *алгебраическими* числами. Если мы вообразим, что из области A удалено это счетное множество (M), и оставшуюся часть обозначим через U, то имеет место странная теорема, что при $n \geqslant 2$ область *не перестает* быть *непрерывно связной*, что, другими словами, любые две точки N и N' области U всегда можно соединить непрерывной линией, всеми своими точками принадлежащей области U, причем на ней не располагается ни одной точки множества (M).

Эту теорему достаточно доказать для случая $n=2$. Ее доказательство существенно опирается на доказанную в № 1 теорему, что если предложена какая-либо закономерная последовательность действительных величин

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots$$

(среди которых могут встречаться и равные, что, очевидно, не изменяет существа теоремы), то в любом сколь угодно малом интервале $(\alpha \ldots \beta)$ можно найти действительную величину η, не входящую в эту последовательность.

В самом деле, пусть A — какой-либо связный непрерывный кусок бесконечной плоскости. Берем в A всюду плотно счетное множество точек (M) и пусть N и N' — какие-либо две точки области A, не принадлежащие множеству (M), которые мы соединим друг с другом непрерывной линией l, проходящей в A, не беспокоясь пока о точках множества (M). Нужно показать, что линию l можно заменить другой непрерывной линией l', тоже соединяющей точки N и N' друг с другом и проходящей

во внутренности области A, однако уже не содержащей ни одной точки множества (M).

Вообще на l будет расположено бесконечно много точек множества (M); они, во всяком случае, образуют некую составную часть множества (M), а значит, тоже *счетное* множество.

Следовательно, по только что упомянутой арифметической теореме во всяком сколь угодно малом интервале линии l имеются точки, не принадлежащие множеству (M). Из этих точек линии l мы возьмем конечное число таких точек $N_1, N_2, \ldots, N_k$, что прямолинейные отрезки $NN_1, N_1N_2, \ldots, N_kN'$ полностью расположены внутри A. Но теперь эти отрезки всюду можно заменить дугами окружностей с теми же концевыми точками, которые тоже проходят внутри A и не содержат ни одной точки множества (M). Совокупность последних образует непрерывную линию l' с охарактеризованным выше свойством.

Этот факт достаточно будет доказать для одного отрезка, за который мы возьмем первый отрезок NN_1.

Окружности, проведенные через точки N и N_1, образуют однократно бесконечную совокупность, и их центры расположены на определенной прямой g. Положение такого центра будем определять расстоянием u от некоторой фиксированной точки 0 ориентированной прямой g. Тогда величине u во всяком случае можно так сопоставить некоторый интервал $(\alpha \ldots \beta)$ в качестве области ее изменения, что для всякой окружности, соответствующей такому значению u, одна из дуг окружностей, соединяющих точки N и N_1, полностью расположена внутри области A.

Центры тех окружностей нашей совокупности окружностей, которые проходят через точки

$$M_1, M_2, \ldots, M_\nu, \ldots$$

множества (M), образуют на прямой g счетное точечное множество

$$P_1, P_2, \ldots, P_\nu, \ldots;$$

пусть соответствующими им значениями u будут

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots$$

Тогда в интервале $(\alpha \ldots \beta)$ выбираем число η, не равное ни одному ω_ν (что по указанной теореме всегда возможно). Полагая

$$u = \eta,$$

получаем окружность совокупности, на которой не лежит ни одной точки множества (M) и которая ввиду $\alpha < \eta < \beta$ дает одну из дуг окружности, соединяющую N с N_1 и обладающую требуемым свойством.

Таким образом, показано, что любые две точки N и N' области U, получаемой после удаления из области A всюду плотного счетного точечного множества (M), можно соединить непрерывной линией l', которая состоит из конечного числа дуг окружности и всеми своими точками принадлежит области U, т. е. не содержит ни одной точки множества (M). Впрочем, при помощи того же самого вспомогательного средства можно было бы установить связь между точками N и N' и посредством непре-

рывной линии, заданной единым аналитическим законом и полностью содержащейся в U.

С этими теоремами связаны соображения о свойстве трехмерного пространства реального мира, берущемся за основу понятийного описания и объяснения происходящих в нем явлений. Как известно, это пространство — вследствие ли встречающихся в нем форм или же из-за совершающихся в нем движений — считается всюду непрерывным. По современным независимым друг от друга исследованиям Дедекинда (см. «Stetigkeit und irrationale Zahlen» von R. Dedekind. Braunschweig, 1872) [[10]] и автора (Math. Ann., 1872, Bd. 5, S. 127 und 128) [I.1] последняя посылка состоит не в чем ином, как в том, что всякая точка, координаты которой x, y, z в какой-либо прямоугольной системе координат задаются *произвольными* рациональными или иррациональными числами, *произвольно* рассматривается как *действительно принадлежащая пространству*, к чему вообще не имеется никакого внутреннего повода и что поэтому должно рассматриваться как свободный акт нашей мыслительной конструктивной способности. Следовательно, *гипотеза непрерывности пространства* есть не что иное, как произвольное само по себе предположение о полном взаимно однозначном соответствии между трехмерным *чисто арифметическим континуумом* (x, y, z) и пространством, лежащим в основе мира явлений [3].

Но очень вероятно, что столь же легко можно отвлечься от отдельных точек пространства, даже если они расположены в нем всюду плотно, и образовать понятие *разрывного* трехмерного пространства с указанным выше характеристическим свойством. Тогда на возникающий вопрос о том, можно ли представить *непрерывное движение* в таком *разрывном* пространстве, следует ответить *утвердительно*, так как мы показали, что любые две точки образа U можно соединить бесчисленно многими непрерывными совершенно регулярными линиями. Следовательно, удивительным образом оказывается, что из одного только факта непрерывного движения еще нельзя сделать никакого заключения о фактической непрерывности подлежащих объяснению явлений движения. Поэтому целесообразно попытаться построить модифицированную механику, пригодную для пространств со свойством пространства U, чтобы из следствий такого рода исследования и сравнения их с фактами получить по возможности действительные опорные пункты для гипотезы обычной непрерывности понятия пространства, кладущейся в основу опыта [[12]].

[3] Я считаю здесь известным, что возможна общая арифметическая теория величин, т. е. совершенно не зависящая от каких-либо наглядных основных геометрических предложений, и что она в своей основе уже построена. В этой связи, помимо уже указанных, разумеется очень кратких, сочинений Дедекинда и моего, назову замечательную работу господина Липшица «Grundlagen der Analysis». Bonn, 1877 [[11]]. Большая часть принципиальных трудностей, которые встречаются в математике, состоит, как мне кажется, в том, что не осознается возможность чисто арифметической теории величин и учения о многообразиях. Именно к этому сводятся ошибки тех авторов, которые рассматривают *бесконечно малые* как *величины*, а не как *способ* изменения величин. С точки зрения чистого *арифметического анализа* бесконечно малые величины *не существуют*, а имеются лишь переменные величины, *становящиеся* бесконечно малыми.

[Примечания]

[1] Трансцендентность числа π впервые была доказана Ф. Линдеманом (Math. Ann., 1882, Bd. 20, S. 213) [13].

[2] Точную формулу для объема рассматриваемого $(n-1)$-мерного образа Кантор позднее (Math. Ann., 1883, Bd. 21, S. 58) дал в виде

$$\frac{2\pi^{(n+1)/2}}{\Gamma((n+1)/2)} \leqslant 2^n\pi \text{ при } n \geqslant 2 \text{ [14]}.$$

5.4. О БЕСКОНЕЧНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ТОЧЕЧНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ *

Теперь в добавление к предшествующим соображениям нужно установить и доказать различные теоремы, которые и интересны сами по себе, и нужны в теории функций. При этом мы будем пользоваться следующими обозначениями.

Если имеется несколько попарно не связанных точечных множеств P_1, P_2, P_3, ... и P — множество, получающееся из их объединения, то вместо использованной записи [см. I.5.2.] удобнее выбрать обозначение

$$P \equiv P_1 + P_2 + P_3 + \ldots$$

Если же Q — множество, содержащееся в P, а R — то множество, которое получается после удаления Q из P, то в согласии с предыдущим будем писать

$$R \equiv P - Q.$$

Точечное множество Q, которое мы мыслим расположенным в n-мерном непрерывном пространстве, может обладать тем свойством, что *никакая* принадлежащая ему точка не является одновременно его предельной точкой; такое множество, для которого, следовательно,

$$\mathfrak{D}(Q, Q') \equiv 0,$$

мы назовем *изолированным* точечным множеством. Если имеется *любое* точечное множество P, то из него получается *изолированное* множество Q тем, что из P удаляется множество $\mathfrak{D}(P, P')$.

Здесь, следовательно,

$$Q \equiv P - \mathfrak{D}(P, P'),$$

а значит,

$$P \equiv Q + \mathfrak{D}(P, P').$$

Поэтому всякое точечное множество можно составить из некоторого изолированного множества Q и некоторого другого множества R, являю-

* Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten. N 4.— Math. Ann., 1883, Bd. 21, S. 51—58. Перевод Ф. А. Медведева.

щегося делителем производного множества P'. Если мы, далее, заметим — это уже отмечалось,— что всякое производное множество более высокого порядка множества P содержится в предшествующем производном, то отсюда получаем, что множества

$$P'-P'',\ P''-P''',\ \ldots,\ P^{(\nu)}-P^{(\nu+1)},\ \ldots$$

являются *изолированными*.

Но имеют место и следующие разложения:

$$P' \equiv (P'-P'') + (P''-P''') + \ldots + (P^{(n-1)}-P^{(n)}) + P^{(n)}$$

и

$$P' \equiv (P'-P'') + (P''-P''') + \ldots + (P^{(\nu-1)}-P^{(\nu)}) + \ldots + P^{(\infty)},$$

важные для последующего.

Для изолированных точечных множеств справедливо такое предложение:

Теорема I. *Всякое изолированное точечное множество счетно, а значит, принадлежит первому классу.*

Доказательство. Пусть Q — какое-либо изолированное точечное множество, расположенное в n-мерном пространстве, q — какая-либо его точка, а q', q'', q''', ... — остальные точки множества Q.

Расстояния $\overline{qq'}$, $\overline{qq''}$, $\overline{qq'''}$, ... имеют нижнюю границу, которая будет обозначаться через ρ.

Аналогично пусть ρ' — нижняя граница расстояний $\overline{q'q}$, $\overline{q'q''}$, $\overline{q'q'''}$, ..., ρ'' — нижняя граница расстояний $\overline{q''q}$, $\overline{q''q'}$, $\overline{q''q'''}$ и т. д.

Все эти величины ρ, ρ', ρ'', ... *отличны от нуля*, так как Q является *изолированным* множеством. Из q как центра опишем тот $(n-1)$-мерный образ, точки которого отстоят от q на расстоянии $\rho/2$; этот образ ограничивает n-мерный шар, который мы обозначим через K. Совершенно так же из q' как центра опишем соответствующий шар K' радиуса $\rho'/2$, из q'' как центра — шар K'' радиуса $\rho''/2$ и т. д.

Теперь существенно то, что любые два из этих шаров, например K и K', могут самое большее касаться, но полностью расположены вне друг друга. Это связано с тем, что, как следует из определения величин ρ и ρ', обе они меньше или равны $\overline{qq'}$, а потому радиусы $\rho/2$, $\rho'/2$ обоих шаров K и K' не больше половины отрезка $\overline{qq'}$, соединяющего их центры.

Тем самым шары K, K', ... образуют совокупность расположенных вне друг друга n-мерных частичных областей основного n-мерного пространства. Но такая совокупность, как уже было доказано [см. I.5.3], всегда *счетна*. Следовательно, и центры q, q', q'', ... образуют счетное множество, т. е. Q счетно.

Теперь мы в состоянии доказать следующие предложения.

Теорема II. *Если производное P' точечного множества P счетно, то счетно и P.*

Доказательство. Обозначим наибольший общий делитель множеств P и P' через R, так что

$$R \equiv \mathfrak{D}(P, P'),$$

и положим

$$P - R \equiv Q.$$

Тогда Q, как мы видели, является изолированным множеством, а значит, оно счетно по теореме I.

Множество R счетно потому, что оно является составной частью множества P', счетного по предположению. Объединение же двух счетных множеств всегда счетное множество, а поэтому $P \equiv Q + R$ счетно.

Теорема III. *Всякое точечное множество первого рода и n-го вида счетно.*

1-е доказательство. Для точечных множеств 0-го вида теорема ясна, так как такие множества, очевидно, являются *изолированными.* Мы теперь намереваемся применить полную индукцию, полагая теорему справедливой для точечных множеств 0-, 1-, 2-го, ..., $(n-1)$-го видов и намереваясь доказать при этом предположении, что она верна и для точечных множеств n-го вида.

Если P есть множество n-го вида, то P' есть множество $(n-1)$-го вида. Следовательно, P' счетно по предположению, а значит, P' счетно по теореме II.

2-е доказательство. Если P является точечным множеством n-го вида, то $P^{(n)}$ есть множество 0-го вида, а значит, является изолированным множеством. Теперь имеем

$$P' \equiv (P' - P'') + (P'' - P''') + \ldots + (P^{(n-1)} - P^{(n)}) + P^{(n)}.$$

Здесь все составные части справа, т. е. $(P' - P'')$, $(P'' - P''')$, ..., $(P^{(n-1)} - P^{(n)})$ и $P^{(n)}$ являются изолированными множествами, а значит, все они по теореме I счетны, поэтому и возникающее из их объединения множество P' тоже счетно, а потому по теореме II счетно и P.

Теорема IV. *Всякое точечное множество P второго рода, для которого $P^{(\infty)}$ счетно, само является счетным.*

Доказательство этой теоремы получается из разложения

$$P' \equiv (P' - P'') + \ldots + (P^{(\nu-1)} - P^{(\nu)}) + \ldots + P^{(\infty)}.$$

А именно поскольку все составные части правой стороны счетны, а число этих составных частей счетно бесконечно, то отсюда следует счетность P', а по теореме II и счетность P.

Если теперь под α понимать какой-либо из символов бесконечности, введенных в Bd. 17, S. 357 [см. I.5.2], то имеем такое общее предложение:

Теорема V. *Всякое точечное множество P второго рода, для которого $P^{(\alpha)}$ счетно, само является счетным.*

Доказательство этого предложения проводится с помощью полной индукции так же, как и доказательство теорем III и IV.

Последние теоремы можно сформулировать и так:

Если P не является счетным множеством, то и $P^{(\alpha)}$ не является счетным множеством независимо от того, будет ли α конечным числом или же одним из символов бесконечности.

В исследованиях господ Дюбуа-Реймона и Гарнака о некоторых обобщениях теорем интегрального исчисления применялись точечные множества, обладающие тем свойством, что их можно заключить в конечное число интервалов *таким образом, что сумма всех этих интервалов меньше произвольной заданной величины* [15].

Для того чтобы линейное точечное множество обладало сформулированным выше свойством, необходимо, очевидно, чтобы оно не было всюду плотным ни в каком сколь угодно малом интервале. Однако это последнее условие, по-видимому, недостаточно, чтобы точечное множество обладало упомянутым свойством. Напротив, мы в состоянии доказать следующее предложение:

Теорема VI. *Если содержащееся в интервале (a, b) линейное точечное множество P обладает тем свойством, что его производное P' счетно, то P всегда можно заключить в конечное число интервалов с произвольно малой суммой длин.*

В нижеследующем доказательстве будут использованы теоремы, первая из которых выражает известное свойство непрерывных функций, а две другие известны из наших предшествующих соображений.

Лемма I. Непрерывная функция $\varphi(x)$ непрерывного переменного x, заданная на интервале (c, d) и имеющая в концах интервала неравные значения $\varphi(c)$ и $\varphi(d)$, по крайней мере один раз принимает значение y, расположенное между $\varphi(c)$ и $\varphi(d)$.

Лемма II. Бесконечное число интервалов, расположенных на бесконечной прямой, лежащих вне друг друга и соприкасающихся самое большее их концами, является самое большее счетным.

Лемма III. Если имеется счетно бесконечное число величин

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots,$$

то во всяком заданном интервале можно найти величину η, не содержащуюся среди этих величин [см. I.5.1, а также I.2].

Доказательство теоремы VI. Интервал, в котором расположено P, мы для простоты возьмем таким, что $a=0$, $b=1$, к чему общий случай сводится простым преобразованием. Следовательно, P расположено в интервале $(0, 1)$; то же самое, очевидно, справедливо для P' и того множества, которое получается из объединения точек множеств P и P' и которое мы обозначим через Q.

Итак,

$$Q \equiv \mathfrak{M}(P, P').$$

Обозначим, далее, через R то точечное множество в интервале $(0, 1)$, которое остается в последнем после удаления множества Q, так что

$$(0, 1) \equiv Q + R. \qquad (1)$$

С предположенной счетностью множества P' связано прежде всего то, что:

1. По теореме II счетно и P, *а потому счетно также* Q.

2. Множество P, а значит, и P' нигде неплотны *ни в каком интервале*. Действительно, если бы P было всюду плотно в интервале (i, k), то все точки последнего принадлежали бы P' и P' не могло бы быть счетным согласно лемме III. *Поэтому и Q не является всюду плотным ни в каком интервале.* Пусть значениями координат, соответствующих точкам счетного множества Q, будут

$$u_1, u_2, \ldots, u_\nu, \ldots \qquad (2)$$

Если теперь мы рассмотрим множество R, то легко можно показать, что значения координат, соответствующих его точкам, совпадают со всеми *внутренними* значениями некоторой бесконечной последовательности интервалов

$$(c_1, d_1), (c_2, d_2), \ldots, (c_\nu, d_\nu), \ldots, \qquad (3)$$

расположенных вне друг друга и, естественно, содержащихся в интервале $(0, 1)$. Поскольку же к точкам множества R принадлежат только *внутренние* значения этих интервалов, то из соотношения (1) следует, что концы c_ν, d_ν этих интервалов соответствуют точкам множества Q, а значит, содержатся в последовательности (2).

В самом деле, пусть r — точка из R. Тогда точки множества Q не могут подходить бесконечно близко к r, так как в противном случае r была бы предельной точкой множества P, а значит, принадлежала бы Q. Поэтому слева от r должна находиться точка c, а справа — точка d, такие, что внутри интервала (c, d) не имеется ни одной точки множества Q; напротив, если c и d не являются изолированными точками множества Q, то вне этого интервала имеются точки из Q, расположенные сколь угодно близко от c и d. А так как каждая предельная точка множества Q принадлежит Q, то в последнем случае сами точки c и d принадлежат Q. Очевидно, что бесконечно многие интервалы (c, d), получаемые таким образом, расположены вне друг друга, а потому по лемме II они образуют счетное множество (3), что и требовалось доказать.

Поскольку мы предположили $c_\nu < d_\nu$, то величина интервала (c_ν, d_ν) равна

$$d_\nu - c_\nu.$$

Сумму всех этих величин интервалов мы хотим обозначить через σ, так что

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (d_\nu - c_\nu) = \sigma. \qquad (4)$$

Прежде всего ясно, что $\sigma \leqslant 1$, так как все интервалы расположены вне друг друга и содержатся в интервале $(0, 1)$. Если бы нам теперь удалось показать, что $\sigma = 1$, а значит, исключить возможность $\sigma < 1$, то, как показывает в высшей степени простое соображение, связанное с характером интервала (c_ν, d_ν) [1], теорема была бы доказана.

Следовательно, наше доказательство подошло к тому, чтобы показать, что предположение $\sigma < 1$ приводит к противоречию.

Для этой цели мы определим на $0<x\leqslant 1$ функцию $f(x)$ следующим образом: суммируем величины всех интервалов (c_ν, d_ν), как только последние попадают внутрь интервала $(0, x)$, и полагаем эту сумму $=f(x)$. (При этом для интервала (c_ν, d_ν), который частично расположен вне $(0, x)$, в эту сумму будет включаться лишь та его часть, которая попадает во внутренность интервала $(0, x)$.)

Очевидно, имеем

$$f(1)=\sigma.$$

Если, кроме того, положить $f(0)=0$, то легко получаем, что $f(x)$ является непрерывной функцией от x.

А именно из определения $f(x)$ непосредственно следует, что если x и $x+h$ — два различных значения из интервала $(0, 1)$, то для положительного h имеем

$$0<f(x+h)-f(x)\leqslant h,$$

откуда и получается непрерывность $f(x)$.

Если мы возвратимся к определению $f(x)$, то тотчас же замечаем, что *когда x и $x+h$ являются двумя различными значениями из одного и того же частичного интервала* (c_ν, d_ν), *то*

$$f(x+h)-f(x)=h,$$

а значит,

$$(x+h)-f(x+h)=x-f(x).$$

Поэтому если мы введем функцию

$$\varphi(x)=x-f(x),$$

то и $\varphi(x)$ будет *непрерывной* функцией от x, которая при возрастании x от 0 до 1 изменяется от 0 до $1-\sigma$, не убывая. *Это изменение происходит так, что внутри частичного интервала* (c_ν, d_ν) *непрерывная функция* $\varphi(x)$ *имеет постоянное значение.*

Отсюда у функции $\varphi(x)$ получаем ту особенность, что *все принимаемые ею значения исчерпываются последовательностью значений*

$$\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots, \varphi(u_\nu), \ldots \qquad (5)$$

Действительно, или x равен одному из значений u_ν, и в этом случае имеем

$$\varphi(x)=\varphi(u_\nu);$$

или же x является значением внутри интервала (c_ν, d_ν), в этом случае ввиду постоянства $\varphi(x)$ внутри такого интервала имеем

$$\varphi(x)=\varphi(c_\nu)=\varphi(d_\nu).$$

Но, как мы видели выше, значения c_ν и d_ν тоже принадлежат последовательности (2), например

$$c_\nu=u_\lambda.$$

Значит, и в этом случае имеем

$$\varphi(x)=\varphi(u_\lambda).$$

Поэтому в последовательности (5) содержатся все значения, которые вообще может принимать $\varphi(x)$. Тем самым множество значений, которое может принимать непрерывная функция $\varphi(x)$, является счетным.

Если бы теперь было $\sigma<1$, а значит, разность $1-\sigma$ была бы отличной от нуля, то по лемме I непрерывная функция $\varphi(x)$ принимала бы каждое значение между 0 и $1-\sigma$ по крайней мере один раз. Значит, в последовательности (5), которая, как мы только что показали, исчерпывает все принимаемые функцией $\varphi(x)$ значения, содержались бы все числа интервала $(0, 1-\sigma)$, что противоречит лемме III. Тем самым остается лишь предположить $\sigma=1$, что и требовалось доказать.

[Примечание]

[1] Замечание, здесь лишь указанное Кантором, можно пояснить так.

Если сумма интервалов (4) действительно имеет значение $\sigma=1$, то для всякого $\varepsilon>0$ можно так выделить *конечную* частичную сумму σ_n n членов, что

$$\sum_{\nu=1}^{n} (d_\nu - c_\nu) > 1 - \frac{\varepsilon}{2},$$

и все множество Q разбивается на (самое большее) $n+1$ частей, содержащихся в промежутках между этими n интервалами, включая их концы. Эти $n+1$ промежуточных интервала Δ_n' можно затем удлинить так, что они станут содержать *внутри* себя все точки множества Q, причем их сумма отличается от $\sigma_n'=1-\sigma_n<\varepsilon/2$ менее чем на $\varepsilon/2$. Тогда точечное множество Q, а тем самым и P, содержится в этом конечном множестве удлиненных интервалов Δ_ν'', общая длина которых $\sigma_n''<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$. Следовательно, P действительно можно заключить в конечное множество интервалов со сколь угодно малой общей длиной.

5.5. ОСНОВЫ ОБЩЕГО УЧЕНИЯ О МНОГООБРАЗИЯХ. МАТЕМАТИЧЕСКИ-ФИЛОСОФСКИЙ ОПЫТ УЧЕНИЯ О БЕСКОНЕЧНОМ * [16]

Предисловие автора

Предлагаемое исследование появится в ближайшее время в «Mathematischen Annalen» как пятый номер работы, которая носит название «О бесконечных линейных точечных многообразиях» и четыре первых номера которой находятся в томах 15, 17, 20, 21 того же журнала [17]. Все эти работы связаны с двумя статьями, помещенными в томах 77 и 84 журнала Крелле [18]. В последних уже намечены в основных чертах те

---

* Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre: Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen. Leipzig: Teubner, 1883. Перевод П. С. Юшкевича.

главные точки зрения, которыми я руководствовался в учении о многообразиях. Так как предлагаемая работа во многих отношениях углубляет исследование вопроса и при этом по существу не зависит от предыдущих работ, то я решился выпустить ее в свет отдельным сочинением, снабдив ее более соответствующим ее содержанию названием.

Публикуя это сочинение, я не могу не упомянуть, что когда я писал его, то я имел в виду главным образом двоякого рода читателей: с одной стороны, философов, следивших за развитием математики вплоть до новейшего времени, а с другой — математиков, которые знакомы с важнейшими фактами древней и новой философии.

Я отлично знаю, что рассматриваемая мною тема во все времена была объектом самых различных мнений и толкований и что ни математики, ни философы не пришли здесь к полному согласию. Поэтому я очень далек от мысли, что могу сказать последнее слово в столь трудном, сложном и всеобъемлющем вопросе, как проблема бесконечности. Но так как многолетние занятия этой проблемой привели меня к определенным убеждениям и так как в дальнейшем ходе моих работ эти убеждения не поколебались, а лишь укрепились, то я счел своим долгом систематизировать их и опубликовать.

Могу только выразить пожелание, чтобы мне удалось при этом найти и выразить объективную истину, ради достижения которой я работал.

Галле, 1882 г.

§ 1

Изложение моих исследований в учении о многообразиях[1)] достигло того пункта, где дальнейшее развитие его становится зависимым от расширения понятия целого реального числа за существующие до сих пор границы. И оказывается, что расширение это совершается по такому направлению, в котором, насколько я знаю, никто до сих пор его не искал.

Это расширение понятия числа носит настолько принудительный характер, что без него мне вряд ли будет возможно свободно сделать хотя бы малейший шаг вперед в учении о множествах. Пусть в этом обстоятельстве увидят оправдание или, если необходимо, извинение тому, что я ввожу в мои соображения, казалось бы, чужеродные идеи. Ведь дело идет здесь о расширении или продолжении последовательности целых реальных чисел за бесконечное. Как это ни показалось бы смелым, но я не могу не высказать надежды, более того, твердого убеждения в том, что со временем это расширение должно будет рассматриваться как вполне простое, правомерное, естественное. При этом я нисколько не скрываю от себя, что, решаясь на это, я вступаю в известный конфликт с широко распространенными взглядами на математическую бесконечность и с часто встречающимися воззрениями на сущность числовой величины.

Что касается математической бесконечности, то поскольку она нашла правомерное применение в науке и способствовала успехам последней, она, как мне кажется, выступает прежде всего в значении некоторой

переменной, то растущей сверх всяких границ, то убывающей до произвольной малости, но всегда остающейся *конечной* величины. Такое бесконечное я называю *несобственно бесконечным.*

Но наряду с этим в новое и новейшее время как в геометрии, так особенно в теории функций образовался другой, столь же правомерный род понятия бесконечности. Так, например, при исследовании аналитической функции комплексной переменной величины стало необходимым и общеупотребительным воображать себе в плоскости, представляющей комплексную переменную, одну-единственную, лежащую в бесконечности, т. е. бесконечно удаленную, но определенную, точку и исследовать поведение функции вблизи этой точки, как вблизи любой другой точки. При этом оказывается, что поведение функции в окрестности бесконечно удаленной точки обнаруживает точно такие же явления, как и поведение ее в окрестности всякой другой, расположенной на конечном расстоянии точки. Отсюда следует полная правомерность того, чтобы мыслить в этом случае бесконечное как расположенное в некоторой вполне определенной точке.

Если бесконечное выступает в подобной вполне определенной форме, то я называю его *собственно бесконечным.*

Для понимания дальнейшего мы будем тщательно отличать друг от друга оба эти проявления, в которых выступала математическая бесконечность, причем в обеих этих формах она содействовала величайшим успехам в геометрии, в анализе и в математической физике.

В первой форме в качестве несобственно бесконечного она представляется как *переменное конечное.* В другой форме, в которой я называю ее собственно бесконечным, она выступает как вполне *определенное* бесконечное. Бесконечные реальные целые числа, которые я хочу определить в дальнейшем и к которым я пришел уже много лет тому назад, не сознавая ясно того, что в них мы имеем конкретные числа с реальным значением, не имеют ничего общего с первой из двух названных выше форм, с несобственно бесконечным,— наоборот, им присущ тот же характер определенности, какой мы встречаем в случае бесконечно удаленной точки в теории аналитических функций. Они, следовательно, относятся к формам и видам собственно бесконечного. Но в то время, как бесконечно удаленная точка комплексной числовой плоскости противостоит, одинокая, всем расположенным на конечных расстояниях точкам, мы получаем не просто одно-единственное бесконечное целое число, но бесконечную последовательность чисел, которые определенно отличимы друг от друга и находятся в закономерных теоретико-числовых отношениях друг к другу и к конечным целым числам. Правда, эти отношения не таковы, чтобы их можно было свести по существу к отношениям конечных чисел между собою. Разумеется, часто встречается и последнее явление, но также лишь в случае различных степеней и форм несобственно бесконечного, например, в случае бесконечно убывающих или бесконечно возрастающих функций переменной x, если порядки их обращения в бесконечность выражаются определенными конечными действительными числами. Действительно, подобные отношения можно рассмат-

ривать лишь как замаскированные отношения конечного или же как непосредственно сводимые к последним. Наоборот, законы, существующие между искомыми собственно бесконечными целыми числами, коренным образом отличны от царящих в области конечного зависимостей, причем, разумеется, не исключается возможность того, что сами конечные реальные числа могут получить новые определения с помощью определенно бесконечных чисел.

Оба принципа порождения, с помощью которых, как мы увидим, определяются новые определенно бесконечные числа, таковы, что благодаря их совместному действию может быть уничтожена всякая граница на пути образования понятия реальных целых чисел. Но, к счастью, им противополагается, как мы увидим, *третий* принцип, который я называю *принципом стеснения* или *ограничения* и благодаря которому на бесконечный процесс образования налагаются определенные последовательные границы, так что в абсолютно бесконечной последовательности реальных целых чисел мы получаем естественные отрезки, называемые *числовыми классами*.

Первый числовой класс (I) — это множество конечных целых чисел 1, 2, 3, ..., ν, ...; за ним следует второй числовой класс (II), состоящий из определенных бесконечных целых чисел, следующих друг за другом в определенной последовательности. Лишь после того как определен второй числовой класс, мы получаем третий, четвертый и т. д. классы.

Введение новых целых чисел имеет, как мне кажется, величайшее значение для развития и уточнения *понятия мощности*, введенного в моих работах (журнал Крелле, т. 77, с. 258; т. 84, с. 242) [здесь I.2 и I.3] и многократно применявшегося в предшествующих номерах этой работы. Каждому строго определенному множеству присуща согласно этому понятию определенная мощность, причем двум множествам приписывается одна и та же мощность, если их можно сопоставить друг с другом взаимно однозначно и поэлементно.

В случае конечных множеств мощность совпадает с *количеством* элементов, потому что, как известно, подобные множества в любом порядке имеют одно и то же количество элементов.

Наоборот, в случае бесконечных множеств до сих пор ни в моих, ни в чьих-либо других работах не было вообще речи о каком-нибудь точно определенном *количестве* их элементов, но зато им можно было приписать определенную, совершенно не зависящую от их порядка *мощность*.

Наименьшую мощность бесконечных множеств нужно, как легко было показать, приписывать тем множествам, которые можно поставить во взаимно однозначное соответствие с *первым* числовым классом и которые, следовательно, обладают одинаковой с ним мощностью. Но зато до сих пор не было столь же простого и естественного определения *более высоких* мощностей.

Теперь оказывается, что наши вышеупомянутые числовые классы определенно бесконечных реальных целых чисел являются естественными, обнаруживающимися в единой форме представителями растущих в закономерной последовательности мощностей строго определенных мно-

жеств. Я самым определенным образом показываю, что мощность второго числового класса (II) не только отлична от мощности первого числового класса, но и представляет собой фактически *ближайшую* высшую мощность. Мы можем поэтому назвать ее *второй* мощностью или мощностью второго класса. Точно таким же образом на основании третьего класса получается определение третьей мощности, или мощности третьего класса и т. д.

§ 2

Другая положительная сторона новых чисел заключается, на мой взгляд, в *новом*, до сих пор не встречавшемся понятии, в понятии *количества* элементов *вполне упорядоченного* бесконечного многообразия. Так как это понятие всегда выражается с помощью вполне определенного числа нашей расширенной числовой области,— если только одновременно является определенным порядок элементов множества, что еще подлежит более тщательному определению,— и так как, с другой стороны, понятие количества получает в нашем внутреннем воззрении некоторое непосредственное предметное представление, то благодаря этой связи между количеством и числом доказана подчеркнутая мною реальность последнего и в тех случаях, когда оно определенно бесконечно.

Под *вполне упорядоченным* множеством следует понимать всякое строго определенное множество, элементы которого связаны друг с другом некоторой, непременно наперед заданной последовательностью, в соответствии с которой существует *первый* элемент множества и за каждым элементом (если он не последний в последовательности) следует определенный другой элемент, а также всякому конечному или бесконечному множеству элементов соответствует определенный элемент, *непосредственно следующий* за всеми ними в заданной последовательности (исключая случай, когда вообще не существует следующего за всеми ними элемента). О двух «вполне упорядоченных» множествах говорят, что они представляют одно и то же количество (относительно заданных для них последовательностей), если между ними возможно такое взаимно однозначное соответствие, что когда E и F представляют два элемента одного множества, E_1 и F_1 — соответствующие им элементы другого множества, то всегда расположение E и F в последовательности первого множества совпадает с расположением E_1 и F_1 второго множества, так что если E предшествует F в последовательности первого множества, то и E_1 предшествует F_1 в последовательности второго множества. Это соответствие, если оно вообще возможно, всегда является, как легко видеть, вполне определенным, и так как в расширенном числовом ряде всегда существует одно и только одно такое число α, что *предшествующие* ему числа (начиная с 1) имеют в натуральной последовательности то же самое количество, то мы вынуждены «количество» вышеназванных обоих «вполне упорядоченных» множеств приравнять α, если α есть бесконечно большое число, и приравнять числу $\alpha—1$, непосредственно предшествующему α, если α является конечным целым числом.

Существенное различие между конечными и бесконечными множествами обнаруживается в том, что конечное множество представляет *одно и то же* количество для *любой* последовательности, которую можно придать его элементам. Наоборот, множеству, состоящему из бесконечно многих элементов, соответствуют вообще *различные* количества в зависимости от последовательности, придаваемой элементам. *Мощность* множества представляет собой, как мы видели, атрибут, независимый от его расположения. Наоборот, *количество* множества является, как только мы имеем дело с бесконечными множествами, фактором, зависящим вообще от некоторой данной последовательности элементов. Однако и в случае бесконечных множеств имеется известная связь между *мощностью* множества и определенным при заданной последовательности *количеством* его элементов.

Возьмем сперва множество, имеющее мощность первого класса, и придадим его элементам *какую-нибудь* определенную последовательность, так что оно становится «вполне упорядоченным» множеством. В таком случае его количество есть всегда определенное число *второго* числового класса и никогда не может быть определено с помощью числа другого, а не второго числового класса. С другой стороны, можно всякое множество первой мощности расположить в виде такой последовательности, что его количество по отношению к этой последовательности становится равным любому данному наперед числу второго числового класса. Мы можем сформулировать эти положения еще следующим образом: каждое множество мощности *первого* класса *перечислимо с помощью* чисел *второго* числового класса и только с помощью подобных чисел, причем элементам этого множества можно придать такую последовательность, что оно в этой последовательности становится перечислимым с помощью любого наперед заданного числа второго числового класса; это число и показывает *количество* элементов по отношению к рассматриваемой последовательности.

Аналогичные законы справедливы для высших мощностей. Так, например, каждое строго определенное множество мощности *второго* класса перечислимо *с помощью* чисел третьего класса и только с помощью таковых; элементам этого множества можно придать такую последовательность, что оно в этой последовательности становится перечислимым[1] с помощью *любого наперед заданного* числа *третьего* класса; это число и показывает количество элементов по отношению к рассматриваемой последовательности.

[1] То, что в прежних номерах этой работы я называл словом «перечислимый», представляет собой по введенному теперь мною более точному и в то же время обобщенному определению не что иное, как перечислимость *с помощью* чисел первого класса (конечные множества) или *с помощью* чисел второго класса (множества первой мощности).

§ 3

Понятие *вполне упорядоченного множества* оказывается фундаментальным для всего учения о многообразиях. В одной дальнейшей работе я вернусь к тому, как мне кажется, основному, чреватому следствиями и особенно замечательному своей общезначимостью закону мышления, согласно которому всякому *строго определенному* множеству можно придать форму *вполне упорядоченного* множества. Здесь я ограничусь указанием того, как из понятия *вполне упорядоченного* множества получаются самым простым образом основные операции для целых — как конечных, так и определенно бесконечных — чисел и как из непосредственного внутреннего созерцания с аподиктической достоверностью вскрываются их законы. Пусть даны сперва два *вполне упорядоченных* множества M и M_1, которым соответствуют в качестве количеств числа α и β. В таком случае $M+M_1$ снова является *вполне упорядоченным* множеством, получаемым, если сначала полагают множество M, а затем множество M_1 соединяя его с первым. Поэтому и множеству $M+M_1$ соответствует в отношении получающейся последовательности его элементов определенное число как количество. Это число называется суммой α и β и обозначается через $\alpha+\beta$. Здесь тотчас же обнаруживается, что если не оба α и β являются конечными, то $\alpha+\beta$ вообще отлично от $\beta+\alpha$. Следовательно, *коммутативный* закон вообще теряет свою силу уже в случае сложения. Далее, понятие суммы *нескольких* слагаемых, заданных в определенной последовательности, причем эта последовательность сама может быть определенно бесконечной, образовать столь просто, что я не считаю необходимым здесь вдаваться в подробности. Замечу лишь, что *ассоциативный* закон вообще сохраняет свою силу. В частности, имеем $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$.

Если мы возьмем некоторую определенную с помощью числа β последовательность из одних только равных и одинаково упорядоченных множеств, в каждом из которых количество элементов равно α, то получим новое вполне упорядоченное множество, соответствующее количество которого дает определение произведения $\beta\alpha$, где β — множитель, а α — множимое. Здесь тоже $\beta\alpha$ вообще отлично от $\alpha\beta$, так что и в случае умножения чисел коммутативный закон вообще не имеет силы. Напротив, ассоциативный закон общезначим и для умножения, так что имеем $\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$.

Среди новых чисел некоторые выделяются тем, что они обладают свойством простого числа. Но это свойство должно быть охарактеризовано здесь несколько более определенно тем, что под простым числом понимается такое число α, для которого разложение $\alpha=\beta\gamma$, где β — множитель, возможно лишь тогда, когда $\beta=1$ или $\beta=\alpha$; напротив, и у простых чисел α множимое будет иметь некоторую область неопределенности, чего нельзя изменить по самой природе вещей. Тем не менее впоследствии в другой работе я покажу, что разложение числа на его простые множители всегда можно осуществить лишь *единственным* и даже *определенным* по отношению к порядку множителей способом (поскольку послед-

ние не являются конечными простыми числами, расположенными в произведении рядом друг с другом). При этом выявляются два вида определенно бесконечных простых чисел, из которых первые стоят ближе к конечным простым числам, тогда как вторые имеют совсем иной характер.

Далее, с помощью новых сведений для меня теперь становится возможным вскоре дать строгое обоснование теоремы о так называемых линейных бесконечных многообразиях, приведенной в конце статьи «К учению о многообразиях» (Журнал Крелле, т. 84, с. 258) [здесь I.3].

В последнем номере (№ 4) настоящей работы [теорема V в 5.4] я для точечных множеств P, содержащихся в n-мерной непрерывной области, дал теорему, которую с помощью приведенного выше нового способа выражений можно сформулировать так: «Если P есть точечное множество, первое производное $P^{(\alpha)}$ которого тождественно обращается в нуль, где α — любое целое число *первого* или *второго* класса, то первое производное множество $P^{(1)}$, а потому и само P, есть точечное множество мощности *первого* класса». В высшей степени замечательным мне кажется то, что эту теорему можно обратить следующим образом: «Если P есть точечное множество, первое производное $P^{(1)}$ которого имеет мощность *первого* класса, то существуют целые числа α, принадлежащие *первому* или *второму* числовому классу, для которых $P^{(\alpha)}$ тождественно обращается в нуль, и среди чисел α, для которых наблюдается это явление, одно является наименьшим».

Доказательство этой теоремы я опубликую в ближайшее время по дружескому приглашению моего высокоуважаемого друга господина проф. Миттаг-Леффлера в Стокгольме в первом томе нового редактируемого им математического журнала. В связи с этим господин Миттаг-Леффлер опубликует статью, в которой он покажет, как на основе этой теоремы можно значительно обобщить его и господина профессора Вейерштрасса исследования о существовании однозначных аналитических функций с заданными особыми точками [[19]].

§ 4

Расширенный ряд целых чисел можно, если это потребуется, без **труда дополнить до непрерывного** числового множества, присоединяя к каждому целому числу α все вещественные числа x, которые больше нуля и меньше единицы.

Теперь, возможно, возникает вопрос: раз удалось таким образом достичь определенного расширения действительной числовой области в сторону бесконечно большого, то нельзя ли с таким же успехом определить бесконечно малые числа или, что свелось бы к тому же самому, такие конечные числа, которые не совпадают с рациональными и иррациональными числами (являющимися пределами последовательностей рациональных чисел), но которые могли бы быть вставлены в особых промежуточных местах между действительными числами так, как иррацио-

нальные числа вдвигаются в цепь рациональных или трансцендентные числа — в ткань алгебраических чисел?

На вопрос о возможности подобных интерполяций, на которые ряд авторов потратили много усилий, можно, по моему мнению и как я это покажу, ответить ясно и отчетливо лишь с помощью наших новых чисел, а именно на основе общего понятия количества вполне упорядоченных множеств. Между тем все прочие попытки отчасти основывались, как мне кажется, на ошибочном смешении несобственно бесконечного с собственно бесконечным, отчасти предпринимались на совершенно ненадежной, шаткой основе.

Новейшие философы нередко называли несобственно бесконечное «дурной» бесконечностью [20], на мой взгляд, несправедливо, так как в математике и естествознании оно оказалось весьма хорошим и в высшей степени ценным инструментом. Насколько я знаю, бесконечно малые величины разрабатывались до сих пор вообще *лишь* в форме несобственно бесконечного. Как таковые, они доступны всем тем различиям, видоизменениям и соотношениям, которыми пользуются в исчислении бесконечно малых и в теории функций и с помощью которых там собирают богатую жатву аналитических истин. Наоборот, от всех попыток превратить эти бесконечно малые насильственно в некоторые *собственно* бесконечно малые, следует, наконец, отказаться как бесцельных. Если только вообще существуют, т. е. доступны определению, собственно бесконечно малые величины, то они, наверное, не стоят ни в какой непосредственной связи с обычными, *становящимися* бесконечно малыми величинами.

В противоречии с упомянутыми попытками касательно бесконечно малого и со смешением обеих форм проявления бесконечного находится нередко встречающееся воззрение на сущность и значение числовых величин, согласно которому действительно существующими можно признать лишь конечные реальные целые числа нашего числового класса (I).

В лучшем случае здесь приписывается еще известная реальность непосредственно вытекающим из них *рациональным* числам. Что же касается иррациональных чисел, то в чистой математике им подобает лишь *формальное* значение. Они являются как бы своего рода счетными мерками, служащими для того, чтобы фиксировать и простым, единообразным способом описывать свойства групп целых чисел. Согласно этому воззрению собственный материал анализа образуется исключительно конечными реальными целыми числами. Все уже найденные в арифметике и в анализе или еще ждущие открытия истины должны рассматриваться как отношения конечных целых чисел. Исчисление бесконечно малых, а с ним и теория функций считаются правомерными лишь постольку, поскольку их теоремы можно истолковать как законы, царящие над конечными целыми числами. Хотя я не могу согласиться с этой концепцией чистой математики, но с ней бесспорно связаны известные преимущества, которые я хотел бы здесь подчеркнуть. Ведь о ее значении говорит и то обстоятельство, что к ее представителям принадлежит часть талантливейших математиков нашего времени [21].

Если, как здесь принимается, действительны лишь конечные целые числа, а все остальные числа представляют собой лишь формы отношений, то можно потребовать, чтобы доказательства аналитических теорем были испытаны по своему «теоретико-числовому содержанию» и чтобы каждый обнаруживающийся в них пробел был заполнен согласно принципам арифметики. В возможности такого пополнения заключается настоящий пробный камень для правильности и полной строгости доказательств. Нельзя отрицать того, что на этом пути можно будет усовершенствовать обоснование многих теорем и способствовать другим методическим улучшениям в различных частях анализа. Далее, в руководстве принципами, вытекающими из этой концепции, можно видеть гарантию от всякого рода нелепостей или ошибок.

Этим путем устанавливается определенный, хотя довольно скромный и простой принцип, который рекомендуется всем как ариаднова нить. Он должен служить тому, чтобы удержать полет математической фантазии и спекуляции в надлежащих границах, где они не рискуют попасть в пропасть «трансцендентного», туда, где, как говорится в целях назидания и спасительного страха, «все возможно». Если это и так, то кто знает, не руководствовались ли основоположники этой концепции именно только точкой зрения целесообразности, когда они рекомендовали ее в качестве полезного, предохраняющего от всяких ошибок регулятора молодым силам, стремящимся ввысь и так легко подвергающимся благодаря самонадеянности опасностям, хотя в этой концепции нельзя найти плодотворного принципа. Ведь гипотезу, что сами они при открытии новых истин исходили из этих принципов, я не могу допустить потому, что, хотя я и признаю много хороших сторон у этих правил, они, строго говоря, должны рассматриваться как ошибочные. Мы не обязаны им никакими истинными успехами, и если бы мы в действительности точно руководствовались ими, то развитие науки остановилось бы или было введено в самые узкие границы. По счастью, дела в действительности не обстояли так плохо; и восхваление, равно как и руководство этими полезными при известных обстоятельствах правилами, никогда не понималось вполне буквально; удивительно также то, что до сих пор, насколько мне известно, не нашлось никого, кто взял бы на себя задачу сформулировать их полнее и лучше, чем это пытаюсь сделать здесь я.

Если мы обратимся к истории, то увидим, что подобные взгляды высказывались часто и что они встречаются уже у Аристотеля. Как известно, в средние века мы встречаем решительно у всех схоластов в качестве неопровержимого, идущего от Аристотеля положения, что «infinitum actu non datur» [22]. Однако если рассмотреть возражения, выдвигаемые Аристотелем[2)] против реального существования бесконечности (см., например, его «Метафизику», кн. XI, гл. 10), то по существу их можно свести к предпосылке, заключающей в себе petitio principii [23], именно к предпосылке, что существуют лишь *конечные* числа. Об этом он заключил из того, что ему был известен лишь счет на конечных множествах. Но я думаю, что выше я доказал,— и в ходе этой работы это обнаруживается еще отчетливее,— что и с бесконечными множествами можно про-

изводить столь же определенные действия счета, как и с конечными, предполагая, что множествам приписывается определенный закон, согласно которому они становятся *вполне упорядоченными* множествами. Что без подобной закономерной последовательности элементов множества над ним нельзя производить действия счета — это заключается в природе понятия *счета*. И в случае конечных множеств счет можно произвести лишь при некоторой определенной последовательности сосчитываемых элементов, но конечные множества обладают тем свойством, что результат счета — *количество* — *не зависит* от порядка элементов. Между тем в случае бесконечных множеств, как мы видели, такая независимость вообще *не* существует; количество бесконечного множества представляет собой бесконечное число, *определяемое* между прочими обстоятельствами и законом счета. В этом и только в этом заключается лежащее в самой основе вещей, а потому никогда неустранимое существенное различие между конечным и бесконечным. Но из-за этого различия никогда нельзя будет отрицать существование бесконечного, сохраняя в то же время существование конечного. Отрицая одно, мы должны отбросить и другое. Но куда мы пришли бы, следуя этим путем?

Другой аргумент, выдвинутый Аристотелем против реальности бесконечного, состоит в утверждении, что если бы существовало бесконечное, то конечное было бы разрушено им, так как конечное число будто бы уничтожается бесконечным числом [24]. В действительности же, как мы увидим в дальнейшем, дело обстоит следующим образом: если мы возьмем какое-нибудь бесконечное число, мыслимое как определенное и законченное, то к нему *отлично* можно прибавлять и соединять с ним какое-либо конечное число, и это вовсе *не повлечет* за собой уничтожения последнего (наоборот, бесконечное число изменяется от подобного прибавления к нему конечного числа). Только *обратное* действие, именно прибавление бесконечного числа к конечному, когда сначала полагается конечное число, вызывает уничтожение последнего, не приводя к модификации первого. Эта правильная точка зрения на отношение между конечным и бесконечным, совершенно неизвестная Аристотелю, должна была бы вызвать новые идеи не только в анализе, но и в других науках, особенно в естествознании [ср. заключение § 5].

К мысли рассматривать бесконечно большое не только в форме безгранично возрастающего и в тесно с этим связанной форме сходящихся бесконечных рядов, введенных впервые в XVII в., но также закрепить его математически с помощью чисел в определенной форме завершенно бесконечного я пришел почти против собственной воли и в противоречии с ценными для меня традициями, логически вынужденный к этому ходом многолетних научных усилий и попыток,— и поэтому я не думаю также, чтобы могли найтись доводы, на которые я не сумел бы ответить.

§ 5

Говоря только что о традициях, я понимал их не в узком смысле лично пережитого, но имел в виду основателей нашей философии и естест-

вознания. Для обсуждения вопроса, о котором идет здесь речь, я приведу лишь некоторые из важнейших источников. Пусть сравнят:

Локк Д. Опыт о человеческом разуме. кн. 2, гл. 16 и 17.

Декарт Р. Письма и разъяснения к его «Размышлениям»; далее, Начала философии, I, 26.

Спиноза Б. Письмо XXIX; Приложение, содержащее метафизические мысли... Ч. 1 и 2.

Лейбниц Г. В. Изд. Эрдмана, с. 138, 244, 436, 744; Изд. Перца, Сер. 2, т. 1, с. 209; Сер. 3, т. 4, с. 218; Сер. 3, т. 5, с. 307, 322, 389; Сер. 3, т. 7, с. 273[2].

Вряд ли и теперь можно придумать более сильные доводы против введения бесконечных целых чисел, чем те, которые имеются у этих авторов. Пусть поэтому их проверят и сравнят с моими доводами в пользу этих чисел. Подробное и исчерпывающее рассмотрение этих мест, в особенности весьма замечательного и содержательного письма Спинозы к Л. Мейеру, я оставлю до другого раза. Здесь же ограничусь следующими замечаниями.

Как ни различны учения этих авторов, при обсуждении вопроса о конечном и бесконечном они по существу сходятся в том, что к понятию числа принадлежит его конечность и что, с другой стороны, истинное бесконечное или абсолютное, заключающееся в боге, не допускает никакого определения. Что касается последнего пункта, то я, само собой разумеется, вполне согласен с ним, ибо положение: «omnes determinato est negatio» [[26]] не подлежит для меня никакому сомнению. Но зато в первом пункте, как сказано при рассмотрении аристотелевских доводов против «infinitum actu», я вижу petitio principii [[27]], объясняющий многие противоречия, которые встречаются у всех этих авторов и в особенности у Спинозы и Лейбница. Допущение, что, помимо недостижимого с помощью какого бы то ни было определения абсолютного и помимо конечного, не существует никаких модификаций, которые, не будучи конечными, все же определены с помощью чисел и которые, следовательно, представляют собой то, что я называю собственно бесконечным,— это допущение я считаю ничем не оправданным, и оно, по моему мнению, даже противоречит некоторым положениям, выдвинутым двумя последними философами. Что я утверждаю и что, как мне кажется, я доказал этой работой, как и прежними своими опытами, это, что после конечного существует Transfinitum (которое можно было бы назвать Suprafinitum [[28]]), т. е. безграничная иерархия определенных модусов, которые по своей природе не конечны, но бесконечны, и которые, однако, подобно конечному, могут быть охарактеризованы с помощью предназначенных для этой цели, строго определенных и отличных друг от друга *чисел*. Поэтому, по моему убеждению, область определимых величин *не* исчерпывается конечными величинами и границы нашего познания можно соответственно расширить, нисколько не насилуя нашей природы. Поэтому

---

[2] Примечательны также: *Hobbs T.* De corpore. Cap. VII, 11; *Berkeley D.* Treatise on the principles of human knowledge, p. 128—131 [[25]].

вместо рассмотренного в § 4 аристотелевско-схоластического положения я выставляю другое:

Omnia seu finita seu infinita et exepto Deo ab intellectu determinari possunt[3)] [[29]]. Весьма часто ссылаются на конечность человеческого *рассудка* в качестве объяснения того, почему мыслимы только конечные числа. Но в этом утверждении я вижу опять-таки упомянутый выше порочный круг. А именно, говоря о «конечности рассудка», молчаливо предполагают, что его способность образовывать числа ограничивается только конечными числами. Но если окажется, что рассудок в состоянии также в известном смысле определить и отличать друг от друга бесконечные, т. е. сверхконечные числа, то или словам «конечный рассудок» придется придать расширенное значение, так что из них нельзя будет извлечь вышеуказанного заключения, или же придется приписать человеческому рассудку в известных отношениях предикат «бесконечный», что, по моему мнению, единственно правильно. Я считаю, что слова «конечный рассудок», которые столь часто приходится слышать, ни в коей мере не оправданы. Как ни ограничена в действительности человеческая природа, к ней все-таки прилипло очень *многое* от бесконечного, и я думаю даже, что если бы она не была сама во многих отношениях бесконечной, то нельзя было бы объяснить твердой убежденности и уверенности в бытии абсолютного, в чем все мы чувствуем себя единодушными. В частности, я защищаю то воззрение, что человеческий рассудок обладает безграничными способностями к постепенному образованию целых числовых классов, которые находятся в определенном отношении к бесконечным модусам и *мощности* которых все больше и больше.

На выбранном мною пути можно, как я думаю, приблизиться к решению главных трудностей в обеих внешне различных, но внутренне вполне родственных системах двух названных выше мыслителей, а некоторые из них можно уже теперь удовлетворительно решить и объяснить. Это трудности, подавшие повод к позднейшему критицизму, который, на мой взгляд, при всех своих преимуществах не дает достаточного возмещения за стеснение развития учений Спинозы и Лейбница. Ведь наряду или вместо механического объяснения природы, которое внутри сферы своего действия обладает всеми вспомогательными средствами и преимуществами математического анализа, но односторонность и недостаточность которого были столь правильно вскрыты Кантом, не появилось — даже в начатках — *органическое* объяснение природы, выходящее из рамок механицизма и вооруженное такой же математической строгостью. Путь к нему, как я думаю, удастся проложить только через продолжение трудов и стремлений двух названных философов.

Особенно трудным пунктом в системе Спинозы является отношение конечных модусов к бесконечным. Там остается невыясненным, как и при каких обстоятельствах может утверждаться в своей самостоятельности конечное по отношению к бесконечному или бесконечное по отношению к еще более бесконечному. Затронутый уже в § 4 пример показывает, как мне кажется, в своей простой символике тот путь, идя по которому, удастся, быть может, приблизиться к решению этого вопроса. Если

ω есть первое число второго числового класса, то мы имеем $1+\omega=\omega$; напротив, $\omega+1=(\omega+1)$, где $(\omega+1)$ представляет собой совершенно отличное от ω число. Таким образом, как здесь ясно видно, все зависит от *положения*, занимаемого конечным по отношению к бесконечному. Если первое предшествует, то оно растворяется в бесконечном и исчезает в нем. Если же оно *скромно* займет свое место *позади* бесконечного, то оно сохраняется и соединяется с ним в одно новое модифицированное бесконечное.

§ 6

Если постижение *бесконечно больших замкнутых* целых чисел, сравнимых между собой и с конечными числами, связанных друг с другом и с конечными числами неизменными законами, доставляет трудности, то эти трудности обусловлены тем фактом, что хотя новые числа и обладают во многих отношениях свойствами прежних чисел, но в гораздо большем числе других отношений они имеют совершенно своеобразную природу, часто приводящую к тому, что у одного и того же числа оказываются соединенными различные признаки, которые никогда не встречаются у конечных чисел вместе, а всегда разделены. Ведь в одном из цитированных в предыдущем параграфе мест встречается то соображение, что если бы существовало какое-нибудь бесконечное целое число, то оно должно было бы быть одновременно четным и нечетным числом, а так как оба эти признака не могут существовать вместе, то, следовательно, не существует такого бесконечного целого числа.

Здесь, очевидно, молчаливо предполагается, что признаки, раздельные в случае традиционных чисел, должны сохранять то же отношение и в случае новых чисел. Отсюда заключают о невозможности бесконечных чисел. Кому не бросится в глаза паралогизм этого рассуждения? Разве всякое обобщение или расширение понятий не связано и даже не мыслимо без отказа от частных признаков? Разве в самое последнее время не пришли к столь важной, приведшей к величайшим успехам мысли ввести комплексные числа, не обращая внимания на то, что их нельзя назвать ни положительными, ни отрицательными? А ведь на такой только шаг решаюсь и я здесь, и, быть может, общему сознанию будет легче следовать за мною, чем это было при переходе от вещественных чисел к комплексным. Действительно, хотя новые числа отличаются более интенсивной субстанциональной определенностью от традиционных чисел, однако как «количества» они имеют такую же реальность, что и последние. Между тем на пути введения комплексных чисел долгое время встречались трудности, пока после многих усилий не нашли их геометрическое представление при помощи точек или отрезков в плоскости.

Возвращаясь к указанному выше соображению о четности или нечетности, рассмотрим еще раз число ω, чтобы показать, как в нем без всякого противоречия совмещаются эти несоединимые на конечных числах признаки. В § 3 были даны общие определения для сложения и умножения, причем я подчеркнул, что для этих операций коммутативный закон вообще не имеет силы. В этом я вижу существенное различие между

бесконечными и конечными числами. Заметим еще, что в произведении $\beta\alpha$ я под β понимаю множитель, а под α — множимое. Тогда для ω без труда получаются две следующие формы: $\omega=\omega\cdot 2$ и $\omega=1+\omega\cdot 2$. В соответствии с этим ω можно, следовательно, рассматривать и как четное, и как нечетное число. С другой же точки зрения, если взять за множитель 2, то можно было бы сказать, что ω не есть ни четное, ни нечетное число, ибо, как легко показать, ω нельзя представить ни в форме 2α, ни в форме $2\alpha+1$. Следовательно, действительно число ω по сравнению с традиционными числами отличается совершенно своеобразной природой, так как в нем соединены все эти признаки и свойства. Еще более своеобразны прочие числа второго числового класса, как я это покажу впоследствии.

§ 7

Хотя в § 5 я привел много мест из сочинений Лейбница, в которых он высказывается против бесконечных чисел, говоря там между прочим: «Il n'y a point de nombre infini ni de ligne ou autre quantité infinie, si on les prend pour des Touts véritables»; «L'infini véritable n'est pas une modification, c est l'absolu; on contraire, dès qu'on modifie, on se borne ou forme un fini» [30] (причем в последней цитате я согласен с ним относительно первой половины, но не согласен относительно второй), однако, с другой стороны, я нахожусь в счастливом положении, располагая возможностью привести замечания того же самого мыслителя, в которых он — до известной степени в противоречии с самим собою — высказывается самым недвусмысленным образом в пользу собственно бесконечного, отличающегося от абсолютного. Так, например, в эрдмановском издании, с. 118, он говорит: «Je suis tellement pour l'infini actuel, qu'au lieu d'admettre que la nature l'abhorre, comme l'on dit vulgairement, je tiens qu'elle l'affect partout, pour mieux marquer les perfections de son Auteur. Ainsi je crois, qu'il n'y a aucune partie de la matière, qui ne soit, je ne dis pas divisible, mais actuellement divisée, et par conséquent la moindre particelle doit être considerée, comme un monde, plein d'une infinité de créatures différentes» [31].

Но решительного защитника собственно бесконечное, как оно, например, встречается нам в строго определенных точечных множествах или в составе тел из точечных атомов (я, следовательно, имею в виду здесь не химико-физические демокритовские атомы, потому что я не могу признать их существующими ни в понятии, ни в действительности, как ни полезной до известной степени оказалась эта фикция), нашло в одном в высшей степени остроумном философе и математике нашего столетия, в Бернарде Больцано, который развил свои взгляды на этот вопрос в прекрасном и содержательном сочинении «Paradoxien des Unendlichen». Leipzig, 1851 [32], имеющем целью показать, как противоречия, отыскивавшиеся в бесконечном скептиками и перипатетиками *всех времен*, вовсе не оказываются в нем, лишь только берут на себя, правда, не совсем легкий труд рассматривать понятия о бесконечности со всей серьезностью в их истинном значении. В этом сочинении можно поэтому встре-

тить также превосходное во многих отношениях рассуждение о математическом несобственно бесконечном, как оно выступает в форме дифференциалов первого или высших порядков, в виде сумм бесконечных рядов или в виде каких-либо иных предельных процессов. Это бесконечное (названное некоторыми схоластами синкатегорематическим бесконечным) представляет собой простое вспомогательное понятие нашего мышления, понятие отношения, которое согласно своему определению заключает в себе идею изменчивости и о котором, таким образом, никогда нельзя сказать «datur» [33] в собственном смысле слова.

Весьма замечательно, что в воззрениях относительно этого рода бесконечного не существует сколько-нибудь существенных различий и между современными философами, если отвлечься от того, что некоторые современные школы так называемых позитивистов, или реалистов [4)], или материалистов готовы видеть в этом *синкатегорематическом* бесконечном — насчет которого они сами должны согласиться, что оно не обладает никаким *собственным* бытием,— *наивысшее понятие*.

Но уже у Лейбница во многих местах мы встречаем указания на правильное в сущности положение вещей. Ведь к этому несобственно бесконечному относится, например, следующее место эрдмановского издания (с. 436): «Ego philosophice loquendo non magis statuo magnitudiens infinite parvas quam infinite magnas, seu non magis infinitesimas quam infinituplas. Ultrasque enim per modum loquendi compendiosum pro mentis fictionibus habeo, ad calculum aptis, quales etiam sunt radices imaginariae in Algebra. Interim demonstravi, magnum has expressiones usum habere compendium cogitandi adeoque ad inventionem, et in errorem ducere non posse, cum pro infinite parvo substituere sufficiat tam parvum quam quis volet, ut error sit minor dato, unde consequitur errorem dari non posse» [34].

Больцано, быть может, единственный автор, который до некоторой степени оперирует собственно бесконечными числами; по крайней мере у него о них неоднократно идет речь. Однако я никак не могу согласиться с тем способом, каким он трактует их, не будучи в состоянии дать им правильное определение, и, например, § 29—33 его книги я считаю необоснованными и ошибочными. Для действительного выражения в понятиях определенно бесконечных чисел у этого автора не хватает как общего *понятия мощности*, так и точного *понятия количества*. Правда, в отдельных местах оба последние встречаются у него в зародышевом виде в форме специализаций, но, как мне кажется, при этом он не может достигнуть полной ясности и определенности, чем и объясняются многие непоследовательности и даже ошибки этой замечательной книги.

Без вышеупомянутых двух понятий невозможно, по моему мнению, продвинуться вперед в учении о многообразиях. То же самое, как я думаю, относится к областям, которые зависят от учения о многообразиях или теснейшим образом связаны с ним, как, например, современная теория функций, с одной стороны, и логика и теория познания с другой. Когда я рассматриваю бесконечное так, как это сделано мною здесь и в моих прежних работах, то меня охватывает истинная радость, которой

я с благодарностью отдаюсь, при виде того, как понятие целого числа, имеющее в области конечного под собой лишь понятие *количества*, как бы *раскалывается*, когда мы поднимаемся в область бесконечного, на *два* понятия — на понятие *мощности*, независимое от придаваемого множеству порядка, и понятие *количества*, необходимым образом связанное с некоторым закономерным порядком множества, благодаря которому последнее становится *вполне упорядоченным* множеством. А когда я обратно спускаюсь из области бесконечного в область конечного, то столь же ясно и хорошо вижу, как оба понятия становятся одним и сливаются в понятие конечного множества.

§ 8

Мы можем говорить о действительности или существовании целых чисел, как конечных, так и бесконечных, в двух смыслах. Строго говоря, это те же самые отношения, в которых вообще можно ставить вопрос о реальности каких-либо понятий или идей. Во-первых, мы можем считать целые числа действительными постольку, поскольку они занимают на основе определений вполне определенное место в нашем рассудке, вполне ясно отличаются от всех остальных составных частей нашего мышления, находятся к ним в определенных отношениях и, таким образом, определенным образом видоизменяют субстанцию нашего духа. Да позволено будет мне назвать этот вид реальности наших чисел их *интрасубъективной* или *имманентной реальностью* [5]. Но числам можно приписать реальность также постольку, поскольку их приходится рассматривать как выражения или отображения процессов и отношении во внешнем мире, противостоящем интеллекту, поскольку, далее, различные числовые классы (I), (II), (III) и т. д. оказываются представителями мощностей, которые фактически встречаются в телесной и духовной природе. Этот второй вид реальности я называю *транссубъективной* или также *транзиентной* реальностью целых чисел.

При вполне реалистической, но в то же время и не менее идеалистической основе моих размышлений для меня не подлежит никакому сомнению, что оба эти вида реальности всегда совпадают в том смысле, что какое-нибудь понятие, принимаемое за существующее в первом отношении, обладает в известных, даже бесконечно многих отношениях и транзиентной реальностью [6]. Правда, установление этой последней по большей части принадлежит к самым трудным и утомительным задачам метафизики и часто должно быть оставлено до тех времен, когда естественное развитие одной из прочих наук раскроет транзиентное значение рассматриваемого понятия.

Эта связь обеих реальностей имеет свой собственный корень *в единстве всего, к которому мы сами принадлежим.* Указание на эту связь имеет здесь целью вывести отсюда одно важное, на мой взгляд, следствие для математики, а именно что последняя при развитии своих идей *должна считаться единственно лишь с имманентной* реальностью своих понятий и поэтому не обязана вовсе проверять также их *транзиентную*

реальность. В силу этого исключительного положения, отличающего ее от всех других наук и объясняющего сравнительную легкость и отсутствие принуждения в занятии ею, она заслуживает совершенно особенным образом имени *свободной* математики — название, которое, будь мне представлен выбор, я дал бы охотнее, чем ставшее обычным наименование «чистая» математика.

Математика в своем развитии совершенно свободна и связана лишь тем само собой разумеющимся условием, что ее понятия должны быть непротиворечивы, а также должны находиться в неизменных, установленных определениями отношениях к образованным раньше и уже имеющимся налицо испытанным понятиям[7]. В частности, при введении новых чисел она обязана только дать определения их, благодаря которым они получают такую определенность и при известных обстоятельствах такое отношение к прежним числам, что их можно во всех заданных случаях определенно отличать друг от друга. Как только какое-нибудь число удовлетворяет всем этим условиям, так его можно и должно рассматривать в математике как существующее и реальное. В этом я и вижу указанное в § 4 в виде намека основание того, почему рациональные, иррациональные и комплексные числа можно считать существующими совершенно таким же образом, как конечные положительные целые числа.

Нет нужды, как я думаю, видеть в этих принципах какую-нибудь опасность для науки, как этого боятся многие. Во-первых, указанные условия, при которых только и может иметь место свобода образования новых чисел, такого рода, что они представляют лишь ничтожный простор произволу, а во-вторых, каждое математическое понятие носит в самом себе необходимый корректив. Если оно неплодотворно или нецелесообразно, то это весьма скоро обнаруживается благодаря его полной непригодности, и тогда оно, за отсутствием успеха, отбрасывается. Мне же, наоборот, представляется, что гораздо большая опасность заключается во всяком излишнем ограничении математического стремления к творчеству, опасность тем большая, что в пользу этих ограничений нельзя в действительности привести никаких доводов из сущности науки. Ведь *сущность математики* заключается именно в ее *свободе*.

Если бы это свойство математики не вытекало из вышеупомянутых оснований, то все развитие самой науки, каким мы наблюдаем его в нашем столетии, должно было бы привести меня к тем же воззрениям.

Если бы Гаусс, Коши, Абель, Якоби, Дирихле, Вейерштрасс, Эрмит и Риман были обязаны всегда подвергать свои новые идеи метафизическому контролю, то мы бы, право, не смогли наслаждаться грандиозной системой современной теории функций, которая, хотя и была задумана и создана совершенно свободно, без всяких посторонних целей, уже и теперь в применениях к механике, астрономии и математической физике обнаруживает, как этого и следовало ожидать, свое транзиентное значение. Мы не видели бы перед собой великолепного расцвета теории дифференциальных уравнений у Фукса, Пуанкаре и многих других, если бы эти выдающиеся ученые были стеснены и запутаны этими чужерод-

ными влияниями. И если бы Куммер не дозволил себе чреватой последствиями свободы ввести так называемые идеальные числа в теорию чисел, то мы теперь не были бы в состоянии удивляться столь важным и превосходным алгебраическим и арифметическим работам Кронекера и Дедекинда. Но если математика имеет полное право развиваться совершенно независимо от всяческих метафизических влияний, то, с другой стороны, я все-таки не могу признать этого права за прикладной математикой, например за аналитической механикой и математической физикой. По моему мнению, эти науки *метафизичны* как в своих основах, так и в преследуемых ими целях. Если в них пытаются освободиться от этого, как это было недавно предложено одним знаменитым физиком [1], то они вырождаются в какое-то «описание природы», которое по необходимости лишено свежего дыхания математической мысли и способности *истолкования* и *объяснения* явлений природы.

§ 9

При том огромном значении, которое имеют так называемые действительные — рациональные и иррациональные — числа в учении о многообразиях, я не могу здесь не высказаться, хотя бы в самом главном, об их определениях. Я оставляю в стороне вопрос о введении рациональных чисел, ибо для этого существует ряд строго арифметических изложений. Из ближе стоящих ко мне авторов упомяну изложения Г. Грассмана (Lehrbuch der Arithmetik. Berlin, 1861) и Мюллера (Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik. Halle, 1855) [35]. Но зато я хотел бы вкратце и построже сказать о трех известных мне и в существенном однородных главных формах строго арифметического изложения учения об общих действительных числах. Это *прежде всего* способ введения, которым в течение ряда лет пользовался в своих лекциях об аналитических функциях проф. Вейерштрасс и некоторые намеки на который можно найти в программной работе г-на Э. Коссака (Die Elemente der Arithmetik. Berlin, 1872). *Во-вторых*, г-н Р. Дедекинд в своем сочинении «Stetigkeit und irrationale Zahlen» (Braunschweig, 1872) опубликовал своеобразную форму определения. *В-третьих*, в 1871 г. я предложил (Math. Ann., 1872, Bd. 5, S. 123) [здесь I.1] форму определения, внешне имеющую известное сходство с вейерштрассовской, так что г-н Г. Вебер (Ztschr. Math. und Phys., 27. Jahrg., hist.-liter. Abt., S. 163) смешал ее с последней. На мой взгляд, эта *третья*, впоследствии развитая и г-ном Липшицем форма определения (Grundlagen der Analysis. Bonn, 1877), является самой простой и естественной из всех и имеет еще то преимущество, что она самым непосредственным образом приспособлена для аналитических вычислений [36].

Определению какого-либо иррационального действительного числа всегда соответствует строго определенное множество первой мощности рациональных чисел. В этом заключается общая черта всех форм определений. Различие же их состоит в моменте порождения, при помощи которого множество соединяется с определяемым им числом, и в тех ус-

ловиях, которым должно удовлетворять множество, чтобы оно оказалось подходящей основой для соответствующего определения числа.

При *первой* форме определения в основу кладется множество положительных рациональных чисел a_ν, которое будет обозначаться через (a_ν) и которое удовлетворяет тому условию, что, сколько бы и каких из этих a_ν мы ни суммировали в конечном количестве, эта сумма всегда остается меньше некоторой заданной границы. Теперь если мы имеем две подобных совокупности (a_ν) и (a_ν'), то строго доказывается, что могут представиться три случая: или каждая часть $1/n$ единицы всегда встречается одинаково часто в обеих совокупностях, если только их элементы суммируются в достаточном, доступном увеличению конечном количестве, или $1/n$ начиная с известного n всегда содержится чаще в первой совокупности, чем во второй; или, наконец, $1/n$ начиная с известного n всегда содержится чаще во второй совокупности, чем в первой. Соответственно этим случаям мы полагаем, обозначая через b и b' определяемые этими двумя совокупностями (a_ν) и (a_ν') числа, что в первом случае $b=b'$, во втором $b>b'$, в третьем $b<b'$. Если мы соединим обе совокупности в одну новую совокупность $(a_\nu+a_\nu')$, то это дает основу для определения $b+b'$. Если же из двух совокупностей (a_ν), (a_ν') образовать новую совокупность $(a_\nu a_\nu')$, элементы которой являются произведениями из всех a_ν на все a_ν', то эта новая совокупность принимается в качестве основы определения произведения bb'.

Мы видим, что здесь момент порождения, связывающий множество с определяемым им числом, заключается в *образовании сумм*. Но следует подчеркнуть как *существенное* то, что здесь оперируют только суммированием всегда *конечного* количества рациональных элементов, а *не* полагается заранее, например, что определяемое число b равно сумме $\sum a_\nu$ бесконечного ряда (a_ν). В этом заключалась бы *логическая ошибка*, ибо, скорее, определение суммы $\sum a_\nu$ получается только путем приравнивания ее непременно уже определенному заранее *готовому* числу b. Я думаю, что эта логическая ошибка, которой избегнул впервые Вейерштрасс, совершалась почти всеми и не была замечена лишь потому, что она относится к тем редким случаям, когда действительная ошибка не может причинить большого вреда в исчислении. Несмотря на это, с вышеуказанной ошибкой связаны, по моему мнению, все те трудности, которые заключаются в понятии иррационального, между тем как если избегнуть этой ошибки, то иррациональное число занимает место в нашем духе с такой же определенностью, ясностью и отчетливостью, как и рациональное число.

В форме определения г-на Дедекинда в основу кладется *совокупность всех* рациональных чисел, но разделенных на две группы таким образом, что если мы обозначим числа первой группы через $\mathfrak{A}_\nu$, а числа второй группы через $\mathfrak{B}_\mu$, то всегда $\mathfrak{A}_\nu<\mathfrak{B}_\mu$. Подобное деление множества рациональных чисел г-н Дедекинд называет его «сечением», обозначает через $(\mathfrak{A}_\nu|\mathfrak{B}_\mu)$ и сопоставляет ему число b. Если сравнить два подобных сече-

ния $(\mathfrak{U}_\nu | \mathfrak{B}_\mu)$ и $(\mathfrak{U}_\nu' | \mathfrak{B}_\mu')$ друг с другом, то, как и при *первой* форме определения, оказывается всего *три* возможности, соответственно которым представленные обоими сечениями числа b и b' или приравниваются друг другу, или принимается, что $b > b'$, или что $b < b'$. Первый случай имеет место,— если отвлечься от некоторых, легко регулируемых исключений, возникающих при рациональности определяемых чисел,— лишь при полном тождестве обоих сечений. В этом наблюдается решительное и безусловное преимущество данной формы определения по сравнению с обеими другими, а именно то, что каждому числу b соответствует лишь *единственное* сечение. Но она сопровождается и тем крупным недостатком, что числа в анализе *никогда* не представляются в форме «сечений», в которую их приходится лишь вписывать весьма искусственным и сложным образом [?]

И здесь затем следуют определения суммы $b + b'$ и произведения bb' на основе новых сечений, получаемых из двух заданных.

Недостаток, связанный с *первой* и *третьей* формами определения, а именно, что здесь одни и те же, т. е. равные, числа представляются бесконечно часто и что, таким образом, не получается непосредственно однозначного обозрения всех действительных чисел, можно весьма легко устранить путем специализации положенных в основу множеств (a_ν), если привлечь к рассмотрению какую-либо из известных однозначных систем, вроде десятичной системы или разложения в простые цепные дроби.

Перейду теперь к *третьей* форме определения действительных чисел. И здесь в основу кладется бесконечное множество рациональных чисел (a_ν) первой мощности, но ему теперь приписывается другое свойство, чем в теории Вейерштрасса: я требую, чтобы, взяв произвольно малое рациональное число ε, можно было бы так удалить конечное число членов множества, чтобы оставшиеся имели попарно разность, которая по абсолютной величине меньше ε. Всякое такое множество (a_ν), которое можно также охарактеризовать равенством

$$\lim_{\nu=\infty} (a_{\nu+\mu} - a_\nu) = 0 \text{ (при произвольном } \mu),$$

я называю *фундаментальной последовательностью* и сопоставляю ему некоторое определяемое им число b, для которого целесообразно даже воспользоваться самим знаком (a_ν), как это сделано у г-на Гейне, который в этих вопросах после многих устных обсуждений присоединился к моим взглядам (ср.: Журнал Крелле, т. 74, с. 172) [37]. Подобная *фундаментальная последовательность*, как можно строго вывести из ее понятия, приводит к трем случаям: или ее члены a_ν для достаточно больших значений ν по абсолютной величине меньше, чем любое наперед заданное число; или они начиная с некоторого ν больше некоторого определенно заданного положительного рационального числа ρ; или же они начиная с известного ν меньше некоторой определенно заданной отрицательной рациональной величины $-\rho$. В первом случае я говорю, что b

равно нулю, во втором, что b больше нуля или положительно, в третьем, что b меньше нуля или отрицательно.

Затем переходим к элементарным операциям. Если (a_ν) и (a_ν') представляют собой две *фундаментальные последовательности*, с помощью которых определяются числа b и b', то оказывается, что $(a_\nu \pm a_\nu')$ и $(a_\nu a_\nu')$ тоже являются *фундаментальными последовательностями*, которые, следовательно, определяют три новых числа, которые служат мне для определения суммы и разности $b \pm b'$ и произведения bb'.

Если при этом b отлично от нуля,— определение чего дано выше,— то можно доказать, что и (a_ν'/a_ν) представляет собой *фундаментальную последовательность*, соответствующее которой число приводит к определению частного b'/b.

Элементарные операции между числом b, заданным с помощью фундаментальной последовательности (a_ν), и некоторым прямо заданным рациональным числом a заключены в только что введенных операциях, для чего полагают $a_\nu' = a$, $b' = a$.

Лишь теперь мы переходим к определению равенства и обоих случаев неравенства двух чисел b и b' (из которых b' может также равняться a), говоря при этом $b = b'$, $b > b'$ или $b < b'$ в зависимости от того, равна ли нулю, больше нуля или меньше нуля разность $b - b'$.

После всех этих подготовительных рассуждений получается в качестве первой *строго доказуемой* теоремы, что если b есть число, определяемое фундаментальной последовательностью (a_ν), то $b - a_\nu$ при возрастании ν становится по абсолютной величине меньше, чем любое мыслимое рациональное число, или иначе, что

$$\mathop{\mathrm{Lim}}_{\nu=\infty} a_\nu = b.$$

Следует обратить внимание на следующий кардинальный пункт, значение которого легко можно пропустить: в случае *третьей* формы определения число b не определяется вовсе как «предел» членов a_ν фундаментальной последовательности (a_ν). Принять это, значит совершить такую же логическую ошибку, как и та, о которой мы говорили при рассмотрении *первой* формы определения, и именно на том основании, что тогда предполагается наперед существование предела $\mathop{\mathrm{Lim}}_{\nu=\infty} a_\nu = b$. Скорее, дело обстоит обратным образом, а именно так, что благодаря нашим предыдущим определениям понятию числа b приписываются такие свойства и отношения к рациональным числам, что отсюда можно с логической очевидностью вывести заключение: $\mathop{\mathrm{Lim}}_{\nu=\infty} a_\nu$ существует и равен b. Да простят мне все эти подробности, которые оправдываются тем, что большинство проходят мимо этих неприметных деталей и затем легко натыкаются на противоречия в иррациональных числах, ставя их под сомнение, между тем как соблюдение указанных здесь предосторожностей легко предохранило бы от этого. Действительно, они тогда ясно поняли бы, что иррациональное число благодаря *приданным ему нашим определением свойствам* является такой же реальностью для нашего ду-

ха, как рациональное и даже как целое рациональное число, и что вовсе нет нужды *получать* его путем предельного процесса, а что, скорее, наоборот, *располагая* этими свойствами, можно общим образом убедиться в пригодности и очевидности предельных процессов[8)]. Ведь приведенную выше теорему легко обобщить следующим образом: если (b_ν) представляет собой какое-нибудь множество рациональных или иррациональных чисел, обладающее тем свойством, что $\lim\limits_{\nu=\infty}(b_{\nu+\mu}-b_\nu)=0$ (каково бы ни было μ), то существует некоторое число b, определяемое фундаментальной последовательностью (a_ν) и такое, что

$$\operatorname*{Lim}_{\nu=\infty} b_\nu = b.$$

Оказывается, следовательно, что *те самые* числа b, которые были определены на основе фундаментальных последовательностей (a_ν) (я называю эти фундаментальные последовательности последовательностями *первого* порядка) таким образом, что они оказываются пределами a_ν, могут быть представлены различными способами и как пределы последовательностей (b_ν), где каждое b_ν определяется с помощью фундаментальной последовательности первого порядка $(a_\mu^{(\nu)})$ (с фиксированным ν).

Поэтому подобное множество (b_ν), если оно обладает тем свойством, что $\lim\limits_{\nu=\infty}(b_{\nu+\mu}-b_\nu)=0$ (при произвольном μ), я называю фундаментальной последовательностью *второго* порядка.

Точно так же можно образовать фундаментальные последовательности *третьего, четвертого*, ..., n-го порядка, а также фундаментальные последовательности порядка α, где α — любое число второго числового класса.

Все эти фундаментальные последовательности дают для определения какого-либо действительного числа b то же самое, что и фундаментальные последовательности первого порядка. Все различие заключается лишь в более сложной, пространной форме задания. Тем не менее если только желают стать на точку зрения третьей формы определения, то мне представляется в высшей степени целесообразным отметить это различие, как я уже сделал это аналогичным образом в приведенном месте (Math. Ann., 1872, Bd. 5, S. 123) [I.1]. Поэтому я пользуюсь теперь следующим способом выражения: числовая величина b дана фундаментальной последовательностью n-го, соответственно α-го порядка. Если решиться на это, то мы получаем таким путем необыкновенно легкий и в то же время понятный язык, чтобы описать наиболее простым и выпуклым образом всю полноту многообразных, часто столь сложных образований анализа. Благодаря этому получится, на мой взгляд, серьезный выигрыш в ясности и прозрачности изложения. Тем самым я возражаю против опасений, высказанных г. Дедекиндом в предисловии к его сочинению «Непрерывность и иррациональные числа», относительно этих различий [[38]]. Мне вовсе не приходило в голову вводить с помощью фундаментальных последовательностей второго, третьего и т. д. порядков но-

вые числа, которые не были бы определены уже с помощью фундаментальных последовательностей первого порядка: я имел в виду лишь понятийно различную форму задания. Это ясно вытекает из отдельных мест моей работы.

Я хотел бы здесь обратить внимание на одно замечательное обстоятельство, а именно что порядки фундаментальных последовательностей, различенные мною с помощью чисел первого и второго числового классов, совершенно исчерпывают все вообще мыслимые в анализе, уже найденные или еще не найденные формы обычных типов последовательностей, исчерпывают в том смысле, что нет вовсе фундаментальных последовательностей,— как я это строго докажу при других обстоятельствах,— порядковое число которых можно было бы обозначить каким-нибудь числом, например, третьего числового класса.

Попытаюсь вкратце разъяснить целесообразность *третьей* формы определения.

Для обозначения того, что какое-нибудь число b дано на основе фундаментальной последовательности (e_ν) какого-либо порядка n или α, я пользуюсь формулами

$$b \sim (e_\nu) \quad \text{или} \quad (e_\nu) \sim b.$$

Если, например, предложен сходящийся ряд с общим членом c_ν, то, как известно, необходимое и достаточное условие сходимости заключается в том, чтобы выполнялось равенство $\lim\limits_{\nu=\infty} (c_{\nu+1}+\ldots+c_{\nu+\mu})=0$ (где μ произвольно).

Поэтому сумму ряда определяют с помощью формулы

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \infty \left(\sum_{n=0}^{\nu} c_n\right).$$

Если, например, все c_n определены на основании фундаментальных последовательностей k-го порядка, то то же самое можно сказать о $\sum\limits_{n=1}^{\nu} c_n$, а сумма $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ выступает здесь перед нами как определяемая фундаментальной последовательностью $(k+1)$-го порядка.

Если, например, нужно описать идейное содержание утверждения $\sin(\pi/2)=1$, то можно представить себе, что $\pi/2$ и его степени заданы, скажем, формулами

$$\pi/2 \sim (a_\nu), \qquad (\pi/2)^{2m+1} \sim (a_\nu^{2m+1}),$$

где для сокращения положено

$$2\sum_{n=0}^{\nu} \frac{(-1)^n}{2n+1} = a_\nu.$$

Далее будем иметь

$$\sin\frac{\pi}{2}\sim\left(\sum_{m=0}^{\mu}(-1)^m\,\frac{(\pi/2)^{2m+1}}{(2m+1)!}\right),$$

т. е. $\sin(\pi/2)$ определен на основании фундаментальной последовательности второго порядка, и, следовательно, приведенное выше утверждение выражает равенство рационального числа 1 и некоторого, данного на основании фундаментальной последовательности второго порядка числа $\sin(\pi/2)$.

Аналогичным образом можно сравнительно просто и точно описать идейное содержание более сложных формул, как, например, формул из теории тэта-функций, между тем как сведение бесконечных рядов к таким, которые состоят только из одних рациональных чисел, притом всегда одинакового знака, и которые сходятся абсолютно, сопряжено большей частью с величайшими трудностями, совершенно избегаемыми здесь при *третьей* форме определения в противоположность *первой*. Очевидно, что мы можем избегать их, как только речь идет не о приближенном численном нахождении сумм рядов, а только о безусловно строгих *определениях* их. *Первой* формой определения, на мой взгляд, не так легко пользоваться, если дело идет о точном определении сумм рядов, которые сходятся не абсолютно, а для которых, напротив, указан наперед порядок как их положительных, так и отрицательных членов. Но даже в случае абсолютно сходящихся рядов нахождение суммы, хотя бы последняя была независима от порядка членов, осуществимо в действительности лишь при определенном порядке их. Поэтому и в подобных случаях появляется искушение отдать преимущество *третьей* форме определения перед *первой*. Наконец, в пользу *третьей* формы определения говорит возможность ее обобщения на случай *сверхконечных* чисел, между тем как подобное обобщение *невозможно* для *первой* формы определения. Это различие зависит попросту от того, что в случае сверхконечных чисел коммутативный закон не имеет вообще места уже при сложении. Между тем первая форма определения *неразрывно связана* с этим законом, она стоит и падает вместе с ним. Но для всех видов чисел, где имеет место коммутативный закон сложения, *первая* форма определения, если не говорить об отмеченных пунктах, оказывается совершенно превосходной.

§ 10

Понятие «континуума» не только сыграло повсюду в развитии наук значительную роль, но и всегда вызывало величайшие различия во мнениях и даже ожесточенные споры. Это зависит, может быть, от того, что идея, лежащая в его основе, получила в своем проявлении у спорящих в сущности различное содержание, так как не было дано точного и полного определения понятия. А возможно и то,— и это представляется мне наиболее вероятным,— что идея континуума не представлялась уже и грекам, которые, кажется, впервые осознали ее, с той ясностью и полно-

той, которые были бы необходимы, чтобы исключить возможность различных толкований со стороны последующих мыслителей. Так, мы видим, что Левкипп, Демокрит и Аристотель рассматривают континуум как нечто составное, состоящее ex partibus sine fine divisibilibus [39]. Наоборот, Эпикур и Лукреций составляют его из своих атомов как конечных частей. Отсюда впоследствии разгорелся большой спор между философами, одни из которых последовали за Аристотелем, другие за Эпикуром [40]. Иные же философы, желая держаться вдали от этого спора, решили с Фомой Аквинским 9), что континуум не состоит ни из бесконечно многих, ни из конечного числа частей, но что он *не состоит вовсе* из каких-либо частей. Это последнее мнение, как мне кажется, содержит не столько разъяснение предмета, сколько молчаливое признание, что не добрались до сути его и предпочитают как-нибудь обойти ее. Здесь мы видим *средневеково-схоластическое происхождение* воззрения, защищаемого еще и в настоящее время, согласно которому континуум представляет собой некоторое неразложимое понятие или же, как выражаются другие, чисто *априорное* созерцание, которое вряд ли было бы доступным определению при помощи понятий. Всякая арифметическая попытка определения этой *тайны* рассматривается как незаконное посягательство и с соответствующей энергией отвергается. Робкие натуры испытывают при этом впечатление, как если бы в вопросе о континууме речь шла не о *математико-логическом понятии*, а о каком-то *религиозном догмате*.

От меня весьма далека мысль снова вызывать к жизни эти спорные вопросы, да, кроме того, для подробного обсуждения их мне не хватило бы места в узких рамках этой статьи. Я лишь считаю своей обязанностью развить здесь — по возможности кратко и имея в виду лишь *математическое* учение о множествах — понятие континуума, как я понимаю его логически трезво и как я пользуюсь им в учении о многообразиях. Эта задача нелегка для меня, так как среди математиков, к авторитету которых я охотно обращаюсь, ни один не занимался континуумом подробно в том смысле, в каком это мне здесь необходимо.

Правда, положив в основу одну или несколько действительных или комплексных непрерывных величин (или, как мне кажется правильнее выражаться, непрерывных множеств величин), как нельзя лучше образуют в самых различных направлениях понятие континуума, зависящего от них однозначно или многозначно, т. е. понятие непрерывной функции. Таким путем возникли теория так называемых *аналитических* функций, а также более общие функции с их в высшей степени странными свойствами (вроде недифференцируемости и тому подобного). Однако сам *независимый* континуум предполагается у математиков данным в этой наиболее простой форме проявления и не подвергался более подробному рассмотрению.

Прежде всего я должен сказать, что, по моему мнению, неправильно привлечение *понятия времени* или *наглядного созерцания времени* при рассмотрении более первичного и более общего понятия континуума. *Время*, как я считаю,—это представление, более ясному пониманию ко-

торого необходимо предпослать независимое от него понятие непрерывности; даже с помощью последнего нельзя считать время ни объективным, как субстанция, ни субъективным, как необходимая априорная форма созерцания. Оно есть не что иное, как некоторое *вспомогательное понятие, понятие связи*, благодаря которому устанавливается отношение между различными данными в природе и воспринимаемыми нами движениями. В природе нигде нет ничего, подобного *объективному* или *абсолютному времени*. Поэтому нельзя рассматривать *время* как меру *движения*. Скорее, наоборот, можно было бы рассматривать движение как меру времени, если бы этому не мешало то, что само *время* в скромной роли *субъективно необходимой априорной* формы созерцания не привело ни к каким ценным, бесспорным истинам, хотя с Канта прошло достаточно времени.

Точно так же я убежден, что так называемая *форма созерцания пространства* ничего не может дать для понимания *континуума*, так как и *пространство*, и мыслимые в нем образы лишь с помощью понятийно уже *готового* континуума получают то содержание, благодаря которому они могут стать не только предметом эстетического рассмотрения, философского остроумия или неточных сравнений, но и предметом трезво точных математических исследований.

Поэтому мне не остается ничего иного, как попытаться образовать с помощью понятий о числах, определенных в § 9, возможно наиболее общее чисто арифметическое понятие точечного континуума. Основой для этого мне служит, как само собой разумеется, n-мерное плоское *арифметическое* пространство G_n, т. е. совокупность всех систем значений

$$(x_1 | x_2 | \ldots | x_n),$$

в которых каждое x независимо от всех остальных может принимать *все действительные* числовые значения от $-\infty$ до $+\infty$. Всякую отдельную систему значений такого вида я называю *арифметической* точкой в G_n. Расстояние между двумя подобными точками определяется выражением

$$\left| \sqrt{(x_1' - x_1)^2 + (x_2' - x_2)^2 + \ldots + (x_n' - x_n)^2} \right|,$$

а под *арифметическим* точечным множеством P, содержащимся в G_n, понимается всякая закономерно заданная совокупность точек пространства G_n. Задача исследования заключается теперь в том, чтобы строго и по возможности наиболее общим образом определить, *когда P можно назвать континуумом.*

В журнале Крелле, т. 84, с. 242 [здесь I.3] я доказал, что все пространства G_n, сколь бы велико ни было так называемое число измерений n, имеют равную мощность, а следовательно, столь же мощны, как линейный континуум, как, скажем, совокупность всех действительных чисел интервала $(0\ldots1)$. Таким образом, исследование и установление мощности G_n сводится к тем же вопросам, специализированным для интервала $(0\ldots1)$, и я надеюсь, что вскоре смогу ответить на них при помощи строгого доказательства того, что эта искомая мощность есть не

что иное, как мощность нашего *второго числового класса* (II) [2]. Отсюда будет следовать, что все бесконечные точечные множества P обладают или мощностью числового класса (I), или мощностью второго числового класса (II). Отсюда также можно будет получить и дальнейшее следствие, что совокупность всех функций одного или нескольких переменных, изобразимых с помощью некоторого заданного бесконечного ряда, обладает *также лишь* мощностью второго числового класса (II), а потому *перечислима с помощью* чисел третьего числового класса (III) [10]. Эта теорема, следовательно, будет относиться, например, к совокупности всех «аналитических» функций, т. е. функций одного или нескольких переменных, получаемых путем продолжения сходящихся степенных рядов, или же к множеству всех функций одного или нескольких действительных переменных, представимых тригонометрическими рядами.

Теперь, чтобы приблизиться к общему понятию континуума, лежащего внутри G_n, я напомню о понятии производного множества $P^{(1)}$ любого заданного точечного множества P, как оно сперва было развито в работе, помещенной в «Math. Ann.», Bd. 5 [здесь I. 1], а затем было обобщено [в настоящей работе] до понятия производного множества $P^{(\gamma)}$, где γ может быть каким-либо целым числом одного из числовых классов (I), (II), (III) и т. д.

Точечные множества P можно разделить на два класса также по мощности их первого производного множества $P^{(1)}$. Если $P^{(1)}$ обладает мощностью первого числового класса (I), то, как я уже сказал в § 3 этой работы, оказывается, что существует некоторое первое целое число α *первого* или *второго* числового класса, для которого $P^{(\alpha)}$ обращается в нуль. Если же $P^{(1)}$ имеет мощность второго числового класса (II) [т. е. $P^{(1)}$ *несчетно*], то $P^{(1)}$ можно всегда разложить, и притом лишь единственным образом, на два таких множества R и S, что

$$P^{(1)} \equiv R+S,$$

где R и S обладают совершенно различными свойствами.

Множество R таково, что если повторять процесс получения из него производного множества, то оно при помощи этой продолжающейся редукции может быть сведено к нулю, так что всегда существует первое число γ из (I) или (II) числовых классов, для которого

$$R^{(\gamma)} \equiv 0.$$

Подобные точечные множества я называю *приводимыми*.

Наоборот, S таково, что для этих точечных множеств процесс получения производных множеств не приводит ни к какому изменению, так что

$$S \equiv S^{(1)},$$

а значит, и

$$S \equiv S^{(\gamma)}.$$

Подобные множества S я называю *совершенными* точечными множествами. Поэтому мы можем сказать: если $P^{(1)}$ обладает мощностью второ-

го числового класса (II), то $P^{(1)}$ распадается на некоторое определенное *приводимое* и некоторое определенное *совершенное* точечные множества.

Хотя оба эти предиката — «приводимое» и «совершенное» — несовместимы в одном и том же точечном множестве, но все-таки, с другой стороны, неприводимое — не то же, что совершенное, и точно так же несовершенное — не то же самое, что приводимое, как это легко заметить при несколько более внимательном рассмотрении.

Совершенные точечные множества S вовсе не всегда являются по своему существу тем, что в своих вышеназванных работах я назвал термином «всюду плотный» [11]. Поэтому их одних еще недостаточно для полного определения точечного континуума, хотя тотчас же нужно прибавить, что последний всегда должен быть *совершенным* множеством.

Необходимо еще одно понятие, чтобы в его сочетании с предыдущим определить континуум, а именно понятие *связного* точечного множества T. Мы называем T *связным* точечным множеством, если для двух любых его точек t и t' при любом наперед заданном произвольно малом числе ε всегда имеется несколькими способами *конечное число* таких точек $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ в T, что все расстояния $\overline{tt_1}$, $\overline{t_1t_2}$, $\overline{t_2t_3}$, ..., $\overline{t_\nu t'}$ меньше ε.

Как легко видеть, все известные нам геометрические континуумы подпадают под это понятие *связного* точечного множества. По моему мнению, эти два предиката «совершенный» и «связный» представляют собой необходимые и достаточные признаки континуума, и поэтому я определяю точечный континуум в G_n как *совершенное связное множество* [12]. Здесь «совершенный» и «связный» не просто слова, а вполне общие предикаты *континуума*, понятийно охарактеризованные самым строгим образом при помощи предыдущих определений.

Больцановское определение континуума (Paradoxien, § 38) безусловно неправильно. Оно односторонне выражает лишь *одно* свойство континуума, которое встречается и у множеств, получающихся из G_n, если удалить из G_n какое-либо «изолированное» точечное множество (ср.: Math. Ann., 1883, Bd. 21, S. 51) [здесь I.5.4]. Точно так же оно встречается у множеств, состоящих из нескольких разделенных континуумов. Очевидно, что перед нами в этих случаях нет континуума, хотя по Больцано это должно было бы быть. Мы видим, таким образом, что здесь нарушено правило «ad essentiam alicujus rei pertinet id, quo dato res necessario ponitur et quo sublato res necessario tollitur; velid, sine quo res, et vice versa quod sine re nec esse nec concipi potest» [[41]].

Точно так же в сочинении Дедекинда (Stetigkeit und irrationale Zahlen) выдвинуто, как мне кажется, односторонним образом лишь *другое* свойство континуума, а именно то, которое у него обще со *всеми «совершенными»* множествами [а следовательно, «отсутствие пробелов» по Хаусдорфу] [[42]].

§ 11

Остается показать, как мы приходим к определениям новых чисел и как получаются те естественные отрезки в абсолютно бесконечной последовательности реальных целых чисел, которые я называю *числовыми*

классами. К этому объяснению я хочу затем добавить лишь важнейшие теоремы о втором числовом классе и его отношении к первому. Ряд (I) положительных рельных целых чисел $1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots$ имеет источником своего возникновения повторное введение и объединение единиц, положенных в основу и рассматриваемых как равные. Число ν есть выражение как определенного конечного количества подобных следующих друг за другом введений, так и соединения рассматриваемых единиц в одно целое. Таким образом, образование конечных реальных целых чисел основывается на принципе присоединения единицы к некоему имеющемуся уже образованному числу. Я называю этот момент, который, как мы вскоре увидим, играет существенную роль и при порождении высших целых чисел, *первым принципом порождения.* Количество чисел ν класса (I), которое можно образовать таким образом, бесконечно, и между ними нет вовсе наибольшего числа. Поэтому, как ни противоречиво было бы говорить о наибольшем числе класса (I), с другой стороны, нет ничего нелепого в том, чтобы вообразить себе некоторое новое число — обозначим его ω[3],— которое должно быть выражением того, что нам дана согласно своему закону в своей естественной последовательности вся совокупность (I) (подобно тому как ν служит выражением того, что известное конечное количество единиц соединено в одно целое). Можно даже вообразить себе новосозданное число ω *пределом*, к которому стремятся числа ν, если понимать под этим лишь то, что ω должно быть *первым* целым числом, которое следует за всеми числами ν, т. е. которое можно назвать бо́льшим, чем любое из чисел ν. Допуская за введением числа ω следование дальнейших присоединений единицы, мы получаем с помощью первого принципа порождения дальнейшие числа:

$$\omega+1,\ \omega+2,\ \ldots,\ \omega+\nu,\ \ldots$$

Так как при этом мы опять-таки не приходим ни к какому наибольшему числу, то воображаем себе новое число, которое можно обозначить через 2ω [3] и которое должно быть первым числом, следующим за всеми числами ν и $\omega+\nu$. Если снова применить к числу 2ω *первый* принцип порождения, то мы приходим к продолжению

$$2\omega+1,\ 2\omega+2,\ \ldots,\ 2\omega+\nu,\ \ldots$$

предыдущих чисел.

Логическая функция, которая дала нам оба числа ω и 2ω, очевидно, отлична от *первого* принципа порождения. Я называю ее *вторым* принципом порождения реальных целых чисел и определяю его точнее следующим образом: если задана какая-нибудь определенная последовательность введенных целых реальных чисел, среди которых нет наибольшего числа, то на основе этого второго принципа порождения создается новое число, которое мыслится как *предел* этих чисел, т. е. определяется как первое большее всех их число.

---

[3] Знак ∞, который я применял в № 2 этой работы [здесь I.5.2], я отныне заменяю на ω, ибо знак ∞ обычно уже употребляется для обозначения неопределенных [т. е. потенциальных] бесконечностей.

Комбинируя оба принципа порождения, мы получаем поэтому последовательно дальнейшие продолжения полученных нами до сих пор чисел:

$$3\omega,\ 3\omega+1,\ \ldots,\ 3\omega+\nu,\ \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mu\omega,\ \mu\omega+1,\ \ldots,\ \mu\omega+\nu,\ \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Но и таким путем мы не приходим к какому-либо завершению, так как среди чисел $\mu\omega+\nu$ нет наибольшего.

Поэтому второй принцип порождения дает нам повод ввести первое следующее за всеми числами $\mu\omega+\nu$ число, которое можно обозначить через ω^2; к нему в определенной последовательности примыкают числа

$$\lambda\omega^2+\mu\omega+\nu.$$

Пользуясь затем обоими принципами порождения, мы приходим, очевидно, к числам следующей формы:

$$\nu_0\omega^\mu+\nu_1\omega^{\mu-1}+\ldots+\nu_{\mu-1}\omega+\nu_\mu;$$

но тогда второй принцип порождения побуждает нас к введению нового числа, которое должно быть первым числом, бо́льшим, чем все эти числа, и которое можно подходящим образом обозначить через

$$\omega^\omega.$$

Мы видим, таким образом, что образование новых чисел не имеет конца: следуя *обоим* принципам порождения, мы получаем все новые и новые числа и числовые ряды, имеющие вполне определенную последовательность.

На первый взгляд, поэтому может *показаться*, будто, пользуясь этим способом образования новых целых определенно бесконечных чисел, мы должны были бы потеряться в *безграничном*, и будто бы мы не в состоянии дать определенное предварительное завершение этому бесконечному процессу, чтобы добиться тем самым такого же ограничения, какое в известном смысле имелось фактически относительно первого числового класса (I). Там мы пользовались лишь *первым* принципом порождения, а потому выход из последовательности (I) был невозможен. *Второй* принцип порождения не только вывел нас из этой числовой области, но в соединении с *первым* принципом порождения дает возможность *уничтожить все ограничения* при образовании понятия реальных целых чисел.

Если же мы теперь заметим, что все полученные до сих пор числа и непосредственно следующие за ними удовлетворяют известному условию, то это условие,— *если рассматривать его как требование, предъявляемое ко всем вновь образуемым числам*,— оказывается новым, присоединяющимся к первым двум принципом, который назван мной *принципом стеснения или ограничения* и который, как я покажу, содействует тому, что определенный с привлечением его второй числовой класс (II) не-

только получает мощность бо́льшую, чем у (I), но именно *непосредственно следующую*, т. е. *вторую мощность*.

Вышеупомянутое условие, которому, как легко убедиться, удовлетворяет каждое из определенных до сих пор бесконечных чисел α, заключается в том, что множество чисел, предшествующих в числовой последовательности этому числу α, обладает *мощностью первого числового класса* (I). Если мы возьмем, например, число ω^ω, то предшествующие ему числа содержатся в формуле

$$\nu_0\omega^\mu+\nu_1\omega^{\mu-1}+\ldots+\nu_{\mu-1}\omega+\nu_\mu,$$

где μ, ν_0, ν_1, ..., ν_μ принимают все конечные положительные целочисленные значения, включая нуль и исключая случай, когда $\nu_0=\nu_1=\ldots=\nu_\mu=0$.

Как известно, этому множеству можно придать форму просто бесконечной последовательности, и оно, следовательно, обладает мощностью класса (I).

Так как, далее, всякая последовательность множеств, из которых каждое имеет *первую* мощность,— если сама эта последовательность тоже *первой* мощности,— дает опять-таки множество, имеющее мощность класса (I), то ясно, что при продолжении нашей числовой последовательности *в действительности будут получаться лишь такие числа*, для которых это условие выполняется *в самом деле*.

Поэтому мы определяем второй числовой класс (II) как *совокупность всех образуемых с помощью обоих принципов порождения и следующих друг за другом в определенной последовательности чисел* α:

$$\omega,\ \omega+1,\ \ldots,\ \nu_0\omega^\mu+\nu_1\omega^{\mu-1}+\ldots+\nu_{\mu-1}\omega+\nu_\mu,\ \ldots,\ \omega^\omega,\ \ldots,\ \alpha,\ \ldots,$$

которые подчинены тому условию, что все числа, предшествующие числу α, начиная с 1, образуют множество мощности числового класса (I).

§ 12

Первое, что мы должны теперь показать, это теорема, *что новый числовой класс* (II) *имеет мощность, отличную от мощности первого числового класса.*

Эта теорема получается из следующей теоремы:

«Если α_1, α_2, ..., α_ν, ... представляет собой какое-нибудь множество первой мощности различных чисел *второго* числового класса (так что мы можем представить его в форме простой последовательности (α_ν)), то или одно из этих чисел является наибольшим — пусть это будет γ, или же, если это не имеет места, существует некоторое число β второго числового класса (II), не содержащееся среди чисел α_ν и такое, что β больше, чем все α_ν, и что, наоборот, всякое целое число $\beta'<\beta$ будет превзойдено по величине некоторыми числами последовательности (α_ν). Числа γ или β можно подходящим образом назвать „верхним пределом“ множества (α_ν)».

Доказательство этой теоремы сводится просто к следующему. Пусть $\alpha_{\varkappa_2}$ — первое встречающееся в последовательности (α_ν) число, которое больше, чем α_1; $\alpha_{\varkappa_3}$ — первое встречающееся в последовательности (α_ν) число, которое больше, чем $\alpha_{\varkappa_2}$, и т. д.

Тогда имеем

$$1<\varkappa_2<\varkappa_3<\varkappa_4<\ldots,$$

$$\alpha_1<\alpha_{\varkappa_2}<\alpha_{\varkappa_3}<\alpha_{\varkappa_4}<\ldots$$

и

$$\alpha_\nu<\alpha_{\varkappa_\lambda},$$

как только

$$\nu<\varkappa_\lambda.$$

Здесь может случиться, что начиная с некоторого числа $\alpha_{\varkappa_\rho}$ все следующие за ним в последовательности (α_ν) будут меньше его. Тогда, очевидно, оно наибольшее из всех и мы имеем $\gamma=\alpha_{\varkappa_\rho}$. С другой стороны, вообразим себе множество всех целых чисел начиная с 1, которые меньше, чем α_1; присоединим к этому множеству сперва множество всех целых чисел, которые $\geqslant\alpha_1$ и $<\alpha_{\varkappa_2}$, затем множество всех чисел, которые $\geqslant\alpha_{\varkappa_2}$ и $<\alpha_{\varkappa_3}$ и т. д.; мы получим таким образом некоторую определенную часть следующих друг за другом наших первых двух числовых классов; очевидно, что это числовое множество имеет *первую* мощность как счетное объединение счетных числовых множеств, а потому существует (согласно определению (II)) определенное число β совокупности (II), которое является первым числом, большим, чем эти числа. Следовательно, $\beta>\alpha_{\varkappa_\lambda}$, а потому и $\beta>\alpha_\lambda$, так как $\varkappa_\lambda$ всегда можно взять столь большим, что оно становится больше, чем некоторое данное наперед ν, и так как тогда $\alpha_\nu<\alpha_{\varkappa_\lambda}$.

С другой стороны, легко видеть, что всякое число $\beta'<\beta$ будет превзойдено по величине некоторыми числами $\alpha_{\varkappa_\nu}$. Тем самым доказаны все части теоремы.

Отсюда теперь следует теорема, что совокупность всех чисел второго числового класса (II) не имеет мощности числового класса (I). Ведь в противном случае мы могли бы представить себе всю совокупность (II) в форме простой последовательности

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_\nu,\ \ldots,$$

которая по только что доказанной теореме или имела бы наибольший член γ, или по величине всех ее членов α_ν была бы превзойдена некоторым числом β из (II). В первом случае принадлежащее классу (II) число $\gamma+1$, а во втором — число β, с одной стороны, принадлежали бы классу (II), а с другой — не входили бы в последовательность (α_ν), что является противоречием при предположенной идентичности множеств (II) и (α_ν). Следовательно, числовой класс (II) имеет иную мощность, чем числовой класс (I).

Что из двух мощностей числовых классов (I) и (II) вторая действительно *непосредственно* следует за первой, т. е. что между обеими мощ-

ностями не существует других мощностей,— это с определенностью вытекает из теоремы, которую я сейчас приведу и докажу.

Но если мы предварительно бросим взгляд назад и рассмотрим те средства, которые привели как к расширению понятия о реальном целом числе, так и к новой, отличной от первой мощности строго определенных множеств, то увидим, что это были три выдающихся, отличающихся друг от друга логических момента. Это — *оба* вышеопределенных *принципа порождения* и присоединяющийся к ним *принцип стеснения* или *ограничения*, состоящий в требовании приступить к созданию нового целого числа с помощью одного из двух других принципов *лишь тогда*, когда совокупность всех предшествующих чисел обладает мощностью некоторого уже *имеющегося* во всем своем объеме определенного числового класса. Этим путем, соблюдая три эти принципа, можно с величайшей уверенностью и очевидностью приходить ко все новым числовым классам, а вместе с ними ко всем встречающимся в телесной и духовной природе различным последовательным мощностям. Получающиеся при этом новые числа представляют собой всегда ту же самую конкретную определенность и предметную реальность, что и прежние числа. Я поэтому, право, не знаю, что могло бы удержать нас от процесса создавания новых чисел, раз оказывается, что введение одного какого-либо из этих новых бесчисленных числовых классов стало желательным или даже неизбежным для прогресса науки. [Однако трех канторовских принципов было бы недостаточно уже при образовании ω-го числового класса.]

§ 13

Перейду теперь к обещанному доказательству того, что мощности классов (I) и (II) следуют непосредственно друг за другом, так что между ними не лежит никаких иных мощностей.

Если из совокупности (II) выбрать по какому-нибудь закону некоторое множество (α') различных чисел α', т. е. если вообразить себе какое-нибудь содержащееся в (II) множество (α'), то такое множество всегда обладает особенностями, которые можно выразить в следующих теоремах:

«Среди чисел множества (α') всегда существует *наименьшее*» [4].

«В частности, если имеется последовательность чисел совокупности (II): $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\beta, \ldots$, которые убывают по величине (так что $\alpha_\beta > \alpha_{\beta'}$, если $\beta' > \beta$), то эта последовательность необходимо обрывается на конечном числе членов и заканчивается наименьшим из этих чисел. Последовательность не может быть бесконечной».

Замечательно, что эту теорему, непосредственно очевидную, когда числа α_β являются конечными целыми числами, можно доказать и в случае бесконечных чисел α_β. Действительно, согласно предыдущей теореме, легко получаемой из определения числовой последовательности (II), среди чисел α_ν имеется наименьшее, если ограничиться лишь теми из них, у которых индекс ν конечен. Если это наименьшее число равно, скажем, α_ρ, то ясно, что ввиду $\alpha_\nu > \alpha_{\nu+1}$ последовательность α_ν, а тем самым

и вся последовательность α_β, должна состоять ровно из ρ членов, а значит, является конечной последовательностью.

Теперь получаем следующую основную теорему:

«Если (α') есть какое-нибудь числовое множество, содержащееся в совокупности (II), то возможны лишь следующие три случая: или (α') является конечной совокупностью, т. е. состоит из конечного количества чисел, или (α') имеет мощность первого класса, или, в-третьих, оно имеет мощность класса (II). Quatrum non datur» [43].

Доказательство можно легко осуществить следующим образом.

Пусть Ω — первое число *третьего* числового класса. Тогда все числа α' множества (α'), поскольку они содержатся в (II), меньше чем Ω.

Вообразим теперь числа α' расположенными по их величине. Пусть α_ω будет наименьшим из них, $\alpha_{\omega+1}$ — непосредственно следующим и т. д. Тогда получаем множество (α') в форме «вполне упорядоченного» множества α_β, где β пробегает числа нашей расширенной натуральной числовой последовательности, начиная с ω. При этом β остается, очевидно, всегда меньше или равно α_β, а так как $\alpha_\beta<\Omega$, то и $\beta<\Omega$. Следовательно, число β не может выйти за пределы числового класса (II), а остается внутри его области. Поэтому могут представиться лишь три случая: или β остается меньше некоторого определенного числа последовательности $\omega+\nu$ и тогда (α') является конечным множеством; или же β принимает все значения последовательности $\omega+\nu$, но остается меньше некоторого определенного числа последовательности (II) и тогда, очевидно, (α') имеет *первую* мощность; или, в-третьих, β принимает и произвольно большие значения в (II) и тогда β пробегает *все* числа класса (II); в этом последнем случае совокупность (α_β), т. е. множество (α'), имеет, очевидно, мощность класса (II), что и требовалось доказать.

В качестве непосредственного результата только что доказанной теоремы получаем теперь следующие предложения:

«Если имеется какое-либо строго определенное множество M мощности числового класса (II) и мы возьмем какое-нибудь бесконечное подмножество M' множества M, то совокупность M' или можно представить в форме просто бесконечной последовательности, или же оба множества M и M' можно взаимно однозначно отобразить друг на друга».

«Если имеются какое-либо строго определенное множество M второй мощности, подмножество M' множества M и подмножество M'' множества M' и известно, что множество M'' взаимно однозначно отобразимо на множество M, то и второе множество M' всегда взаимно однозначно отобразимо на первое, а значит, и на третье» [5].

Эту последнюю теорему я привожу здесь из-за ее связи с предыдущей в предположении, что M имеет мощность класса (II). Она, очевидно, справедлива и тогда, когда M имеет мощность класса (I). Но мне кажется в высшей степени замечательным, и потому я подчеркиваю это явно, что данная теорема сохраняет *общее* значение, какова бы ни была мощность множества M. К этому я еще вернусь в одной более поздней работе и тогда выявлю своеобразный интерес этой общей теоремы.

§ 14

В заключение я хочу еще рассмотреть числа второго числового класса (II) и производимые над ними операции, причем ограничусь здесь лишь наиболее простыми вещами, тогда как публикацию более обстоятельных исследований об этом я резервирую за собой на более позднее время [6].

Операции сложения и умножения я определил общим образом в § 1 и показал, что в случае бесконечных целых чисел они вообще *не* подчиняются коммутативному, но зато подчиняются ассоциативному закону. Следовательно, это применимо, в частности, к числам второго числового класса. Что касается дистрибутивного закона, то он сохраняет силу лишь в следующей форме:

$$(\alpha+\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma$$

(где $\alpha+\beta$, α, β входят как множители), как это непосредственно видно из внутреннего созерцания.

Вычитание можно рассматривать двояким образом. Если α и β — два каких-либо целых числа, причем $\alpha<\beta$, то легко убедиться, что уравнение

$$\alpha+\xi=\beta$$

всегда допускает одно и только одно решение относительно ξ, причем если α и β являются числами из (II), то ξ будет числом из (I) или (II). Это число ξ будет полагаться равным $\beta-\alpha$.

Если, наоборот, рассматривать следующее уравнение:

$$\xi+\alpha=\beta,$$

то оказывается, что часто это уравнение нельзя решить относительно ξ. Так, например, обстоит дело в случае уравнения

$$\xi+\omega=\omega+1.$$

Но даже и в тех случаях, когда уравнение $\xi+\alpha=\beta$ допускает решение относительно ξ, часто оказывается, что ему удовлетворяет бесконечно много числовых значений ξ. Однако из этих различных решений одно всегда будет наименьшим.

Для этого наименьшего корня уравнения

$$\xi+\alpha=\beta,$$

если только оно вообще разрешимо, мы выбираем обозначение $\beta_{-\alpha}$, что вообще отлично от $\beta-\alpha$, которое всегда существует, если только $\alpha<\beta$.

Если, далее, между тремя целыми числами β, α, γ имеет место равенство

$$\beta=\gamma\alpha$$

(где γ — множитель), то легко убедиться, что уравнение

$$\beta=\xi\alpha$$

не имеет никакого иного решения относительно ξ, кроме $\xi=\gamma$, и в этом случае γ обозначают через β/α.

Наоборот, мы находим, что уравнение

$$\beta=\alpha\xi$$

(где ξ — множимое), если оно вообще разрешимо относительно ξ, часто имеет несколько и даже бесконечно много корней, среди которых, однако, один всегда является наименьшим. Этот наименьший корень, удовлетворяющий уравнению $\beta=\alpha\xi$, если только последнее вообще допускает решение, будет обозначаться через

$$\frac{\beta}{\underline{\underline{\alpha}}}.$$

Числа α второго числового класса двоякого рода: 1) такие α, которые имеют в этой последовательности непосредственно предшествующий им член, являющийся тогда числом α_{-1}, и эти числа я называю числами первого рода; 2) такие α, которые не имеют в последовательности непосредственно предшествующего им члена и для которых, следовательно, не существует α_{-1}, и эти числа я называю числами второго рода. Например, числа ω, 2ω, $\omega^{\nu}+\nu$, ω^{ω} являются числами второго рода, напротив, $\omega+1$, $\omega^2+\omega+2$, $\omega^{\omega}+3$ суть числа первого рода.

В соответствии с этим и *простые числа* второго числового класса, которые я определил общим образом в § 1, распадаются на простые числа второго и простые числа первого родов.

Простыми числами второго рода в порядке их появления в числовом классе (II) являются следующие:

$$\omega, \omega^{\omega}, \omega^{\omega^2}, \omega^{\omega^3}, \ldots,$$

так что среди всех чисел вида

$$\varphi=\nu_0\omega^{\mu}+\nu_1\omega^{\mu-1}+\cdots+\nu_{\mu-1}\omega+\nu_{\mu}$$

имеется только *одно* простое число ω *второго* рода. Но из этого сравнительно скудного распределения простых чисел второго рода не следует заключать, что совокупность всех их обладает меньшей мощностью, чем сам числовой класс (II). Оказывается, что эта совокупность имеет ту же мощность, что и (II).

Простые числа первого рода суть прежде всего

$$\omega+1, \omega^2+1, \ldots, \omega^{\mu}+1, \ldots$$

Это единственные простые числа первого рода, которые встречаются среди чисел, только что обозначенных через φ. Совокупность всех простых чисел первого рода в (II) тоже имеет мощность класса (II).

Простые числа второго рода обладают свойством, которое придает им совсем особенный характер. Если η является подобным простым числом (второго рода), то всегда $\eta\alpha=\eta$, если α — какое-нибудь число, меньшее η. Отсюда следует, что если α и β — два каких-нибудь числа, которые оба меньше η, то и произведение $\alpha\beta$ всегда меньше, чем η.

Если для начала мы ограничимся числами второго числового класса, имеющими вид φ, то для них получаются следующие правила сложения и умножения. Пусть

$$\varphi = \nu_0\omega^{\mu} + \nu_1\omega^{\mu-1} + \ldots + \nu_{\mu},$$
$$\psi = \rho_0\omega^{\lambda} + \rho_1\omega^{\lambda-1} + \ldots + \rho_{\lambda},$$

где мы полагаем ν_0 и ρ_0 отличными от нуля.

Сложение

1) Если $\mu<\lambda$, то имеем

$$\varphi+\psi=\psi.$$

2) Если $\mu>\lambda$, то имеем

$$\varphi + \psi = \nu_0\omega^{\mu} + \ldots + \nu_{\mu-\lambda-1}\omega^{\lambda+1} + (\nu_{\mu-\lambda} + \rho_0)\,\omega^{\lambda} + \rho_1\omega^{\lambda-1} + \rho_2\omega^{\lambda-2} + \ldots + \rho_{\lambda}.$$

3) При $\mu=\lambda$ получаем

$$\varphi+\psi=(\nu_0+\rho_0)\,\omega^{\lambda}+\rho_1\omega^{\lambda-1}+\cdots+\rho_{\lambda}.$$

Умножение

1) Если ν_{μ} отлично от нуля, то имеем

$$\varphi\psi = \nu_0\omega^{\mu+\lambda} + \nu_1\omega^{\mu+\lambda-1} + \ldots + \nu_{\mu-1}\omega^{\lambda+1} + \nu_{\mu}\rho_0\omega^{\lambda} + \rho_1\omega^{\lambda-1} + \ldots + \rho_{\lambda}.$$

В случае $\lambda=0$ последний член справа есть $\nu_{\mu}\rho_0$.

2) Если $\nu_{\mu}=0$, то имеем

$$\varphi\psi = \nu_0\omega^{\mu+\lambda} + \nu_1\omega^{\mu+\lambda-1} + \ldots + \nu_{\mu-1}\omega^{\lambda+1} = \varphi\omega^{\lambda}.$$

Разложение числа φ на его простые множители таково. Если имеем

$$\varphi = c_0\omega^{\mu} + c_1\omega^{\mu_1} + c_2\omega^{\mu_2} + \ldots + c_{\sigma}\omega^{\mu_{\sigma}},$$

где

$$\mu>\mu_1>\mu_2>\cdots>\mu_{\sigma}$$

и

$$c_0,\ c_1,\ \ldots,\ c_{\sigma}$$

являются отличными от нуля положительными конечными числами, то

$$\varphi = c_0\,(\psi^{\mu-\mu_1} + 1)\,c_1\,(\omega^{\mu_1-\mu_2} + 1)\,c_2 \ldots c_{\sigma-1}\,(\omega^{\mu_{\sigma-1}-\mu_{\sigma}} + 1)\,c_{\sigma}\omega^{\mu_{\sigma}}.$$

Если представить себе еще $c_0, c_1, \ldots, c_{\sigma-1}$ разложенными на простые множители по правилам для первого числового класса, то тогда получаем разложение φ на простые множители, ибо множители $\omega^{\varkappa}+1$ и ω, как замечено выше, сами являются простыми числами. Это разложение чисел вида φ определяется единственным образом [однозначно] даже и по отношению к порядку множителей, если отвлечься от перестановочности простых множителей внутри отдельных c и если известно, что последний множитель должен быть степенью числа ω или равен единице и что ω может быть множителем только на последнем месте. Что касается обобщения этого разложения на простые множители на любые числа второго числового класса (II), то об этом я напишу при случае впоследствии [ср. I. 10, § 19].

Примечания автора к 5.5

[1] *Учение о многообразиях* [44]. Этими словами я обозначаю одну чрезвычайно обширную дисциплину, которую до сих пор я пытался разработать лишь в специальной форме арифметического или геометрического учения о множествах. Под «многообразием» или «множеством» я понимаю вообще всякое многое, которое можно мыслить как единое, т. е. всякую совокупность определенных элементов, которая может быть связана в одно целое с помощью некоторого закона, и таким образом я думаю определить нечто, родственное платоновскому εἶδος или ἰδέα, а также тому, что Платон в своем диалоге «Филеб или высочайшее благо» называет μικτόν. Он противопоставляет его ἄπειρον' у, т. е. безграничному, неопределенному, называемому мною несобственно бесконечным, равно как и πέρας' у, т. е. границе, и называет его упорядоченной «смесью» обоих последних. Что эти понятия пифагорейского происхождения — на это намекает сам Платон; ср.: *Boeckh A.* Philolaos des Pithagoreers Leheren. Berlin, 1819 [45].

К § 4

[2] *Аристотель.* Ср. изложение Целлера в его большом труде: Die Philosophie der Griechen. 3. Aufl. T. 2, Abt. 2, S. 393—403. Понимание Платона бесконечного совсем иное, чем у Аристотеля.— Ср. *Zeller E.* T. 2, Abt. 1, S. 628—646. Точно так же я нахожу точки соприкосновения с моими воззрениями в философии Николая Кузанского.— Ср.: *Zimmermann R.* Der Cardinal Nicolaus von Cusa als Vorgänger Leibnizens.— Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien, 1852. То же самое замечаю я по поводу Джордано Бруно, последователя Кузанца.— Ср.: *Brunnhofer.* Giordano Brunos Weltanschauung und Verhängnis. Leipzig, 1882 [46].

Однако существенное различие состоит в том, что я раз навсегда закрепляю в соответствии с понятием различные градации собственно бесконечного при помощи числовых классов (I), (II), (III) и т. д. и лишь тогда ставлю задачу не только математически исследовать отношения сверхконечных чисел, но указать и проследить их повсюду, где они встречаются в природе. Что на этом пути нам, продвигаясь все дальше, не удается достичь никакой непереходимой границы, получить хотя бы только приближенное постижение абсолютного,— это не подлежит для меня никакому сомнению. Абсолютное можно лишь признать, но никогда не познать, хотя бы приближенно. Ведь подобно тому, как внутри первого числового класса (I) всякое сколь угодно большое конечное число всегда имеет перед собой одну и ту же мощность конечных чисел, бóльших, чем оно, так и за каждым сколь угодно большим сверхконечным числом любого из высших числовых классов (II) или (III) и т. д. следует совокупность чисел и числовых классов, не теряющая ничего в мощности по сравнению с целым абсолютно бесконечной совокупности, начинающейся с 1. Здесь наблюдается нечто, аналогичное тому, что Альбрехт фон Галлер говорит о вечности: «я его (чудовищно огромное число) отнимаю, а ты (вечность) лежишь целая передо мной» [47]. Поэтому абсолютно бесконечная последовательность чисел представляется мне в известном смысле подходящим символом абсолютного. Наоборот, бесконечность первого числового класса, которую одну употребляли до сих пор в качестве такого символа, представляется мне — так как я считаю ее постижимой идеей (не представлением) — чем-то исчезающе ничтожным по сравнению с абсолютной бесконечностью. Замечательным представляется мне и то, что каждому из числовых классов, а следо-

вательно, и каждой из мощностей соответствует некоторое вполне определенное число абсолютно бесконечной числовой совокупности и притом таким образом, что для каждого сверхконечного числа γ имеется мощность, которую можно назвать γ-й. Значит, и различные мощности образуют некоторую бесконечную последовательность. Это тем замечательнее, что число γ, указывающее порядок какой-нибудь мощности (если γ имеет непосредственно предшествующее ему число), находится в таком отношении к числам числового класса, обладающего этой мощностью, что никакое описание не может изобразить малости этого отношения, и это тем более, чем бо́льшим принимается γ [7].

К § 5

3) *determinari possunt.* Неопределенному, переменному, несобственно бесконечному,— в какой бы форме они ни проявлялись,— я не могу приписать никакого бытия, ибо они не что иное, как или понятия отношения, или чисто субъективные представления, воззрения (imaginationes), но ни в коем случае не адекватные идеи. Поэтому если бы в положении «infinitum actu non datur» [48] имелось бы в виду только несобственно бесконечное, то я мог бы подписаться под ним, но только в этом случае оно представляло бы собой чистую тавтологию. Но мне кажется, что смысл этого положения в указанных источниках заключается в том, что в нем утверждается невозможность логического введения определенной бесконечности, а в таком виде я считаю его ложным.

К § 7

4) *Реалисты.* Позитивистская и реалистическая точка зрения на бесконечное рассматривается, например, в книгах: *Dühring E.* Natürliche Dialektik. Berlin, 1865, S. 109—135; *Kirchmann J. H.* Katechismus der Philosophie, 1877, S. 124—130 [49]. Ср. также примечания Ибервега к трактату Беркли о началах человеческого познания в «Философской библиотеке» Кирхмана [50]. Я могу лишь повторить, что в оценке несобственно бесконечного я по существу согласен со всеми этими авторами. Пункт различия заключается лишь в том, что они рассматривают это синкатегорематическое бесконечное как *единственно* постижимое при помощи «оборотов» или понятий, а здесь даже только при помощи понятия отношения. Аргументы Дюринга против собственно бесконечного можно было бы сформулировать гораздо короче. Как мне кажется, они сводятся или к тому, что определенное конечное число, сколь бы большим ни мыслить его, никогда не может быть бесконечным, а это непосредственно следует из его понятия; или же к тому, что переменное неограниченно большое конечное число нельзя мыслить с предикатом определенности, а значит, и с предикатом бытия,— а это опять-таки вытекает из сущности изменчивости. Для меня несомненно, что это ровно ничего не говорит против возможности мыслить определенные сверхконечные числа. А между тем эти аргументы считаются доводами против реальности сверхконечных чисел. Мне эта аргументация кажется похожей на то, как если бы из факта наличия бесчисленно многих интенсивностей зеленого цвета хотели заключить, что не может вовсе существовать красного цвета. Замечательно, однако, то, что сам Дюринг на с. 126 своего сочинения признается, что должно существовать основание для объяснения «возможности неограниченного синтеза», которое он называет «понятным образом совершенно неизвестным». В этом, как мне кажется, заключается противоречие.

Но мы находим также, что и мыслители, близкие к идеализму или даже полностью разделяющие его точку зрения, отказывают в каком-либо оправдании бесконечным числам.

Х. Зигварт в своем превосходном труде «Logik. Bd. 2. Die Methodenlehre» (Tübingen, 1878) рассуждает точно так же, как и Дюринг, и говорит на с. 47: «Бесконечное число есть contradictio in adjecto» [[51]].

Аналогичное имеется у Канта и Я. Ф. Фриза. Ср. у последнего «System der Metaphysik» (Heidelberg, 1865), § 51, 52. Философы гегелевской школы тоже не признают собственно бесконечные числа; укажу лишь на ценное произведение К. Фишера «System der Logik und Metaphysik oder Wissenschaftslehre». 2. Aufl. (Heidelberg, 1865), S. 275 [[52]].

К § 8

[5] То, что я здесь называю «интрасубъективной» и «имманентной» реальностью понятий или идей, могло бы совпадать со значением слова «адекватный», как его употребляет Спиноза, когда он говорит: «Per ideam adaequatam intelligo ideam, quae, quatenus in se sine relatione ad objectum consideratur, omnes verae ideae sive denominationes intrinsecas habent» (Ethica pars II, def. IV) [[53]].

[6] Это убеждение в основном совпадает как с принципами платоновской системы, так и с одной существенной чертой системы Спинозы. В первом отношении укажу: *Zeller E.* Die Philosophie der Griechen. 3. Aufl. T. 2. Abt. 1, S. 541—602 [[54]]. Здесь в самом начале раздела говорится: «Только познание при помощи понятий может доставлять (по Платону) истинное знание. Но поскольку нашим представлениям присуща истина — эту предпосылку Платон разделяет с другими (Парменид),— постольку предмету их должна быть присуща действительность, и наоборот. То, что можно познать, есть; того, чего нельзя познать, нет; и в той же мере, в какой нечто есть, оно и познаваемо».

Что касается Спинозы, то достаточно напомнить лишь его теорему в «Этике», pars II, prop. VII: «ordo et connexio idearum idem est ac ordo et connexio rerum» [[55]].

И в философии Лейбница можно обнаружить тот же самый теоретико-познавательный принцип. Лишь со времени новейшего эмпиризма, сенсуализма и скептицизма, равно как и вышедшего отсюда кантовского критицизма, стали искать источник знания и достоверности в чувствах или по крайней мере в так называемых чистых формах созерцания мира представлений, признавая необходимость ограничиться ими. По моему убеждению, эти элементы вовсе не доставляют надежного познания, ибо последнее может быть получено лишь с помощью понятий и идей; внешний опыт может, самое большее, дать лишь толчок к созданию этих идей, по существу же они образуются при помощи внутренней индукции и дедукции, как нечто, что до известной степени уже лежало в нас и лишь было пробуждено и доведено до сознания.

К § 8 и 9

[7], [8] Процесс правильного образования понятий, по-моему, повсюду один и тот же: берут некоторую лишенную свойств вещь, которая первоначально есть не что иное, как имя или знак A, и придают ей закономерным образом различные, даже бесконечно многие понятные предикаты, значение которых известно уже из наличных идей и кото-

рые не должны противоречить друг другу. Благодаря этому определяются отношения A к уже имеющимся понятиям и особенно к родственным. Как только это закончено, так имеются налицо все условия для пробуждения дремлющего в нас понятия A, и оно появляется на свет, снабженное такой интрасубъективной реальностью, какой вообще можно требовать от понятий. Констатировать его транзиентное значение является тогда делом метафизики.

К § 10

9) *Thomas von Aquino.* Opuscula, XLII de natura generis, cap. 19 et 20; LII de natura loci; XXXII de natura materiae et de dimensionibus interminatis. Ср.: *Jourdain C.* La philosophie de Saint Thomas d'Aquino, p. 303—329; *Werner K.* Der helige Thomas von Aquino. Regensburg, 1859, Bd. 2, S. 177—201 [56].

10) Даже совокупность всех непрерывных, а также совокупность всех интегрируемых функций одного или нескольких переменных могут иметь лишь мощность второго числового класса (II); но если отбросить все ограничения и рассматривать совокупность всех непрерывных и разрывных функций одного или нескольких переменных, то это множество имеет мощность третьего числового класса (III) [8].

11) О совершенных множествах можно доказать теорему, что они никогда не обладают мощностью класса (I).

В качестве примера совершенного точечного множества, не являющегося всюду плотным ни в каком сколь угодно малом интервале, я приведу совокупность всех действительных чисел, содержащихся в формуле

$$z = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \ldots + \frac{c_\nu}{3^\nu} + \ldots,$$

где коэффициенты c_ν произвольно принимают два значения 0 и 1 и ряд может состоять как из конечного, так и бесконечного числа членов.

12) Следует обратить внимание на то, что это определение континуума свободно от указания на так называемую размерность какого-либо непрерывного образования. А именно это определение охватывает и такие континуумы, которые состоят из связных кусков различной размерности, вроде линий, поверхностей, тел и т. д. Как-нибудь в другой связи я покажу, как можно закономерным образом перейти от этого общего континуума к более частным континуумам с определенной размерностью. Я отлично знаю, что слово «*континуум*» до сих пор не получило какого-либо постоянного значения. Поэтому мое определение его одним покажется слишком *узким*, другим — слишком *широким*; надеюсь, что мне удалось найти *правильную середину.*

Согласно моим взглядам, под *континуумом* можно понимать *только совершенное* и *связное* образование. В соответствии с этим, например, отрезок прямой, у которого отсутствует одна или обе концевые точки, а равным образом площадь круга, у которой исключена граница, не являются полными континуумами; такие точечные множества я называю полуконтинуумами.

Вообще под *полуконтинуумом* я понимаю *несовершенное, связное* и принадлежащее ко *второму классу* точечное множество, которое обладает тем свойством, что любые две его точки могут быть связаны при помощи некоторого *полного* континуума, являющегося составной частью этого точечного множества. Так, например, пространство, обозначенное мною в Math. Ann., 1882, Bd. 20, S. 119 [здесь I.5.3] через U и по-

лучающееся из G_n удалением из него какого-нибудь точечного множества *первой* мощности, есть *полуконтинуум*.

Производное множество связного точечного множества *всегда* является *континуумом*, независимо от того, имеет ли это связное множество *первую* или *вторую* мощность.

Если связное точечное множество имеет *первую* мощность, то я не могу назвать его *ни* континуумом, *ни* полуконтинуумом.

Благодаря понятиям, поставленным мною во главу учения о мнообразиях, я берусь исследовать все образования алгебраической и трансцендентной геометрий во всех их возможностях, причем общность и строгость результатов не могут быть превзойдены никаким другим методом.

[Примечания издателя к 5.5]

[1] Здесь содержится намек на книгу: *Kirchhoff G.* Vorlesungen über Mechanik. Leipzig, 1876, где в первом предложении § 1 автор поставил в качестве задачи механики «полное и простейшее описание происходящих в природе движений» [57].

[2] Следовательно, уже здесь высказывается «канторовское предположение», что континуум имеет вторую мощность, и выражается намерение дать этому «строгое доказательство». Однако такое доказательство не смогли предложить ни Кантор, ни другие, и этот вопрос остается открытым и сегодня [58].

[3] Здесь и далее Кантор ставит множитель на первом месте и пишет 2ω вместо $\omega+\omega$. В более позднем систематическом изложении I.10 он, наоборот, на первое место ставит множимое и пишет $\omega 2$, что представляется предпочтительней из соображений аналогии, поскольку и при сложении только второе слагаемое (то, что прибавляется), когда оно конечно, модифицирует, увеличивает сумму. Ср. с. 193, 212.

[4] Что во всяком множестве (α') трансфинитных чисел всегда имеется наименьшее, можно убедиться следующим образом. Пусть (β) — совокупность всех (конечных и бесконечных) чисел β, которые меньше, чем все числа α'. Такие числа должны существовать, например число 1, если оно само не принадлежит (α'); если же оно принадлежит (α'), то, естественно, является и наименьшим. Теперь или среди чисел β имеется наибольшее β_1, так что непосредственно следующее за ним число β_1' не принадлежит (β), а значит, оно $\leqslant\alpha'$ для каждого α', но тогда само β_1' принадлежит (α') и является в нем наименьшим; или же числа β не имеют наибольшего, но тогда они имеют (в соответствии со вторым принципом порождения) некий «предел» β', непосредственно следующий за всеми β, а значит, опять-таки $\beta'\leqslant\alpha'$ для каждого α', и тогда это число β' необходимо принадлежит (α') и является наименьшим среди всех α'.

[5] Высказанная здесь (без доказательства) теорема, по которой всякие два множества, каждое из которых «эквивалентно» некоторой составной части другого (отобразимо на нее взаимно однозначно), должны быть и сами эквивалентны, впервые была доказана в 1896 г. Э. Шрёдером, а в 1897 г. Ф. Бернштейном, и с тех пор эта «теорема эквивалентности» стала одной из важнейших теорем всей теории множеств. Сам Кантор, по-видимому, не нашел столь простого и наглядного в бернштейновской форме доказательства этой теоремы; в более поздней работе I.10, в которой предпринято новое углубленное обоснование теории множеств, эта теорема, как и ее доказательство, представлены столь же мало [59].

[6] Развитые здесь основные идеи формально арифметической теории, некоторой алгебры трансфинитных порядковых чисел, были снова подняты и более подробно

обоснованы с помощью нового определения порядковых чисел в завершающей канторовские исследования работе I.10, § 14 и след. В данном здесь изложении, еще полностью основывающемся на первоначальном чисто конструктивном их определении при помощи «принципов порождения», результаты приводятся порой без достаточного обоснования или же вместо доказательства привлекается «наглядность». Поэтому во всех тех местах, где обоснование оказывается недостаточным, читатель для сравнения и дополнения может обратиться к более подробному изложению в указанной работе.

[7] (к заключительному предложению примеч. 2) к § 4).

Вопрос о том, может ли трансфинитная мощность $\aleph_\gamma$ «второго рода» (у которой индекс γ является предельным числом) быть *равной* ее индексу, оставлен здесь Кантором открытым и нигде не обсуждался в его последующих работах. Фактически ответ на него утвердителен, как это легко доказать при помощи теории «нормальных функций» (*Hausdorff F.* Grundzüge der Mengenlehre. 7. Aufl. Kap. 5, § 3) [60], первым примером которой являются канторовские ε-числа. ς-числа, т. е. начальные числа ω_ς числовых классов, которые равны собственному индексу, образуют систему того же типа, как и вся открытая («абсолютно бесконечная») числовая последовательность. Ср.: *Hessenberg G.* Grundbegriffe der Mengenlehre. Göttingen, 1906, § 58, S. 607 [61]. На основании «наглядности», на которой многие философы и математики хотели бы основать все математическое познание, существование таких чисел пришлось бы безусловно отрицать. «A fortiori» заключение по аналогии, кажущееся столь очевидным наивному мышлению, как раз неприменимо для трансфинитного.

[8] (к примеч. 10) к § 10). В предположении, что множество всех (непрерывных и) разрывных функций имеет мощность третьего числового класса, уже заключается расширение «канторовского предположения», по которому континуум имеет вторую мощность. К настоящему времени лишь доказано, что это множество разрывных функций обладает мощностью $2^{\mathfrak{c}}$, если через $\mathfrak{c}$ обозначить мощность континуума.

5.6. О БЕСКОНЕЧНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ТОЧЕЧНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ *

§ 15

В № 5 этой работы я для связности высказал в различных местах отдельные теоремы теории множеств, не давая там их доказательств, так как в плане того сообщения должны были быть более обстоятельно изложены по преимуществу другие вещи. Теперь же я хочу попытаться восполнить оставшиеся пробелы и дать в этом номере, а также в тех, которые вскоре последуют, отсутствующие доказательства, причем, однако, я не ограничиваюсь этим, а намереваюсь изложить теоремы, которые хотя и связаны с содержанием предшествующих номеров, но или не упоминались совсем, или же не были сформулированы с требуемой точностью.

---

* Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten. N 6.— Math. Ann., 1884, Bd. 23, S. 453—488. Перевод Ф. А. Медведева.

Приведу сначала следующее простое и очень общее соображение.

Если некоторая n-мерная часть H n-мерного непрерывного плоского пространства G_n содержит точечное множество P, причем H может быть и самим этим пространством G_n, и мы в соответствии с некоторым определенным, но произвольным законом разложим эту часть пространства H на конечное или бесконечное число расчлененных и связных в себе n-мерных частей

$$H_1, H_2, \ldots, H_\nu, \ldots$$

(совокупность которых, если она бесконечна, по № 3 [здесь I.5.3] всегда имеет *первую мощность*, а значит, может быть представлена в форме простой бесконечной последовательности (H_ν)), причем взаимные границы *причисляются* к одной из примыкающих друг к другу частей (так что одна и та же точка из H принадлежит *одной* и *только одной* из её частей H_ν), то точечное множество P распадается на соответствующее число *подмножеств*

$$P_1, P_2, \ldots, P_\nu, \ldots,$$

где P_ν — та *часть* множества P, которая всеми своими точками принадлежит области H_ν. При некоторых обстоятельствах P_ν может также оказаться равным нулю,— если никакая точка из P не попадет в часть пространства H_ν.

Обозначим теперь буквой Υ какое-нибудь *качество* или *свойство*, которое можно высказать о точечных множествах в G_n, и о котором делаются лишь следующие предположения:

1) если какое-либо точечное множество P, находящееся в n-мерной, *полностью расположенной в конечном*, части H пространства G_n, обладает *свойством* Υ, а область H разложена вышеуказанным способом по какому-нибудь закону на *конечное* число m частичных областей

$$H_1, H_2, \ldots, H_{m-1}, H_m,$$

вследствие чего P распадается на подмножества

$$P_1, P_2, \ldots, P_{m-1}, P_m,$$

то этим же свойством Υ должно обладать и *по крайней мере* одно из подмножеств $P_1, P_2, \ldots, P_{m-1}, P_m$;

2) если P — какое-либо точечное множество в G_n, *обладающее свойством* Υ, а Q — любое другое точечное множество в G_n, не имеющее *ни одной точки, общей с* P, то множество $P+Q$ тоже всегда должно обладать свойством Υ.

В качестве простейшего примера свойства точечных множеств, имеющего характер Υ, я приведу то свойство бесконечного множества, в соответствии с которым оно состоит из *бесконечно многих* точек; это свойство, очевидно, удовлетворяет обоим только что сформулированным предположениям.

Теперь справедливо следующее предложение:

Теорема I. *Если H — какая-либо полностью расположенная в конечном n-мерная часть пространства G_n, а P — точечное множество, содержащееся в H и обладающее свойством Υ, то существует по край-*

ней мере одна точка g в H такая, что если K_n — какой-нибудь n-мерный шар с центром g, то составная часть множества P, попадающая в область K_n, всегда обладает свойством Υ, сколь бы малым ни брался радиус шара K_n [1].

Для доказательства этой теоремы разлагаем по какому-либо закону область H, *расположенную полностью в конечном*, на *конечное* число n-мерных частичных областей, в каждой из которых все расстояния между двумя произвольными точками меньше 1. Легко видеть, что это всегда возможно. Среди соответствующих подмножеств, на которые при этом распадается P, по крайней мере одно должно обладать свойством Υ (по предположению 1). В соответствии с каким-либо законом выберем одно из этих подмножеств и обозначим его через $P_{(1)}$; ту часть области H, в которой расположено $P_{(1)}$, обозначим через $H_{(1)}$.

Теперь также разлагаем по какому-либо *закону* область $H_{(1)}$ на *конечное* число n-мерных частичных областей, в каждой из которых все расстояния меньше $^1/_2$; из соответствующих подмножеств, на которые при этом распадается $P_{(1)}$, выбирается по некоторому закону *одно* подмножество, обладающее свойством Υ; обозначаем его через $P_{(2)}$, а соответствующую часть области $H_{(1)}$, в которой расположено $P_{(2)}$, через $H_{(2)}$. Так мы продолжаем и получаем закономерную бесконечную последовательность n-мерных частичных областей:

$$H_{(1)}, H_{(2)}, \ldots, H_{(\nu-1)}, H_{(\nu)}, \ldots$$

каждая из которых содержится в предыдущей и у которых все входящие в $H_{(\nu)}$ расстояния меньше $1/\nu$. Одновременно мы имеем некоторую закономерную последовательность точечных множеств

$$P_{(1)}, P_{(2)}, \ldots, P_{(\nu-1)}, P_{(\nu)}, \ldots,$$

каждое из которых является составной частью предыдущего и всегда обладает свойством Υ; $P_{(\nu)}$ есть та составная часть множества P, которая всеми своими точками принадлежит области $H_{(\nu)}$.

По известной теореме арифметического анализа существует *одна вполне определенная* точка g пространства H, которая принадлежит *одновременно всем* частичным областям $H_{(\nu)}$, а отсюда легко видеть, что эта точка g расположена так, как она была описана в нашей теореме.

Замечу, что примененный здесь метод доказательства, который довольно трудно заменить на существенно иной, в своей основе очень давний. В новое время мы находим его, между прочим, в некоторых теоретико-числовых исследованиях у Лагранжа, Лежандра и Дирихле, в «Курсе анализа» Коши (третье примечание) и в некоторых работах Вейерштрасса и Больцано. Поэтому мне кажется неправильным относить его главным образом или даже исключительно к Больцано, как это стало обычным в последнее время [62].

Следует, далее, заметить, что наш метод доказательства оспаривается некоторыми геометрами. Используемые при этом аргументы являются в высшей степени тонкими; они ставили в затруднение, смущали и запугивали многих из тех, чья поддержка этого способа доказательств

имела бы большое значение. Однако выдвигаемые возражения по своей сути не новы, а очень сходны с теми паралогизмами, которыми пользовался Зенон Элейский, чтобы поставить под сомнение возможность движения или множественность вещей (ср. «Физику» Аристотеля, VI,9) [[63]]. Такого рода явления можно указать почти в каждом веке. Например, в семнадцатом столетии в Париже жил некий кавалер де Мере, который своими софизмами способствовал наряду с прочим тому, что величайший ум Франции Паскаль полностью отказался от занятий математикой. Очень интересные детали об этом имеются в «Dictionnaire historique et critique» Бейля в статье о Зеноне Сидонском (ученике Аполлодора; не смешивать с Зеноном Элейским) [[64]]. Этот философ-эпикуреец получил известность благодаря труду, в котором нападал на достоверность математических доказательств. Поэтому он оказался предшественником направления, называемого теперь «метаматематикой». Стоик Посидоний написал направленный против него труд, с целью отразить атаки на математику. Обе книги потеряны.

Очень обширный класс точечных множеств образуют те из них, которые имеют *первую* мощность и которые в № 1—4 я назвал *счетными* множествами. Последний термин *можно*, впрочем, сохранить в этом более узком смысле и далее с тем, чтобы отличить указанные множества от множеств *более высокой* мощности, хотя в № 5 [здесь I. 5.5] я *показал* и *подчеркнул*, что, строго говоря, и о множествах *второй, третьей* или *большей* мощности *всегда можно* сказать, что они *счетны*; различие состоит лишь в том, что, в то время как множества *первой* мощности могут быть пересчитаны только посредством (с помощью) чисел *второго* числового класса, пересчет множеств второй мощности может быть выполнен *только посредством* чисел третьего числового класса, множеств *третьей* мощности — *только* посредством чисел *четвертого* класса и т. д.

Если, например, вообразим совокупность (φ) всех рациональных чисел, которые $\geqslant 0$ и $\leqslant 1$, заданной в соответствии с указанным в журнале Крелле, т. 84, с. 250 [здесь I.3] законом в форме просто бесконечной последовательности

$$(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu, \ldots),$$

то в этой форме она образует «*вполне упорядоченное множество*», количество которого согласно определениям [с. 47 и 92] равно ω.

Однако если мы запишем эту же совокупность, например, в двух других *формах вполне упорядоченных множеств*

$$(\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_{\nu+1}, \ldots, \varphi_1),$$

$$(\varphi_1, \varphi_3, \ldots, \varphi_{2\nu-1}, \ldots, \varphi_2, \varphi_4, \ldots, \varphi_{2\nu}, \ldots),$$

то *по отношению* к этим формам ей соответствуют числа $\omega+1$ и 2ω. И если α — какое-либо число *второго* числового класса, то можно вообразить несчетно много *вполне упорядоченных* множеств, которые по их *составу* полностью совпадают с совокупностью (ω), но по своим формам имеют в виде количества заранее заданное число α.

Как я неоднократно — вследствие важности этого обстоятельства — подчеркивал в № 5, при преобразовании формы *вполне упорядоченного* множества его *мощность* изменяться *не будет*. Зато при помощи такого преобразования определенно можно сделать иным его *количество*.

Точно так же любое множество (ψ) *второй мощности можно прежде всего* привести к форме вполне упорядоченного множества

$$(\psi_\omega, \psi_{\omega+1}, \ldots, \psi_\alpha, \ldots),$$

где α пробегает все числовые значения *второго* числового класса. В *этой* форме его *количество* равно Ω, где Ω — *первое*, т. е. *наименьшее* число *третьего* числового класса. Но *то же самое* множество (ψ) можно бесчисленно многими способами представить в форме *вполне упорядоченного* множества, перечислимого числом A, где A — *любое данное заранее* число *третьего* числового класса и т. д.

На вопрос о том, *какие* преобразования вполне упорядоченного множества будут *изменять* его *количество*, а какие *нет*, можно ответить просто: количество не будут *изменять* те и только те преобразования, которые можно свести к конечному или бесконечному множеству транспозиций, т. е. *перестановок двух любых элементов*.

Теперь я хочу сформулировать два предложения о точечных множествах *первой* мощности, которые часто применяются в учении о множествах.

Теорема II. *Пусть точечное множество P, расположенное в бесконечном пространстве G_n, обладает тем свойством, что если H — любая находящаяся в конечном часть пространства G_n, то принадлежащая этой H составная часть множества P конечна или первой мощности. Тогда и само P имеет первую мощность (разве только P не окажется конечным).*

Доказательство можно осуществить разными способами, разлагая G_n на бесконечное количество обособленных n-мерных частей

$$H_1, H_2, \ldots, H_\nu, \ldots,$$

каждая из которых полностью расположена в конечном; тем самым P распадается на бесконечное количество подмножеств

$$P_1, P_2, \ldots, P_\nu, \ldots$$

А так как каждое из последних конечно или имеет первую мощность, то это же справедливо и для их объединения, являющегося не чем иным, как множеством P. См. № 3 [здесь I.5.3].

Теорема III. *Пусть Q — какое-либо точечное множество в G_n, $Q^{(1)}$ — его первое производное множество, а R — некоторое точечное множество, не имеющее общих точек с Q и $Q^{(1)}$ и, кроме того, обладающее тем свойством, что если H — какая-нибудь часть пространства G_n, не содержащая ни точек множества Q, ни точек множества $Q^{(1)}$, то принадлежащая области H составная часть множества R конечна или первой мощности. Тогда и само R конечно или первой мощности.*

Доказательство. Пусть ρ — какая-нибудь положительная величина. Вокруг каждой точки q из $\mathfrak{M}(Q, Q^{(1)})$ как центра вообразим n-мерный шар $K(q, \rho)$, причем его $(n-1)$-мерную границу причисляем к нему. Все эти шары $K(q, \rho)$ могут отчасти входить друг в друга, однако они в их *совокупности* определяют *некую*, связную или нет n-мерную часть пространства G_n. Эту часть, являющуюся в соответствии с терминологией из № 2 данной работы [здесь I.5.2] *общим наименьшим кратным* всех $K(q, \rho)$ при фиксированной ρ, мы обозначим через $\Pi(\rho)$, а разность $G_n - \Pi(\rho)$ через $H(\rho)$. Тогда $H(\rho)$ не содержит ни точек из Q, ни точек из $Q^{(1)}$; если $\rho' < \rho$, то $H(\rho)$ всегда является составной частью $H(\rho')$.

При известных условиях $H(\rho)$ может быть нулем. Но в нашем случае, когда R отлично от нуля и не имеет общих точек ни с Q, ни с $Q^{(1)}$, очевидно, что если ρ становится меньше некоторой границы малости, то $H(\rho)$ оказывается отличной от нуля n-мерной частью пространства G_n, которая по определению не содержит своей *границы.*

Но далее очевидно также, что если r — *произвольная* точка множества R, то путем достаточного уменьшения ρ всегда можно добиться того, что эта точка r окажется принадлежащей области $H(\rho)$. Действительно, так как R не имеет общих точек с Q и $Q^{(1)}$, то точки множества Q не могут подходить к r сколь угодно близко. Поэтому если через $\varepsilon(r)$ обозначить *нижнюю* грань расстояний между r и точками множества Q, *то* $\varepsilon(r)$ *отлична от нуля.*

Если взять теперь $\rho < \varepsilon(r)$, то точка r необходимо должна быть расположена вне области $\Pi(\rho)$, а потому должна принадлежать области $H(\rho)$. Если же вообразить следующую бесконечную последовательность областей:

$$H(1),\ \left(H\left(\frac{1}{2}\right) - H(1)\right), \left(H\left(\frac{1}{3}\right) - H\left(\frac{1}{2}\right)\right), \ldots, \left(H\left(\frac{1}{\nu}\right) - H\left(\frac{1}{\nu-1}\right)\right), \ldots,$$

то по только что доказанному каждая точка r множества R окажется принадлежащей одной *вполне определенной* из них. По *условию* нашей теоремы составная часть R_ν множества R, принадлежащая произвольному члену

$$\left(H\left(\frac{1}{\nu}\right) - H\left(\frac{1}{\nu-1}\right)\right)$$

этой последовательности, конечна или первой мощности, ибо область

$$\left(H\left(\frac{1}{\nu}\right) - H\left(\frac{1}{\nu-1}\right)\right)$$

не содержит точек множеств Q или $Q^{(1)}$. А значит, и R, т. е. совокупность точек множеств $R_1, R_2, \ldots, R_\nu, \ldots$, *конечно* или *первой мощности*, что и требовалось доказать.

§ 16

Теорема А. Если точечное множество P, содержащееся в непрерывной n-мерной области G_n, имеет первую мощность, то оно не может быть совершенным [1].

Доказательство. Под *совершенным* точечным множеством в непрерывной области G_n я понимаю множество S, обладающее тем свойством, что его первое производное $S^{(1)}$ полностью идентично ему, так что

$$S^{(1)} \equiv S.$$

Вследствие этого и каждое производное $S^{(\alpha)}$ множества S совпадает с S.

Следовательно, если s — *любая* точка *совершенного* множества S, то s — одновременно и *предельная точка* S, а если s' — любая *предельная точка* множества S, т. е. какая-либо *точка* из $S^{(1)}$, то s' одновременно является *точкой, принадлежащей* S.

Пусть теперь P — произвольное точечное множество *первой мощности* в области G_n. Тогда все точки p множества P мы можем представить в форме

$$p_1, p_2, \ldots, p_\nu, \ldots,$$

т. е. в форме простой бесконечной последовательности. Чтобы теперь показать, что P *не может* быть *совершенным* множеством, мы предположим, что *всякая* точка p_ν из P является *предельной точкой* множества P, а *затем докажем*, что всегда должны существовать некоторые другие *предельные точки* p' множества P, не являющиеся вместе с тем *точками* множества P или, что то же самое, не совпадающими ни с одной из точек p_ν. Тем самым наша теорема будет полностью доказана, ибо если бы P было *совершенным* множеством, то *не только* каждая точка p_ν должна быть предельной точкой множества P, но и наоборот, *всякая предельная точка* p' множества P должна быть некоторой точкой p_ν, принадлежащей P.

Возьмем p_1 за центр *сферического образа* $(n-1)$ измерений в G_n и придадим последнему радиус $\rho_1=1$; обозначим этот сферический образ через K_1. Из всех точек последовательности (p_ν), которые следуют за p_1, пусть p_{i_2} будет первой (т. е. снабженной наименьшим индексом) из тех, которые попадут *внутрь* сферы K_1; что таких точек в последовательности (p_ν) имеется бесчисленное множество, необходимо проистекает из нашего предположения, что p_1 является предельной точкой множества (p_ν).

Через σ_1 обозначим *расстояние* между точками p_1 и p_{i_2} и возьмем p_{i_2} за центр *второй* сферы K_2, радиус ρ_2 которой определяется условием быть равным меньшей из двух величин

$$\tfrac{1}{2}\sigma_1 \quad \text{и} \quad \tfrac{1}{2}(\rho_1-\sigma_1).$$

---

[1] Ср.: Acta math., 1883, vol. 2, p. 409 [здесь I.6].

Тогда сфера K_2 *полностью* расположена *внутри* K_1, а все точки $p_1, p_2, \ldots, p_{i_2-1}$ находятся, очевидно, вне сферы K_2; подчеркнем, далее, что радиус ρ_2 сферы K_2 меньше $^1/_2$.

Равным образом, пусть p_{i_3} — первая из точек последовательности (p_ν), следующих за p_{i_2}, которая попадает *внутрь* сферы K_2; таких точек последовательности (p_ν), попадающих внутрь сферы K_2, тоже имеется бесконечно много, ибо центр p_{i_2} сферы K_2 является предельной точкой множества (p_ν). *Расстояние* между точками p_{i_2} и p_{i_3} мы обозначим через σ_2 и возьмем p_{i_3} за центр *третьей сферы* K_3, радиус ρ_3 которой равен меньшей из величин

$$^1/_2\sigma_2 \quad \text{и} \quad ^1/_2(\rho_2-\sigma_2).$$

Тогда сфера K_3 *целиком* попадает *внутрь* сферы K_2, а все точки $p_1, p_2, \ldots, p_{i_3-1}$ последовательности (p_ν) располагаются *вне* сферы K_3; радиус ρ_3 сферы K_3, очевидно, меньше $^1/_4$.

По вытекающему отсюда явному закону получится бесконечная последовательность сфер

$$K_1, K_2, \ldots, K_\nu, \ldots,$$

соответствующая определенной бесконечной последовательности *возрастающих целых* чисел

$$1<i_1<i_2<\cdots<i_\nu<i_{\nu+1}<\cdots$$

Каждая сфера K_ν *полностью* содержится внутри предыдущей сферы $K_{\nu-1}$.

Центр p_{i_ν} сферы K_ν определяется как первая *из следующих за* $p_{i_{\nu-1}}$ точка последовательности (p_ν), которая расположена внутри сферы $K_{\nu-1}$ (причем опять-таки следует заметить, что центр $p_{i_{\nu-1}}$ **сферы** $K_{\nu-1}$ является *предельной точкой* множества P); радиус ρ_ν сферы K_ν определяется как меньшая из величин

$$^1/_2\sigma_{\nu-1} \quad \text{и} \quad ^1/_2(\rho_{\nu-1}-\sigma_{\nu-1}),$$

где $\sigma_{\nu-1}$ — расстояние между точками $p_{i_{\nu-1}}$ и p_{i_ν}.

Легко видеть [2], что точки $p_1, p_{i_2}, \ldots, p_{i_{\nu-1}} \ldots$ находятся *вне* сферы K_ν и

$$\rho_\nu \leqslant 1/2^{\nu-1}.$$

Поэтому радиусы сфер K_ν с *возрастанием* ν *становятся бесконечно малыми*. Отсюда, а также потому, что K_ν всегда попадает *внутрь* $K_{\nu-1}$, по известной основной теореме теории величин следует, что центры p_{i_ν} сфер K_ν при возрастании ν сходятся к определенному пределу, который мы обозначим через p', так что

$$\lim_{\nu=\omega}(p_{i_\nu}) = p'.$$

Очевидно, что p' является *предельной точкой* множества P, так как все точки p_{i_ν} принадлежат P. С другой же стороны, убеждаемся, что p', как точка, *не может принадлежать* P; действительно, если бы это было

так, то для некоторого значения индекса n должно выполняться равенство

$$p'=p_n,$$

а оно *невозможно* по той причине, что p' расположена *внутри* сфер K_ν, сколь бы велико ни было ν, а p_n, напротив, расположена *вне* сфер K_ν, как только $\nu>n$.

Таким образом мы показали, что точечное множество P *первой мощности никогда* не может быть совершенным.

Теорема В. *Если α — какое-либо число первого или второго числового класса, а P — точечное множество в G_n, обладающее тем свойством, что*

$$P^{(\alpha)}\equiv 0,$$

то как $P^{(1)}$, так и P имеют первую мощность, разве только P, соответственно $P^{(1)}$, не будут конечными множествами.

Доказательство. *Первое* производное точечного множества P является определенным новым множеством $P^{(1)}$, а именно *множеством всех* предельных точек множества P. Под *вторым* производным $P^{(2)}$ множества P мы понимаем первое производное множества $P^{(1)}$, и вообще под ν-м производным множеством $P^{(\nu)}$ понимается первое производное множества $P^{(\nu-1)}$.

Как легко видеть, производное $P^{(2)}$ всегда содержится всеми своими точками в $P^{(1)}$ и вообще $P^{(\nu)}$ является *составной частью* всех предшествующих ему производных $P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots, P^{(\nu-1)}$.

Но нам известно также, что *при исследовании природы точечного множества P столь важный процесс образования понятий* производных множеств различного порядка отнюдь не завершается только что упомянутыми производными с *конечным* порядковым числом, что, скорее, в общем случае необходимо рассматривать *получаемые* из P множества, порядки которых будут характеризоваться *трансфинитными* числами второго, третьего и т. д. числовых классов и которые *естественно* можно понимать как производные множества P.

В действительности же, как это с полной определенностью будет вытекать из нижеследующих теорем, дело обстоит так, что для точечных множеств в произвольной области G_n играют роль, в сущности говоря, лишь те *производные*, порядковое число которых принадлежит *первому* или *второму* числовым классам. А именно: выявляется тот *в высшей степени удивительный* факт, что для всякого точечного множества P производное $P^{(\alpha)}$ *начиная с некоторого определенного порядкового числа* α, принадлежащего *первому* или *второму*, но не *большему* классу, будет нулем или *совершенным* множеством; отсюда следует, что все производные более высокого порядка, нежели α, совпадают с производным множеством $P^{(\alpha)}$, а потому их введение становится излишним.

Тем не менее мы можем формально (т. е. понятийно) определить производные точечного множества P, порядковые числа которых принадлежат *произвольно высоким* классам в предположении, что эти числовые классы надлежаще определены заранее. Понятия производных с

трансфинитным порядковым числом получаются *друг за другом в той же последовательности, как и сами трансфинитные числа.*

Прежде всего получаем

$$P^{(\omega)} \equiv \mathfrak{D}(P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots, P^{(\nu)}, \ldots),$$

где знак $\mathfrak{D}$ имеет то значение, которое я придал ему ранее [здесь с. 46].

Затем $P^{(\omega+1)}$ мы получаем как первое производное множества $P^{(\omega)}$, $P^{(\omega+2)}$ — как первое производное множества $P^{(\omega+1)}$ и т. д. Если γ — *какое-либо трансфинитное* число *второго* или *более высокого* числового класса, то понятие $P^{(\gamma)}$ следующим образом основывается на понятиях производных *меньшего* порядка, чем γ: если γ — трансфинитное число *первого* рода, т. е. такое число, которое имеет *непосредственно предшествующее* ему, обозначаемое нами через γ_{-1}, то $P^{(\gamma)}$ определяется как *первое производное* множества $P^{(\gamma-1)}$; напротив, если γ является числом *второго* рода, т. е. таким числом, которое в последовательности целых чисел не имеет *непосредственно предшествующего* (как, например, числа ω, ω^{ω} или $\omega^{\omega^{\omega}}+\omega^2$), то определение производного $P^{(\gamma)}$ получается по формуле

$$P^{(\gamma)} \equiv \mathfrak{D}(P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots, P^{(\gamma')}, \ldots),$$

в которой γ' получает все целочисленные значения, которые *меньше* γ.

Поэтому всякое $P^{(\gamma)}$ будет определенной *составной частью* множества $P^{(\gamma')}$, если $\gamma'<\gamma$, так что при последнем предположении разность

$$P^{(\gamma')}-P^{(\gamma)}$$

тоже имеет смысл как определенное точечное множество, содержащееся в $P^{(1)}$, а именно как то множество, которое остается после удаления из $P^{(\gamma')}$ всех точек, принадлежащих множеству $P^{(\gamma)}$.

Из этих пояснений непосредственно получается правильность следующего равенства, которое выполняется для всякого числа γ, будь то конечного или сверхконечного,

$$P^{(1)} \equiv \sum_{\gamma'} (P^{(\gamma')} - P^{(\gamma'+1)}) + P^{(\gamma)}, \qquad (1)$$

где γ' означает переменный индекс, принимающий все целочисленные значения, начинающиеся с 1 и меньшие *заданного* числа γ.

Пусть теперь α — какое-либо целое число *первого* или *второго* числового класса, а P — точечное множество, обладающее тем свойством, что $P^{(\alpha)} \equiv 0$.

Требуется доказать, что $P^{(1)}$, а потому и P [ср. I.5.4] являются множествами *первой* мощности.

Для этой цели применяем предыдущую формулу (1), полагая в ней $\gamma=\alpha$, и получаем

$$P^{(1)} \equiv \sum_{\alpha'} (P^{(\alpha')} - P^{(\alpha'+1)}),$$

где α' — переменный индекс, пробегающий все целые числа начиная с 1, которые *меньше* α.

Дополнительный член $P^{(\alpha)}$ справа здесь отпадает, так как он равен 0 *по предположению.*

Каждый член нашей суммы справа

$$P^{(\alpha')} - P^{(\alpha'+1)}$$

образует *изолированное* множество [ср. I.5.4], а потому, как было показано в только что указанном месте, если последнее состоит из бесконечного числа точек, то оно *первой мощности.*

Совокупность всех членов нашей суммы тоже имеет первую мощность (если она не *конечна*), так как по определению второго числового класса совокупность всех чисел α', меньших *определенного* трансфинитного числа α второго числового класса, имеет *первую* мощность [ср. I.5.5, § 12].

Принимая теперь во внимание уже указывавшуюся теорему [см. 1.5.3], непосредственно получаем из сказанного, что $P^{(1)}$, а потому и P имеют *первую мощность*, если эти множества не состоят из конечного числа точек.

Теорема C. *Если расположенное в G_n точечное множество P обладает тем свойством, что его первое производное $P^{(1)}$ имеет первую мощность, то всегда существуют такие числа γ первого или второго числового класса, что $P^{(\gamma)}$ равно нулю, и среди всех таких чисел существует наименьшее число α.*

Доказательство. Положим в формуле (1) из § 16 число $\gamma=\Omega$, где под Ω понимается наименьшее число третьего числового класса [ср. I.5.5, § 13].

Тогда имеем

$$P^{(1)} \equiv \sum_{\gamma} (P^{(\gamma)} - P^{(\gamma+1)}) + P^{(\Omega)}, \tag{2}$$

где буква γ пробегает все числа *первого* и *второго* числовых классов.

В нашей теореме предполагается, что $P^{(1)}$ имеет *первую* мощность. Ввиду этого все производные более высокого порядка $P^{(\gamma)}$, *поскольку* они *входят* в $P^{(1)}$, тоже первой мощности, если они не состоят из *конечного* числа точек.

Поэтому разность

$$P^{(\gamma)} - P^{(\gamma+1)}$$

обращается в нуль только тогда, когда $P^{(\gamma)}$, а потому и $P^{(\gamma+1)}$ становятся нулями. Действительно, в остальных случаях $P^{(\gamma)}$ было бы *совершенным* множеством ввиду равенства

$$P^{(\gamma)} \equiv P^{(\gamma+1)},$$

а это противоречило бы *теореме* A.

А потому если бы все производные $P^{(\gamma)}$ были отличны от нуля, сколь бы большим ни бралось γ внутри первого или второго числового клас-

са, то и все члены

$$P^{(\gamma)}-P^{(\gamma+1)}$$

суммы правой части нашего равенства (2) были бы отличны от нуля.

Совокупность *всех* этих членов или, что означает то же самое, совокупность всех *целых* чисел *первого* и *второго* числовых классов имеет вторую мощность [ср. I. 5.5, § 12]. Поэтому в правой части нашего равенства (2) стояло бы точечное множество определенно *большей* мощности, чем множество в левой части, имеющее по предположению *первую* мощность.

Следовательно, предположение, будто все производные $P^{(\gamma)}$ (под γ понимается число первого или второго числовых классов) будут отличными от нуля, *явно* противоречит посылке, что $P^{(1)}$ имеет первую мощность.

Поэтому *должны* существовать такие числа γ *первого* или *второго* числового класса, что

$$P^{(\gamma)}\equiv 0.$$

Среди же всех таких чисел должно существовать наименьшее, ибо имеет место *общая* теорема, по которой у всякой *определенной любым способом совокупности* целых чисел, принадлежащих первому или второму (или какому-либо большему) числовым классам, должен существовать некий *минимум*, т. е. некоторое число, *меньшее*, чем все числа этой совокупности [ср. I.5.5, § 13).

Теорема D. *Если расположенное в G_n точечное множество P обладает тем свойством, что его первое производное $P^{(1)}$ имеет мощность, бóльшую первой, то всегда существуют точки, принадлежащие одновременно всем производным $P^{(\alpha)}$, когда α — какое-либо число первого или второго числового класса, а совокупность всех этих точек, которая есть не что иное, как $P^{(\Omega)}$, всегда является совершенным множеством.*

Доказательство. То, что при сделанном предположении о $P^{(1)}$ всегда существуют точки, принадлежащие одновременно всем производным $P^{(\alpha)}$, вытекает из теоремы I § 15, если, кроме того, принять во внимание теорему B этого параграфа. Действительно, в соответствии с последней P обладает тем свойством, что все его производные $P^{(\alpha)}$ *отличны от нуля*, сколь бы большим ни бралось число α второго числового класса. Это свойство множества P удовлетворяет *обоим* предположениям о свойстве, обозначенном в теореме I буквой Υ. Следовательно, по этой теореме существует *по крайней мере* одна точка, которую мы обозначим через s, расположенная так, что если мы возьмем шар $K(\rho)$ с центром в ней и с радиусом ρ, то *составная часть* $P(\rho)$ множества P, попадающая в этот шар, также обладает свойством иметь отличными от нуля все производные $P^{(\alpha)}(\rho)$, сколь бы малым ни выбралось ρ. Поэтому если α — какое-либо целое число, принадлежащее первому или второму числовым классам, то s является *предельной точкой* множества $P^{(\alpha)}$ (поскольку $P^{(\alpha)}(\rho)$ является составной частью множества $P^{(\alpha)}$, а тем самым во всякой окрестности точки s имеются точки множества $P^{(\alpha)}$), а значит, есть некоторая *точка* множества $P^{(\alpha+1)}$. Но

$P^{(\alpha+1)}$ является составной частью множества $P^{(\alpha)}$, поэтому s является и точкой множества $P^{(\alpha)}$. Следовательно, точка s принадлежит одновременно всем $P^{(\alpha)}$.

Если теперь вообразим совокупность $S=P^{(\Omega)}$ всех точек s, принадлежащих одновременно всем производным $P^{(\alpha)}$, то легко убедиться, что эта совокупность образует *совершенное* множество. Действительно, всякая точка s из S должна быть предельной точкой совокупности S. А именно если бы это было не так, то вокруг s как центра можно было бы взять шар $K(\rho, s)$ достаточно малого радиуса $\rho<\varepsilon$ так, что та часть $P^{(1)}(\rho, s)$ множества $P^{(1)}$, которая принадлежит этому шару, имела бы производную $P^{(\Omega)}$, состоящую из единственной точки s. Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu, \ldots$ — последовательность убывающих, становящихся бесконечно малыми величин, которые все меньше ε. Вышеуказанному ρ можно будеть придать друг за другом эти значения $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu, \ldots$ Тогда имеем

$$\begin{aligned} P^{(1)}(\varepsilon, s) \equiv s + (P^{(1)}(\varepsilon, s) - P^{(1)}(\varepsilon_1, s)) + \\ + (P^{(1)}(\varepsilon_1, s) - P^{(1)}(\varepsilon_2, s)) + \cdots + (P^{(1)}(\varepsilon_{\nu-1}, s) - P^{(1)}(\varepsilon_\nu, s)) + \cdots \end{aligned} \tag{3}$$

Каждый отдельный член справа теперь конечен или первой мощности, ибо множество

$$P^{(1)}(\varepsilon_{\nu-1}, s) - P^{(1)}(\varepsilon_\nu, s) = Q_\nu$$

обладает тем свойством, что $Q_\nu^{(\Omega)}$ равно нулю. Действительно, в противном случае в шаре $K(\rho, s)$ $(\rho\leqslant\varepsilon)$ содержались бы и другие точки, помимо s. Поэтому по доказанному выше Q_ν не может иметь мощности, большей первой.

Следовательно, ввиду (3) и $P^{(1)}(\varepsilon, s)$ не может иметь никакой мощности, большей первой, что, однако, по теореме C несовместимо с тем, что $P^{(\Omega)}(\varepsilon, s)$ отлично от нуля, а именно равно s.

Мы видим, значит, что каждая точка s из S является *предельной точкой* совокупности S.

Но и каждая предельная точка s' совокупности S является точкой S, так как $P^{(\Omega+1)}$ является составной частью множества $P^{(\Omega)}$.

Тем самым доказано, что $S=P^{(\Omega)}$ является *совершенным* множеством.

Теорема E. *Если расположенное в G_n точечное множество P обладает тем свойством, что его первое производное $P^{(1)}$ имеет мощность, большую первой, а $S=P^{(\Omega)}$—совершенное множество, существование которого утверждается в теореме* D, *то разность*

$$R \equiv P^{(1)} - S$$

всегда является точечным множеством самое большее первой мощности, а потому мы всегда можем, и притом единственным образом, разложить $P^{(1)}$ на две такие составные части R и S, что

$$P^{(1)} \equiv R + S,$$

где S — совершенное точечное множество, а R — точечное множество, которое конечно или первой мощности.

Доказательство. Чтобы убедиться в правильности этой теоремы, воспользуемся теоремой III из § 15 и только что доказанной теоремой D. Здесь указанное R по самому его смыслу не содержит *ни одной* точки, общей с S, а значит, поскольку $S^{(1)} \equiv S$, и ни одной общей с $S^{(1)}$.

Если теперь мы рассмотрим какую-либо непрерывную часть H пространства G_n, не содержащую ни единой точки множества S, а значит, и ни одной точки множества $S^{(1)} \equiv S$, то подмножество множества R, которое принадлежит области H и которое мы обозначим через $\overline{R}$, будет конечным или первой мощности. Действительно, если бы $\overline{R}$ было мощности, большей первой, то по теореме D множество $\overline{R}^{(\Omega)}$ было бы отличным от нуля. А так как $\overline{R}$ — составная часть множества $P^{(1)}$, а значит, и $\overline{R}^{(\Omega)}$ является составной частью множества $P^{(\Omega)} \equiv S$, то и в области H должны были бы располагаться точки множества S, что по нашему предположению не имеет места.

Следовательно, для нашего множества R выполняются все предположения, сделанные в теореме III из § 15 относительно обозначенного там той же буквой R множества, причем вместо множества, обозначенного в указанной теореме через Q, мы должны подставить наше множество S.

Из этого с помощью теоремы III из § 15 мы заключаем, что наше множество R самое большее первой мощности, что и требовалось доказать.

Теорема F. *Если некоторое точечное множество P в G_n обладает тем свойством, что его первое производное $P^{(1)}$ имеет мощность, бóльшую первой, то всегда существует такое наименьшее число α первого или второго числового класса, что*

$$P^{(\alpha)} \equiv P^{(\alpha+1)},$$

а следовательно, уже производное множество множества P порядка α, т. е. $P^{(\alpha)}$, равно совершенному множеству $P^{(\Omega)} \equiv S$.

Доказательство. По предыдущему имеем

$$P^{(1)} \equiv R + S,$$

где R — *первой* мощности, а S равно совершенному множеству $P^{(\Omega)}$.

Но по формуле (2) этого параграфа мы имеем и

$$P^{(1)} \equiv \sum_{\gamma} (P^{(\gamma)} - P^{(\gamma+1)}) + P^{(\Omega)}.$$

Если мы сравним эти два выражения для $P^{(1)}$ и примем во внимание, что $P^{(\Omega)} \equiv S$, то для R получаем выражение

$$R \equiv \sum_{\gamma} (P^{(\gamma)} - P^{(\gamma+1)}), \tag{4}$$

где буква γ должна пробегать *все* числа *первого* и *второго* числовых классов.

Так как R имеет *первую* мощность, а мощность членов справа в (4), напротив, *второй мощности* [см. I.5.5, § 12], то заключаем, что должно существовать такое наименьшее число α *первого* или *второго* числового класса, что

$$P^{(\alpha)} \equiv P^{(\alpha+1)}.$$

Отсюда следует, что $P^{(\alpha)}$ является совершенным, а потому совпадающим с $P^{(\Omega)} \equiv S$ множеством.

Эти теоремы A, B, C, D, E, F, как и изложенные здесь их доказательства, были известны мне ко времени завершения № 5 данной работы. Однако там при формулировке теоремы E на с. 575 т. 21 [I.5.5, § 10] я зашел слишком далеко: теорема E, как она сформулирована там, вообще неверна. Из того обстоятельства, что R имеет самое большее первую мощность и одновременно является составной частью множества $P^{(1)}$, я посчитал возможным заключить, что R будет производным множеством некоторой составной части множества P. Отсюда же с помощью теоремы C я совершенно правильно заключил, что можно задать такое α, что $R^{(\alpha)} \equiv 0$. Оказывается, однако, что R вообще может не быть производным некоторого другого множества.

Это *важное* замечание было впервые сделано господином Иваром Бендиксоном из Стокгольма в присланном мне письме (май 1883 г.). По моему пожеланию он обработал свои результаты, найденные в связи с этим и отчасти совпадающие с предыдущими теоремами D, E, F, и опубликовал их в «Acta math.», Bd. 2, S. 415 [65].

Так как теперь $R^{(\gamma)}$ может оказаться не равным нулю при любом γ, то возникает вопрос: каким свойством отличается счетное множество R от других множеств первой мощности? Ответ на этот вопрос господин Бендиксен нашел в следующей теореме:

Теорема G. *Если R — множество первой мощности, входящее в теорему* E, *то существует такое наименьшее число α первого или второго числового класса, что*

$$\mathfrak{D}(R, R^{(\alpha)}) \equiv 0.$$

Доказательство. По теореме F существует такое *наименьшее* число α первого или второго числовых классов, что

$$P^{(\alpha)} \equiv P^{(\Omega)} \equiv S.$$

Теперь R не имеет общих точек с S, а значит, и

$$\mathfrak{D}(R, P^{(\alpha)}) \equiv 0.$$

Поскольку же R является составной частью множества $P^{(1)}$, а значит, и $R^{(\alpha)}$ является составной частью множества $P^{(\alpha)}$, то тем более имеем

$$\mathfrak{D}(R, R^{(\alpha)}) \equiv 0,$$

что и требовалось доказать.

С этой теоремой связаны замечания, которые поясняют и дополняют ее.

Уже в № 2 настоящего сочинения [I.5.2] я указал на то удивительное обстоятельство, что если точечное множество P обладает тем свойством, что $P^{(\omega)}\equiv 0$, то всегда существует и *конечное* число ν такое, что $P^{(\nu)}\equiv 0$. Однако содержащаяся в этом предложении теорема является лишь частным случаем более общей, которую мы можем сформулировать так:

Если β *— какое-либо число второго числового класса и второго рода (т. е. число, которое можно разложить на два множителя, из которых множимое равно* ω*), а* P *— точечное множество, обладающее тем свойством, что* $P^{(\beta)}\equiv 0$*, то всегда существует такое меньшее число* $\beta'<\beta$*, принадлежащее второму числовому классу, что и для него* $P^{(\beta')}\equiv 0$ [ср. I.10, § 19].

Чтобы убедиться в правильности этой теоремы, предположим, что хотя $P^{(\beta)}\equiv 0$, но, напротив, $P^{(\beta')}$ отлично от нуля для всякого числа $\beta'<\beta$. Тогда по теореме I из § 15 существовала бы точка g, расположенная таким образом, что во всяком шаре K_n с центром в g и радиуса ρ содержалось бы подмножество $P(\rho)$ множества P, для которого все производные $P^{(\beta')}(\rho)$ при $\beta'<\beta$ тоже были бы отличны от нуля. Поскольку мы можем взять ρ произвольно малым, то отсюда следует, что точка g принадлежит каждому производному множеству $P(\beta')$ при $\beta'<\beta$, а значит, ввиду формулы

$$P^{(\beta)}\equiv\mathfrak{D}(P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots, P^{(\beta')}, \ldots),$$

она будет точкой множества $P^{(\beta)}$, что противоречит посылке о том, что $P^{(\beta)}\equiv 0$. Следовательно, сделанное нами предположение, что все $P^{(\beta')}$ отличны от нуля, неприемлемо, а потому должны существовать числа β', которые меньше β и для которых $P^{(\beta')}$ тоже равно нулю.

Из этого предложения получаем следствие, что *число, обозначенное в теореме* C *через* α*, всегда является числом первого рода*, так что всегда существует число α_{-1}, непосредственно предшествующее ему по величине. Действительно, если бы α было второго рода, то по только что доказанному α не было бы *наименьшим* числом, для которого $P^{(\alpha)}\equiv 0$. Следовательно, если $P^{(1)}$ первой мощности, то всегда существует такое число α_{-1}, что хотя $P^{(\alpha_{-1})}$ отлично от нуля, но $P^{(\alpha)}$ или, что то же самое, $P^{(\alpha_{-1}+1)}$ равно нулю.

§ 17

Чтобы пополнить теоремы двух предыдущих параграфов, а также чтобы иметь возможность осуществить в последующем новые исследования, для меня становится неизбежным введение *новых определений* и *обозначений*.

Прежде всего хочу заметить, что оказывается целесообразным наименьшее общее кратное нескольких множеств P_1, P_2, ..., для которого мы пользовались до сих пор знаком $\mathfrak{M}(P_1, P_2, \ldots)$ (Math. Ann., 1880, Bd. 17, S. 355) [здесь I.5.2], записывать в виде суммы отдельных мно-

жеств $P_1, P_2, \ldots$ также и в тех случаях, когда множества $P_1, P_2, \ldots$ имеют общие точки, причем каждая общая точка будет причисляться к множеству $\mathfrak{M}(P_1, P_2, \ldots)$ только *один раз*.

Следовательно, отныне мы во всех случаях имеем

$$P_1+P_2+\cdots\equiv\mathfrak{M}(P_1, P_2, \ldots). \tag{1}$$

Фактически легко убедиться, что обычные правила коммутативности и ассоциативности выполняются и в этом случае. Следует лишь обратить внимание на то, что из равенства

$$P\equiv P_1+P_2+\cdots$$

равенство

$$P-P_1\equiv P_2+P_3+\cdots$$

может быть получено только в тех случаях, когда P_1 не имеет общих точек с остальными множествами $P_2, P_3, \ldots$

Далее, если сумма (1) состоит лишь из *конечного* числа слагаемых, то нетрудно видеть, что для получения производных всегда имеет место правило:

$$(P_1+P_2+\ldots+P_\nu)^{(\alpha)}\equiv P_1^{(\alpha)}+P_2^{(\alpha)}+\ldots+P_\nu^{(\alpha)}, \tag{2}$$

где α — любое целое, конечное или трансфинитное число.

Однако это правило оказывается справедливым вообще, когда число подмножеств $P_1, P_2, \ldots$ является бесконечно большим.

Если точечное множество P обладает тем свойством, что его производное $P^{(1)}$ содержится в нем как делитель или, что то же самое,

$$\mathfrak{D}(P, P^{(1)})\equiv P^{(1)},$$

то мы будем называть P *замкнутым* множеством. К этому виду множеств принадлежат, например, множества особых точек аналитических функций комплексного переменного. Далее, из всякого множества P получается *замкнутое множество*

$$\mathfrak{M}(P, P^{(1)})\equiv P+P^{(1)}.$$

Всякое множество, которое само является первым производным некоторого множества, также принадлежит, как мы знаем, к замкнутым множествам.

Последняя теорема обратима: *всякое замкнутое множество можно бесчисленно многими способами представить как первое производное некоторого другого множества.*

В самом деле. Пусть P — замкнутое множество, а значит, $P^{(1)}$ является составной частью множества P. Мы полагаем

$$P\equiv Q+P^{(1)}.$$

Тогда Q является *изолированным* множеством, а потому имеет *первую* мощность; принадлежащие ему точки можно обозначить через

$$q_1, q_2, \ldots, q_\nu, \ldots$$

Пусть ρ_ν — отличная здесь от нуля нижняя грань расстояний точек q_ν от всех остальных точек множества P. Вокруг q_ν как центра опишем n-мерный шар K_ν радиуса $\rho_\nu/2$.

Все шары K_ν расположены вне друг друга и могут самое большее лишь касаться; внутрь K_ν не попадает никакой точки множества P, кроме его центра q_ν [3].

Если теперь в каждый из этих шаров K_ν поместим точечное множество P_ν, производное $P_\nu^{(1)}$ которого состоит из единственной точки q_ν, и образуем следующее множество

$$M \equiv P^{(1)} + \sum P_\nu,$$

то M, как легко видеть, имеет в качестве производного множества множество P, т. е.

$$M^{(1)} \equiv P.$$

Действительно, имеем

$$P \equiv Q + P^{(1)},$$

а потому

$$P^{(1)} \equiv Q^{(1)} + P^{(2)};$$

следовательно,

$$P \equiv Q + Q^{(1)} + P^{(2)}.$$

С другой стороны,

$$M^{(1)} \equiv P^{(2)} + (\sum P_\nu)^{(1)}.$$

Однако легко видеть, что

$$(\sum P_\nu)^{(1)} \equiv Q + Q^{(1)},$$

откуда следует доказываемая теорема.

Поэтому из наших теорем C, D, E, F из § 16 получаются следующие теоремы о замкнутых точечных множествах.

Теорема C′. *Если R — какое-либо замкнутое точечное множество первой мощности, то всегда существует такое наименьшее число α, принадлежащее первому или второму числовому классу, что $P^{(\alpha)}$ равно нулю или, что то же самое, такие множества всегда приводимы.*

Теорема E′. *Если P — замкнутое точечное множество большей, чем первая, мощности, то P распадается, и притом единственным образом, на совершенное множество S и множество R первой мощности, так что*

$$P \equiv R + S,$$

и существует такое наименьшее число α первого или второго числового класса, что $P^{(\alpha)}$ становится равным S.

Следует далее рассмотреть тот важный случай, когда множество P является делителем своего производного множества или, что то же самое, когда

$$\mathfrak{D}(P, P^{(1)}) \equiv P;$$

если это имеет место, то мы будем называть ***P плотным в себе множеством.***

Если P — какое-либо плотное в себе множество, то его производное $P^{(1)}$ всегда является совершенным множеством.

Действительно, с одной стороны, $P^{(2)}$ всегда является делителем множества $P^{(1)}$. В нашем же случае и $P^{(1)}$ является делителем множества $P^{(2)}$, ибо если мы напишем равенство

$$P^{(1)} \equiv N + P,$$

то из него следует, что

$$P^{(2)} \equiv N^{(1)} + P^{(1)},$$

т. е. $P^{(1)}$ содержится в $P^{(2)}$ всеми своими точками. Следовательно, оба множества $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ идентичны, а потому $P^{(1)}$ является *совершенным* множеством.

Далее следует выделить и тот случай, когда множество P обладает тем свойством, что никакая составная часть, т. е. никакое подмножество множества P, не является плотным в себе; в этом случае мы назовем P *разрозненным* множеством.

Очевидно, что *изолированные* множества образуют особый класс *разрозненных* множеств. Следует, далее, подчеркнуть, что *все замкнутые множества первой мощности* являются разрозненными множествами, так как в противном случае они не были бы *приводимыми*. Являются также *разрозненными* и все те множества первой мощности, которые входят в теоремы E, E′ и G (§ 16) и обозначены в них через R.

Действительно, если бы P имело *плотную в себе* составную часть M, то $R^{(\alpha)}$ имело бы в качестве своей составной части множество $M^{(1)}$, поскольку $M^{(1)}$ является совершенным множеством, сохраняющимся во *всех* производных множества R; так как к тому же M, как плотное в себе множество, является составной частью множества $M^{(1)}$, то составная часть M множества R также содержалась бы в $R^{(\alpha)}$, что противоречит теореме Бендиксона G (§ 16). Значит, R не имеет *плотной в себе* составной части, а потому R всегда принадлежит классу *разрозненных множеств.*

Каково бы ни было P, к *разрозненным* множествам *всегда* принадлежит и множество

$$P - \mathfrak{D}(P, P^{(\Omega)}),$$

о котором одновременно всегда можно утверждать, что оно имеет первую мощность. Это легко доказывается при помощи теоремы III из § 15. К вопросу о том, могут ли существовать *разрозненные* множества и большей, чем первая, мощности, мы обратимся позднее.

Понятие «*плотное в себе*» находится, естественно, в некотором родстве с уже часто употреблявшимся мною понятием «*всюду плотное*», а потому тем более нам нужно сопоставить их друг с другом, чтобы предотвратить всякую путаницу.

Выражение «*плотное в себе*» означает определенное свойство множества, рассматриваемого само по себе; напротив, «всюду плотное» само по себе не означает какого-либо свойства множества, а становится таковым только благодаря тому, что мы связываем его с определенной

n-мерной составной частью H пространства G_n, говоря о множестве P, что оно «*всюду плотно в* H».

Как только это существенное различие выяснено, так само собой получается, что множество P вполне может быть *плотным в себе, не* будучи *всюду плотным* в какой-либо частичной области H пространства G_n, и что, наоборот, множество P может быть *всюду плотным в некоторой частичной области* H, не являясь *плотным в себе*, например, когда P содержит точки, не принадлежащие области H.

С другой стороны, если P полностью расположено в H и *всюду плотно в ней,* то непосредственно ясно, что в этом случае P должно называться и *плотным в себе.*

§ 18 [4]

Всякому точечному множеству P в G_n, будь оно *непрерывным* или *разрывным*, соответствует определенная *неотрицательная числовая величина*, которую мы назовем его *протяженностью* или его *объемом по отношению к его участию в плоском n-мерном пространстве* G_n или, как мы будем выражаться короче, *относительно* G_n. Во всех случаях, когда до сих пор мы говорили об *объеме* или *протяженности* (а именно когда P состояло из одного или нескольких n-мерных кусков пространства G_n), эта числовая величина была *равна* n-кратному интегралу

$$\int dx_1 dx_2 \ldots dx_n,$$

где интегрирование производится по всем элементам соответствующей части пространства P. Она, однако, имеет *определенный смысл* и *единственное значение* также и во *всех других* случаях. Ввиду ее зависимости как от P, так и от плоского пространства G_n, в котором содержится P, эту числовую величину мы будем обозначать через

$$I(P \text{ в } G_n),$$

или просто через

$$I(P);$$

последнее обозначение исключается тогда, когда в ходе исследования привлекается несколько *плоских* пространств G_n, G_m', ..., которым одновременно может принадлежать P, а потому какая-либо путаница невозможна. К этому обобщению *понятия протяженности* мы приходим через рассмотрение некоторой функции от неограниченного положительного переменного ρ, которую мы назовем *характеристической функцией, соответствующей заданному множеству* P *относительно* G_n, и которую будем обозначать, если это нужно, через

$$F(\rho, P \text{ в } G_n),$$

или, если этого достаточно, просто через

$$F(\rho, P) = F(\rho).$$

Если в G_n задано какое-либо точечное множество P, *полностью рас-*

положенное в конечном, то вокруг *каждой* точки p, принадлежащей замкнутому множеству

$$\mathfrak{M}(P, P^{(1)}) \equiv P + P^{(1)},$$

строим шар с центром в p радиуса ρ; этот шар, рассматриваемый как множество, состоящее из всех внутренних и расположенных на его границе точек, будем обозначать через

$$K(\rho, p).$$

Совокупность *всех* этих шаров, получаемых тогда, когда p пробегает *все* точки множества $P + P^{(1)}$, имеет наименьшее общее кратное

$$\sum_p K(\rho, p),$$

и это точечное множество мы будем обозначать в зависимости от обстоятельств или через

$$\Pi(\rho, P \text{ в } G_n),$$

или

$$\Pi(\rho, P),$$

или

$$\Pi(\rho).$$

Теперь, поскольку P предполагается расположенным полностью в *конечном*, легко видеть, что это точечное множество $\Pi(\rho)$ всегда является частью пространства G_n, состоящей из *конечного числа* кусков, *причем каждый из этих кусков представляет собой n-мерный континуум с принадлежащей ему границей.* Следовательно, интеграл

$$\int dx_1 dx_2 \ldots dx_n,$$

взятый по всем элементам части пространства $\Pi(\rho)$, имеет определенное значение, меняющееся с изменением ρ; это значение мы обозначим через $F(\rho)$ и таким образом *получаем* следующее определение *характеристической функции, соответствующей заданному точечному множеству относительно* G_n:

$$F(\rho, P \text{ в } G_n) = \int\limits_{\Pi(\rho, P \text{ в } G_n)} dx_1\, dx_2 \ldots dx_n. \tag{1}$$

Заметим теперь, что, как легко видеть, $F(\rho)$ является убывающей вместе с ρ функцией от ρ, производная которой имеет даже вполне определенный смысл благодаря тому, что она в некотором смысле выражает протяженность границы множества $\Pi(\rho)$. Отсюда следует, что при произвольном убывании величины ρ функция $F(\rho)$ сколь угодно близко приближается к определенному неотрицательному пределу $\operatorname{Lim}_{\rho=0} F(\rho)$.

Этот предел мы назовем протяженностью или объемом множества P *относительно плоского пространства* G_n, а потому имеем определяющее равенство

$$I(P \text{ в } G_n) = \operatorname{Lim}_{\rho=0} F(\rho, P \text{ в } G_n), \tag{2}$$

или в более простой записи

$$I(P) = \operatorname*{Lim}_{\rho=0} F(\rho).$$

Если P и Q — два точечных множества, расположенных так, что *можно задать полностью разделенные n-мерные части пространства H и H', причем P целиком содержится в H, а Q* — целиком в H', то, как легко показать, справедлива теорема, что

$$I(P+Q)=I(P)+I(Q).$$

Если же отбросить сделанное о P и Q предположение, то эта теорема вообще неверна.

Теперь докажем прежде всего *основную теорему, что протяженность множества P всегда равна протяженности его производного множества $P^{(1)}$ относительно того же плоского пространства G_n, или же что всегда имеет место равенство*

$$I(P \text{ в } G_n)=I(P^{(1)} \text{ в } G_n). \tag{3}$$

Ее доказательство осуществляется так. Пусть ε — произвольная положительная величина, которую сначала мы рассматриваем как заданную, а затем заставим убывать до нуля. Пусть, далее, H — полностью расположенная в конечном часть G_n, которая взята достаточно большой, чтобы часть пространства $\Pi(\varepsilon, P)$, а значит, и множества P и $P^{(1)}$ целиком содержались в ней.

Теперь обозначим через $F(\rho)$ соответствующую P характеристическую функцию, через $F_1(\rho)$ — характеристическую функцию множества $P^{(1)}$, так что в точной записи $F_1(\rho)$ будет иметь, следовательно, вид $F(\rho, P^{(1)} \text{ в } G_n)$. Если теперь рассмотрим часть пространства $\Pi(\varepsilon, P^{(1)})$, то получим, что она содержится в $\Pi(\varepsilon, P)$, а потому и в H.

Часть пространства

$$\Delta_1 \equiv H-\Pi(\varepsilon, P^{(1)})$$

вместе с ее границей будет теперь содержать самое большее *конечное* число точек множества P, так как в нее не входит *ни одна* точка множества $P^{(1)}$. Это конечное множество мы обозначим через Q.

Теперь под ρ будем понимать положительную величину, меньшую ε и сходящуюся к нулю.

Тогда, во-первых, имеем

$$F(\rho)-F_1(\rho) \geqslant 0,$$

поскольку $\Pi(\rho, P^{(1)})$ всегда расположена *внутри* $\Pi(\rho, P)$.

С другой стороны, мы всегда можем выбрать ρ столь малой, что $\Pi(\rho, P-Q)$ будет целиком расположена в части пространства $\Pi(\varepsilon, P^{(1)})$, так как точки множества $P-Q$ нигде не подходят бесконечно близко к границе части пространства $\Pi(\varepsilon, P^{(1)})$ (в противном случае эта граница содержала бы в себе точки множества $P^{(1)}$, что противоречит ее природе) [5]. Следовательно, начиная с достаточно малого ρ всегда

$$F(\rho, P-Q) < F_1(\varepsilon).$$

Значит, имеем

$$F(\rho)-F_1(\rho)<F_1(\varepsilon)-F_1(\rho)+(F(\rho)-F(\rho, P-Q)),$$

тогда как ранее мы уже видели, что

$$F(\rho)-F_1(\rho)\geqslant 0.$$

Но множества P и $P-Q$ имеют *одинаковую* протяженность, поскольку они отличаются лишь на конечное число точек. Поэтому разность $F(\rho)-F(\rho, P-Q)$ становится бесконечно малой при бесконечном убывании ρ. Тогда из двух только что написанных неравенств заключаем, что

$$I(P)-I(P^{(1)})$$

по абсолютной величине не больше чем

$$F_1(\varepsilon)-I(P^{(1)}).$$

Здесь ε — совершенно произвольная величина, которую теперь мы можем заставить сходиться к нулю. Тогда и последняя разность будет стремиться к нулю, а следовательно, $I(P)$ должна быть равной $I(P^{(1)})$, в чем и состоит доказываемая теорема.

Но справедлива и более общая теорема:

Если γ — какое-либо конечное или принадлежащее второму числовому классу трансфинитное число, а P — произвольное точечное множество в G_n, то всегда

$$I(P \text{ в } G_n)=I(P^{(\gamma)} \text{ в } G_n). \tag{4}$$

Для доказательства применим метод полной индукции. Предположим, что для *всякого* точечного множества P установлено, что для *всех значений γ', меньших, чем некоторое заданное число* γ первого или второго числового класса, имеет место равенство

$$I(P)=I(P^{(\gamma')}),$$

и покажем, что тогда и

$$I(P)=I(P^{(\gamma)}).$$

В том случае, когда γ является числом *первого* рода, так что существует непосредственно предшествующее ему число γ_{-1}, это не представляет никакого труда. Действительно, тогда

$$(P^{(\gamma_{-1})})^{(1)}=P^{(\gamma)}$$

и из только что доказанной теоремы следует, что

$$I(P^{(\gamma_{-1})})=I(P^{(\gamma)}),$$

а потому и

$$I(P)=I(P^{(\gamma)}).$$

Предположим теперь, что γ является *трансфинитным* числом *второго* рода.

Здесь мы рассматриваем часть пространства

$$\Pi(\varepsilon, P^{(\gamma)})$$

внутри H и обозначаем разность

$$H-\Pi(\varepsilon, P^{(\gamma)})$$

через Δ_γ.

Что касается положительной величины ε, то мы предполагаем лишь выбранной ее так, чтобы на границу части пространства $\Pi(\varepsilon, P^{(\gamma)})$ не попало *ни одной* точки счетного точечного множества $(P+P^{(1)}-P^{(\gamma)})$. Такой выбор ε и притом любой малости всегда возможен, что легко видеть, если применить мою теорему, доказанную в № 1 этого сочинения [здесь I.5.1].

В части пространства Δ_γ содержится определенная составная часть множества $P+P^{(1)}$, вообще состоящая из бесконечного числа точек, которую мы обозначим через Q_γ.

Множество Q_γ, очевидно, таково, что *его производное порядка γ равно нулю,* так как в противном случае вне части пространства

$$\Pi(\varepsilon, P^{(\gamma)})$$

имелась бы по крайней мере одна точка множества $P^{(\gamma)}$, чего в действительности нет.

Так как γ является трансфинитным числом второго рода, то можно (см. заключение § 16) задать такое еще меньшее число $\gamma<\gamma$, что и γ-е производное множества Q_γ равно нулю.

Поскольку же доказываемая теорема предположена верной для всех точечных множеств, а значит и для Q_γ, и при всех $\gamma'<\gamma$, то отсюда заключаем, что

$$I(Q_\gamma)=I(Q_\gamma^{(\gamma)})=0. \tag{5}$$

Так как далее точечные множества Q_γ и $(P+P^{(1)})-Q_\gamma$ расположены вне друг друга таким образом, что одно содержится в части пространства Δ_γ, а другое — в части пространства $\Pi(\varepsilon-\varkappa, P^{(\gamma)})$, полностью отделенной от первой (для достаточно малой величины $\varkappa$, что легко показывается), то имеем

$$I(P)=I(P+P^{(1)})=I((P+P^{(1)})-Q_\gamma)+I(Q_\gamma),$$

а поскольку $I(Q_\gamma)=0$, то

$$I(P)=I((P+P^{(1)})-Q_\gamma). \tag{6}$$

Теперь под ρ мы понимаем произвольную величину, которая меньше ε и, кроме того, столь *мала,* что $\Pi(\rho, (P+P^{(1)})-Q_\gamma)$ оказывается полностью расположенной в части пространства $\Pi(\varepsilon, P^{(\gamma)})$. Последнее условие выполнимо, так как ε выбирается так, что на границе $\Pi(\varepsilon, P^{(\gamma)})$ не имеется *ни одной* точки множества $(P+P^{(1)})-P^{(\gamma)}$. Это имеет то следствие, что точки множества $P+P^{(1)}$ не подходят *сколь угодно близко* к этой границе, ибо в противном случае они включали бы в себя точку множества $P^{(\gamma)}$, что, очевидно, невозможно, так как все точки множества $P^{(\gamma)}$ отстоят от этой границы *самое меньшее* на расстояние ε.

Следовательно, для *достаточно малого* ρ имеем

$$F(\rho, (P+P^{(1)})-Q_\gamma)<F(\varepsilon, P^{(\gamma)}),$$

а значит, и

$$F(\rho, P)-F(\rho, P^{(\gamma)})<(F(\varepsilon, P^{(\gamma)})-F(\rho, P^{(\gamma)}))+$$
$$+(F(\rho, P)-F(\rho, (P+P^{(1)})-Q_\gamma)).$$

С другой стороны, очевидно, что

$$F(\rho, P)-F(\rho, P^{(\gamma)})\geqslant 0.$$

Если теперь мы позволим ρ сделаться бесконечно малой, то, принимая во внимание (6), получаем, что разность

$$I(P)-I(P^{(\gamma)})$$

по абсолютной величине не больше чем

$$F(\varepsilon, P^{(\gamma)})-I(P^{(\gamma)}).$$

Здесь ε — произвольная положительная величина, удовлетворяющая некоторым условиям, которые, однако, не ограничивают ее малости. Поэтому если разрешить ε стать бесконечно малой, то получим, что

$$I(P)=I(P^{(\gamma)}).$$

Поэтому мы можем рассматривать теорему (4) как доказанную при помощи полной индукции. Из нее теперь получаются такие следствия.

I. *Если P является приводимым множеством, то его протяженность $I(P)$ всегда равна нулю.*

Действительно, в этом случае существует такое наименьшее α, что

$$P^{(\alpha)}\equiv 0.$$

Следовательно, $I(P^{(\alpha)})$, а потому и $I(P)$ равны нулю.

Эта теорема является обобщением моей теоремы, доказанной в № 4 данной работы [I.5.4] для *линейных* точечных множеств.

II. Если P не является приводимым, то всегда существует совершенное множество S, имеющее ту же протяженность, что и P, так что

$$I(P \text{ в } G_n)=I(S \text{ в } G_n). \tag{7}$$

Действительно, по теореме E из § 16 существует такое совершенное множество S, что для некоторого наименьшего числа α, принадлежащего первому или второму числовому классу,

$$P^{(\alpha)}\equiv S;$$

следовательно, по (4) имеем

$$I(P)=I(S).$$

Отсюда следует, что *определение протяженностей произвольных точечных множеств всегда сводится к нахождению протяженностей совершенных множеств.*

В одной более поздней работе я рассмотрю последнюю проблему подробно, поэтому здесь ограничусь следующими замечаниями.

Для совершенного точечного множества часто случается, что его протяженность равна нулю. Однако это может произойти лишь тогда,

когда совершенное точечное множество не является *всюду плотным* ни в какой n-мерной частичной области пространства G_n.

Пример *линейного* совершенного множества нулевой протяженности дан мною в примечании 11) к № 5 [I.5.5]. Аналогичные примеры легко построить и в G_n при $n>1$.

Напротив, если совершенное точечное множество всюду плотно в некоторой n-мерной части пространства H, то, очевидно, его протяженность отлична от нуля.

Однако, с другой стороны, существуют и совершенные множества, *не являющиеся всюду плотными ни в какой сколь угодно малой пространственной части, и тем не менее их протяженность имеет некоторую величину, отличную от нуля.*

В физико-математических приложениях учения о множествах [6], о которых я вскоре опубликую выполненные мною исследования, существенную роль играет еще более общее понятие, чем то, которое обозначено здесь через $I(P)$.

Если $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — какая-либо абсолютно интегрируемая функция n координат произвольной точки пространства G_n, P — произвольное точечное множество, полностью расположенное в конечном, а $\Pi(\rho, P \text{ в } G_n)$ — определенная ранее часть пространства, то интеграл

$$\int\limits_{(\Pi(\rho, P \text{ в } G_n))} \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

дает нам непрерывную функцию от ρ, предел которой при $\operatorname{Lim} \rho=0$ приводит к числу, зависящему как от P, так и от функции $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которое я обозначаю через $I(\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n), P \text{ в } G_n)$ или, короче, через $I(\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n), P)$, так что наша $I(P)$ есть не что иное, как $I(1, P)$.

§ 19

Теперь мы намереваемся перейти к более точному изучению *совершенных множеств.*

Так как всякое такое множество является *ограниченным, замкнутым* и *завершенным в себе*, то я выделяю *совершенные множества* из всех образов при помощи особых свойств.

Однако они заслуживают общего и детального изучения также и потому, что все *континуумы* принадлежат к ним, если это слово употребляется в том смысле, какой я придал ему в № 5, § 10 данной работы. Действительно, *под континуумом в собственном смысле* я понимаю всякое *совершенное* точечное множество, которое *связно в себе*; при этом то, что я хочу выразить словом «связное», тоже было объяснено в указанном месте.

Все *остальные* континуумы, которые я в конце № 5 [см. примеч. 12)] назвал *полуконтинуумами*, можно в известном смысле получить при помощи *сложения* и *вычитания* из совершенных точечных множеств и из таких точечных множеств, которые состоят из конечного или беско-

нечного первой мощности числа точек. На основании этого мне кажется, что изучение *совершенных континуумов* должно предшествовать рассмотрению *полуконтинуумов*.

При всем разнообразии, которое мы можем обнаружить в этом *обширном классе совершенных точечных множеств* как в отношении их «протяженностей», так и в наличии среди них удивительнейших и отчасти странных различий по *внутренней* и *внешней форме*, все они, однако, имеют нечто *общее*. Они все имеют *равную мощность*, а значит,— поскольку к ним принадлежат *континуумы*,— *все* они мощности линейного континуума, следовательно, например, мощности *совокупности всех рациональных и иррациональных чисел, которые больше или равны нулю и меньше или равны единице*.

В журнале Крелле, т. 84 [здесь I.3] уже было показано, что мощность *n-мерного континуума* такова же, как и у *одномерного линейного континуума*. В ходе настоящего исследования у нас будет повод вновь подтвердить этот удивительный факт.

Но сначала я опять хочу ограничить свои соображения линейными точечными множествами и изложить доказательство теоремы, что все линейные совершенные множества имеют одинаковую мощность или, что то же самое, два любых таких множества можно поставить в такое отношение друг к другу, которое в известном смысле позволит рассматривать *одно из них как* [*взаимно*] *однозначную функцию другого*.

Пусть прежде всего S — *линейное совершенное точечное множество, заключенное в интервале* $(0\ldots1)$, *которое не является всюду плотным ни в каком сколь угодно малом интервале и которому принадлежат точки* 0 *и* 1. Все остальные совершенные точечные множества, *не являющиеся всюду плотными ни в каком сколь угодно малом интервале*, можно *проективно* свести к только что охарактеризованному. Следовательно, если о S будет показано, что его мощность равна мощности линейного континуума $(0\ldots1)$, то тем самым то же будет доказано для всех линейных совершенных множеств, *которые не являются всюду плотными ни в каком интервале*.

На основании простых соображений, развитых в № 4 этой работы, нашему множеству S соответствует *определенное бесконечное множество частичных интервалов, содержащихся в* $(0\ldots1)$ и полностью отделенных друг от друга, при помощи концевых точек которых *совершенное множество* S *определяется полностью*. Эти концевые точки, взятые вместе, *образуют плотное в себе*, *но не являющееся всюду плотным ни в каком сколь угодно малом интервале*, точечное множество *первой мощности*. Само же S представляет собой *первое производное* предыдущего множества, которое мы обозначим через J, так что

$$S \equiv J^{(1)}. \qquad (1)$$

Тем самым S состоит из двух различных составных частей, а именно из J и из некоторого *другого плотного в себе*, *но не всюду плотного ни в каком сколь угодно малом интервале* точечного множества, которое мы

обозначим через L, так что

$$S \equiv J + L. \qquad (2)$$

Это последнее множество L будет состоять из всех *предельных точек* множества J, которые не принадлежат самому J.

Частичные интервалы, концевые точки которых составляют множество J, мы будем представлять упорядоченными по их *величине*, так что *меньшие* следуют за *большими*, а если среди них встретятся интервалы одинаковой величины, то раньше будем выписывать те, которые расположены левее. При таком упорядочении они образуют следующую бесконечную последовательность:

$$(a_1 \ldots b_1),\ (a_2 \ldots b_2),\ \ldots,\ (a_\nu \ldots b_\nu),\ \ldots \qquad (3)$$

Совокупность всех точек a_ν мы будем обозначать через $\{a_\nu\}$, совокупность всех точек b_ν через $\{b_\nu\}$, а произвольной точке, принадлежащей множеству L, отнесем знак l, так что имеем

$$J \equiv \{a_\nu\} + \{b_\nu\}, \qquad L \equiv \{l\}, \qquad S \equiv \{a_\nu\} + \{b_\nu\} + \{l\}. \qquad (4)$$

Теперь я хочу отчетливо выделить еще следующие факты, легко получаемые из понятия множества S:

Концевые точки 0 и 1 принадлежат составной части L множества S; между любыми двумя интервалами $(a_\mu \ldots b_\mu)$ и $(a_\nu \ldots b_\nu)$ последовательности (3) всегда расположено бесконечное множество других интервалов той же последовательности; во всякой произвольной окрестности отдельной из точек a_ν, b_ν или l находятся интервалы последовательности (3) любой малости.

После того как мы столь полно проанализировали понятие нашего множества S, зададим *произвольное счетное* линейное точечное множество

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_\nu,\ \ldots, \qquad (5)$$

на которое наложим лишь следующие условия:

1) *все точки* φ_ν *отличны друг от друга*;

2) *все они содержатся в интервале* $(0 \ldots 1)$;

3) *концевые точки* 0 *и* 1 *этого интервала не принадлежат множеству* $\{\varphi_\nu\}$;

4) *множество* $\{\varphi_\nu\}$ *всюду плотно в интервале* $(0 \ldots 1)$.

Теперь я утверждаю следующее:

Между точечным множеством $\{\varphi_\nu\}$, *с одной стороны, и множеством интервалов* $\{(a_\nu \ldots b_\nu)\}$, *с другой стороны, всегда можно установить такое закономерное, взаимно однозначное и полное соответствие их элементов, что если* $(a_\nu \ldots b_\nu)$ *и* $(a_\mu \ldots b_\mu)$ *— любые два интервала, а* $\varphi_{\varkappa_\nu}$ *и* $\varphi_{\varkappa_\mu}$ *— соответствующие им точки множества* $\{\varphi_\nu\}$, *то всегда* $\varphi_{\varkappa_\nu}$ *расположена слева или справа от* $\varphi_{\varkappa_\mu}$ *в зависимости от того, расположен ли интервал* $(a_\nu \ldots b_\nu)$ *слева или справа от интервала* $(a_\mu \ldots b_\mu)$, *или, что то же самое, взаимное расположение точек* $\varphi_{\varkappa}$ *и* $\varphi_{\varkappa_\mu}$ *такое же, как и взаимное расположение соответствующих им интервалов* $(a_\nu \ldots b_\nu)$ *и* $(a_\mu \ldots b_\mu)$.

Чтобы установить такое соответствие между множествами $\{\varphi_\nu\}$ и $\{(a_\nu \ldots b_\nu)\}$, можно поступать так.

Полагаем $\varkappa_1 = 1$, т. е. интервалу $(a_1 \ldots b_1)$ сопоставляем точку φ_1; интервалу $(a_2 \ldots b_2)$ ставим в соответствие имеющую наименьший индекс, а значит, первую встретившуюся при продолжении последовательности (5) точку $\varphi_{\varkappa_2}$, которая по отношению к φ_1 расположена так же, как интервал $(a_2 \ldots b_2)$ расположен по отношению к интервалу $(a_1 \ldots b_1)$; интервалу $(a_3 \ldots b_3)$ ставим в соответствие имеющую наименьший индекс, т. е. первую встретившуюся при продолжении последовательности (5), точку $\varphi_{\varkappa_3}$, которая как по отношению к φ_1, так и по отношению к φ_2 расположена так же, как интервал $(a_3 \ldots b_3)$ расположен относительно обоих интервалов $(a_1 \ldots b_1)$ и $(a_2 \ldots b_2)$. Этому закону мы следуем далее, так что в соответствии с ним *первым* ν интервалам последовательности (3) сопоставляются точки

$$\varphi_{\varkappa_1}, \varphi_{\varkappa_2}, \ldots, \varphi_{\varkappa_\nu},$$

которые получают такое же положение относительно друг друга, какое имеют между собой соответствующие им интервалы. Затем непосредственно следующему интервалу $(a_{\nu+1} \ldots b_{\nu+1})$ последовательности (3) ставим в соответствие имеющую наименьший индекс точку $\varphi_{\varkappa_{\nu+1}}$ последовательности (5), которая по отношению ко всем точкам $\varphi_{\varkappa_1}, \varphi_{\varkappa_2}, \ldots$ $\ldots \varphi_{\varkappa_\nu}$ расположена так же, как интервал $(a_{\nu+1} \ldots b_{\nu+1})$ к соответствующим интервалам $(a_1 \ldots b_1), (a_2 \ldots b_2), \ldots, (a_\nu \ldots b_\nu)$.

Прежде всего ясно, что *всем* интервалам последовательности (3) поставлены в соответствие определенные точки последовательности (5). В самом деле, вследствие всюду плотности множества $\{\varphi_\nu\}$ в интервале $(0 \ldots 1)$ и непринадлежности к $\{\varphi_\nu\}$ концевых точек 0 и 1 в этой последовательности имеется бесконечно много точек, которые имеют *требуемое* расположение относительно определенного конечного числа точек этого множества $\{\varphi_\nu\}$, а поэтому процесс упорядочения, проистекающий из нашего правила, *не обрывается.*

Следовательно, точки $\varphi_{\varkappa_\nu}$ образуют некоторую бесконечную последовательность точек

$$\varphi_{\varkappa_1}, \varphi_{\varkappa_2}, \ldots, \varphi_{\varkappa_\nu}, \ldots, \tag{6}$$

содержащуюся в (5), и упорядочение обоих множеств $\{(a_\nu \ldots b_\nu)\}$ и $\{\varphi_{\varkappa_\nu}\}$ полностью соответствовало бы выставленным требованиям, если бы мы смогли убедиться еще в том, что и, наоборот, последовательность (5) *полностью содержится* в последовательности (6), а потому *отличается* от нее *лишь другим расположением членов.* Что это действительно так, вытекает из следующего соображения.

Представим себе, что ν первых соответствий по нашему правилу уже установлено, а тем самым ν точек $\varphi_{\varkappa_1}, \varphi_{\varkappa_2}, \ldots, \varphi_{\varkappa_\nu}$ отнесены первым ν интервалам последовательности (3) так, что на обеих сторонах налицо одинаковое расположение соответствующих элементов. Теперь среди *оставшихся* точек нашей последовательности (5) будет содержаться

точка, занимающая наинизшее место в этой последовательности или, что то же самое, имеющая наименьший индекс; мы ее обозначим через φ_ρ. Далее, как вытекает из проведенного выше анализа понятия S, существует бесконечно много интервалов последовательности (3), имеющих по отношению к ν интервалам $(a_1 \ldots b_1), \ldots, (a_\nu \ldots b_\nu)$ *в точности такое же расположение*, какое имеет точка φ_ρ к соответствующим точкам

$$\varphi_{\varkappa_1}, \varphi_{\varkappa_2}, \ldots, \varphi_{\varkappa_\nu}.$$

Пусть среди этих бесконечно многих интервалов интервал $(a_\sigma \ldots b_\sigma)$ будет тем, индекс которого наименьший из всех. Имеет место $\sigma > \nu$. Очевидно, что по нашему правилу при σ-м соотнесении точка φ_ρ должна входить в последовательность [7], т. е.

$$\rho = \varkappa_\sigma.$$

Тогда после σ-го соотнесения *по меньшей мере все* ρ первых точек последовательности (5)

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\rho$$

оказываются распределенными.

Но ρ не зависит от ν и при возрастании ν не убывает, а при увеличении ν до бесконечности само оказывается безгранично возрастающим числом. Следовательно, согласно нашему правилу *все члены* последовательности (5) *в конце концов войдут в строящуюся последовательность* при этом процессе, а потому последовательность (5) полностью содержится в последовательности (6). Значит, эти две последовательности идентичны, если отвлечься от порядка их членов, т. е.

$$\{\varphi_\nu\} \equiv \{\varphi_{\varkappa_\nu}\}. \tag{8}$$

Для большей простоты мы будем писать

$$\varphi_{\varkappa_\nu} = \varphi_\nu.$$

Тогда предыдущий результат мы можем выразить следующим образом:

Расположенное в интервале $(0 \ldots 1)$ *и всюду плотное в нем точечное множество первой мощности всегда можно представить в форме последовательности*

$$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\nu, \ldots, \tag{10}$$

которой не принадлежат концевые точки интервала $(0 \ldots 1)$ *и которая имеет такое отношение к заданному в форме последовательности множеству интервалов*

$$(a_1 \ldots b_1), (a_2 \ldots b_2), \ldots, (a_\nu \ldots b_\nu),$$

что любые две точки ψ_ν *и* ψ_μ *из* (10) *всегда расположены по отношению друг к другу так же, как и соответствующие им интервалы* $(a_\nu \ldots b_\nu)$ *и* $(a_\mu \ldots b_\mu)$ *последовательности* (3). *Даже произвольное точечное множество первой мощности, расположенное в интервале* $(0 \ldots 1)$, *всюду плот-*

ное в нем и не содержащее точек 0 *и* 1, *можно представить в форме последовательности так, что оно в этом виде приобретает свойство последовательности* (10).

Теперь совокупность всех тех точек интервала $(0\ldots1)$, которые не принадлежат множеству $\{\psi_\nu\}$, мы обозначим через F, а произвольного представителя последнего множества — через f, так что

$$F\equiv\{f\},\qquad (0\ldots1)\equiv\{\psi_\nu\}+\{f\}. \tag{11}$$

Как я показал в журнале Крелле, т. 84, с. 254 [здесь I.3], множество F имеет такую же мощность, как и линейный континуум $(0\ldots1)$, а потому по № 1 настоящей работы [I.5.1] его мощность больше первой.

Наше совершенное множество S состоит по (4) из трех множеств $\{a_\nu\}$, $\{b_\nu\}$ и $\{l\}$, т. е.

$$S\equiv\{a_\nu\}+\{b_\nu\}+\{l\}.$$

Если теперь мы напишем вторую формулу из (11) в виде

$$(0\ldots1)\equiv\{\psi_{2\nu}\}+\{\psi_{2\nu-1}\}+\{f\}, \tag{12}$$

то из сравнения этих двух формул на основании № 2 данной работы [здесь I.5.2] получаем, что мы придем к доказательству нашей теоремы, что S и $(0\ldots1)$ имеют одинаковую мощность, если сможем показать, что множества L и F имеют равные мощности. Но последнее, как мы теперь легко установим, действительно имеет место.

Если f — произвольная точка множества F, то, поскольку $\{\psi_\nu\}$ всюду плотно, мы можем найти принадлежащую ему последовательность точек

$$\psi_{\lambda_1},\ \psi_{\lambda_2},\ \ldots,\ \psi_{\lambda_\nu},\ \ldots \tag{13}$$

таких, что

$$\operatorname*{Lim}_{\nu\to\infty}\psi_{\lambda_\nu}=f.$$

Эта последовательность точек определяет соответствующую последовательность интервалов

$$(a_{\lambda_1}\ldots b_{\lambda_1}),\ (a_{\lambda_2}\ldots b_{\lambda_2}),\ \ldots,\ (a_{\lambda_\nu}\ldots b_{\lambda_\nu}),\ \ldots, \tag{14}$$

которые необходимо приближаются к определенной точке l множества L как к пределу.

Из взаимоотношения последовательностей (10) и (3) просто получается, что эти интервалы должны приближаться к некоторой предельной точке и что последняя не может принадлежать J.

Если вместо последовательности (13) мы возьмем другую последовательность точек, принадлежащих множеству $\{\psi_\nu\}$, но приближающихся к точке f как к пределу, то хотя вместо (14) получим другую последовательность интервалов, однако столь же легко убедиться, что она не может иметь другой предельной точки, помимо уже найденной l.

Наоборот, если мы исходим из произвольной точки l множества L и выбираем какую-либо последовательность интервалов (14), прибли-

жающуюся к ней как к пределу, то с помощью (13) получаем определенную соответствующую точку f множества F, остающуюся той же самой, если только мы исходим из одной и той же точки l множества L. Следовательно, все точки l нашего множества L находятся во взаимно однозначном и полном соответствии со всеми точками f множества F, что означает, что эти множества L и F имеют одинаковую мощность. Отсюда, как замечено выше, следует, что *заданное линейное совершенное множество S имеет мощность, равную мощности линейного континуума* $(0 \ldots 1)$ [8].

Выше я показал, что любое линейное совершенное множество, не являющееся всюду плотным ни в каком интервале, можно отобразить полностью и со взаимной однозначностью на линейный континуум, например на весь интервал $(0 \ldots 1)$, а значит, оно одинаковой с ним мощности. Сейчас я хочу показать, что такую же теорему можно доказать для *полностью произвольного* линейного совершенного множества.

Итак, пусть теперь S — такого рода множество на интервале $(-\infty \ldots +\infty)$.

Тогда вообще имеются не соприкасающиеся друг с другом интервалы, *которые нельзя увеличить* и в которых *S всюду плотно*, а значит,— поскольку S совершенно,— *всеми своими точками принадлежащие S*. В совокупности они образуют некоторое множество интервалов *первой* мощности, как это было показано в № 3 данной работы [I.5.3].

Эти интервалы, мыслимые заданными в виде простой бесконечной последовательности, запишем как

$$(c_1 \ldots d_1), \quad (c_2 \ldots d_2), \ \ldots, \quad (c_\nu \ldots d_\nu), \ \ldots \tag{15}$$

Поскольку мы взяли их столь большими, что при любом их увеличении множество S перестает быть всюду плотным в них, то отсюда легко следует, что для всякого S они полностью определяются тем условием, что они не соприкасаются, а в промежутке между двумя любыми из них множество S не является всюду плотным.

Кроме этих интервалов (15), принадлежащих всеми своими точками множеству S, вообще будет существовать некоторое другое множество интервалов, и если оно состоит из бесконечно многих интервалов, то оно тоже имеет *первую* мощность и также определяется множеством S. Каждый из этих интервалов должен содержать некую *совершенную составную часть* множества S, не являющуюся всюду плотной ни в каком частичном интервале и к которой принадлежат концы интервала. Эти интервалы тоже будут браться столь большими, чтобы при дальнейшем увеличении они переставали находиться в указанном отношении к S. Второе множество интервалов мы обозначим через

$$(e_1 \ldots f_1), \ (e_2 \ldots f_2), \ \ldots, \ (e_\nu \ldots f_\nu), \ \ldots \tag{16}$$

Совершенные составные части множества S, содержащиеся в этих интервалах, соответственно будем обозначать через

$$S_1, \ S_2, \ \ldots, \ S_\nu, \ \ldots \tag{17}$$

Из сделанных нами пояснений легко следует, что интервалы последовательности (15) соприкасаются с интервалами последовательности (16) самое большее их концами, а в остальном полностью расположены вне их.

Теперь мы имеем следующее разложение совершенного множества:

$$S \equiv \sum (c_\nu \dots d_\nu) + \sum S_\nu. \tag{18}$$

При этом следует заметить, что члены первой суммы нашего равенства (18) могут иметь отдельные общие точки с членами второй суммы (так как e_ν и f_ν всегда являются точками множества S_ν и так как может случиться, что интервалы последовательности (15) окажутся соприкасающимися с интервалами последовательности (16)). Чтобы освободить разложение (18) множества S от этого неудобства, мы под $\bar{S}_\nu$ будем понимать то множество, которое получается из S_ν выбрасыванием одной или двух точек, которые S_ν могло иметь самое большее с двумя интервалами последовательности (15) (а именно слева или справа). Так что $S_\nu \equiv \bar{S}_\nu$ во всех случаях, когда не существуют такие точки прикосновения, но, напротив, в остальных случаях $S_\nu \equiv \bar{S}_\nu + e_\nu + f_\nu$, $S_\nu \equiv \bar{S}_\nu + e_\nu$ или $S_\nu \equiv \bar{S}_\nu + f_\nu$ в зависимости от того, примыкает ли S к обоим концам интервалов последовательности (15) или же имеет общую точку только с левым или только с правым концом одного из этих интервалов.

Теперь, очевидно, мы можем также написать

$$S \equiv \sum (c_\nu \dots d_\nu) + \sum \bar{S}_\nu, \tag{19}$$

и здесь S разлагается на составные части $(c_\nu \dots d_\nu)$ и $\bar{S}_\nu$, которые не связаны друг с другом.

Всякая составная часть $(c_\nu \dots d_\nu)$, поскольку она сама является континуумом, имеет мощность, равную мощности интервала $(0 \dots 1)$; но то же самое, как мы видели, верно для всякой составной части S_ν, а значит, и для составной части $\bar{S}_\nu$, так как она получается из S_ν удалением самое большее двух точек. (Последнее легко доказывается при помощи метода, которым я пользовался в журнале Крелле, т. 84, с. 254 [здесь I.3].)

Теперь в формуле (19) мы имеем разложение S на *конечное* или *счетно-бесконечное* число подмножеств $(c_\nu \dots d_\nu)$ и $\bar{S}_\nu$, *каждое* из которых имеет мощность линейного континуума.

Следовательно, по известной теореме, доказанной в журнале Крелле, т. 84 [здесь I.3], и совершенное множество S имеет мощность, равную мощности множества $(0 \dots 1)$, а потому *все* линейные совершенные множества имеют *одинаковую* мощность.

В одном из последующих параграфов я докажу ту же самую теорему для совершенных множеств, принадлежащих пространству n измерений.

Сейчас же я хочу остаться в области *линейных* точечных множеств и намереваюсь показать, какой вывод можно сделать из только что доказанной теоремы о мощности *замкнутых* множеств.

Если *замкнутое* линейное множество P *не первой* мощности, т. е. в случае, когда оно неприводимо, оно по теореме E′ из § 17 распадается на

определенное множество R *первой* мощности и на определенное совершенное множество S, так что

$$P \equiv R + S.$$

Напишем R в форме $\{r_\nu\}$; тогда имеем

$$P \equiv \{r_\nu\} + S. \qquad (20)$$

Пусть $\{\eta_\nu\}$ — какое-либо точечное множество *первой* мощности, содержащееся в $(0\ldots1)$, $\{u\}$ — множество остальных точек этого интервала и $\{\theta_\nu\}$ — произвольное точечное множество *первой* мощности, содержащееся в $\{u\}$, а $\{v\}$ — совокупность всех остальных точек множества $\{u\}$. Тогда имеем

$$(0\ldots1) \equiv \{\eta_\nu\} + \{\theta_\nu\} + \{v\}.$$

$$\{u\} \equiv \{\theta_{2\nu}\} + \{\theta_{2\nu-1}\} + \{v\}.$$

А так как

$$\{\eta_\nu\} \sim \{\theta_{2\nu}\}, \qquad \{\theta_\nu\} \sim \{\theta_{2\nu-1}\}, \qquad \{v\} \sim \{v\},$$

то отсюда следует, что

$$(0\ldots1) \sim \{u\},$$

а значит,

$$S \sim \{u\}. \qquad (21)$$

Но

$$(0\ldots1) \equiv \{\eta_\nu\} + \{u\}. \qquad (22)$$

Теперь из формул (20)—(22) следует, что

$$P \sim (0\ldots1), \qquad (23)$$

т. е. если замкнутое линейное точечное множество не *первой* мощности, то оно имеет мощность линейного континуума.

Итак, мы доказали следующую теорему:

Бесконечное замкнутое линейное точечное множество имеет или первую мощность, или мощность линейного континуума; следовательно, оно может быть представлено или в форме Funkt. (ν) *или в форме* Funkt. (x), где ν — *неограниченно изменяющееся конечное целое число, а* x — *неограниченно изменяющееся произвольное число интервала* $(0\ldots1)$.

То, что эта удивительная теорема остается справедливой и для *незамкнутых* линейных точечных множеств, а также для всех n-мерных точечных множеств, будет доказано в следующих параграфах (ср. журнал Крелле, т. 84, с. 257) [здесь I.3].

Отсюда с помощью доказанных в № 5, § 13 теорем будет сделан вывод, что линейный континуум имеет мощность второго числового класса (II) [9].

[Примечания к 5.6]

[1] Охарактеризованное здесь свойство позднее Д. Пеано ввел под своим названием «дистрибутивного свойства» и сделал его доступным широким кругам (*Genocchi, Peano.* Differentialrechnung und Grundsätze der Integralrechnung/Übers. von Bohlmann und Schepp. Leipzig, 1899, Anh. 5, § 9, S. 378 ff.). Благодаря этому изложению здесь

теорема Кантора стала ценным вспомогательным средством, которое — и это, пожалуй, все еще недостаточно известно — открывает, по моему мнению, легчайший и наиболее естественный подход к самым разнообразным математическим теориям, имеющим дело с точечными множествами. В частности, это справедливо для «теоремы о покрытиях» Бореля и основанной на ней теории лебеговской «меры». См.: *Zermelo.* Über das Maβ und die Diskrepanz von Punktmengen.— J. reine und angew. Math., 1927, Bd. 158, S. 154—167, где теорема Кантора приписывается, разумеется ошибочно, Пеано [66].

[2] В действительности p_{i_ν} всегда является первой точкой во *всей* последовательности (p_ν), которая попадает в сферу $K_{\nu-1}$, в чем легко убедиться при помощи индукции, так как каждая K_ν содержится в предыдущей. Далее, нужна теорема, что последовательность вложенных одна в другую замкнутых пространственных частей, соответственно точечных множеств, определяет по крайней мере одну точку, общую им всем.

[3] Это верно, так как расстояние $r_{\mu\nu}$ между любыми двумя точками p_μ, p_ν будет по определению одновременно $\geqslant\rho_\mu$ и $\leqslant\rho_\nu$, а значит, и $\geqslant(\rho_\mu+\rho_\nu)/2$, т. е. по меньшей мере равно сумме обоих радиусов.

Множество P_ν можно будет задать так, что исходя из предельной точки q_ν строится последовательность вложенных друг в друга шаров $K_{\nu\tau}$ с убывающими до нуля радиусами τ и в каждый шаровой слой между двумя такими шарами вставляется по одной точке.

[4] В этом § 18 определяется «протяженность» точечного множества таким способом, который, сколь бы естественным он ни казался, до сих пор оставался малоплодотворным. Первым действительно полезным понятием протяженности является, помоему, лебеговская «мера» как нижняя грань счетного множества интервалов, содержащих в себе точечное множество. Об этом см.: *Carathéodory C.* Vorlesungen über reellen Funktionen. Leipzig, 1918 und 1927, а также уже указывавшуюся в [1] заметку автора в журнале Крелле, т. 158 [67].

[5] В дополнение к данному здесь несколько краткому обоснованию можно заметить следующее. Если бы для *каждого* $\rho>0$ существовала точка q части пространства $\Pi(\rho, P-Q)$, расположенная *вне* $\Pi(\varepsilon, P^{(1)})$, то для сходящейся к нулю последовательности $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots$ можно было бы найти последовательность соответствующих точек q_n, которые находились бы на расстоянии $<\rho_n$ от точек p_n множества $P-Q$, и эти точки p_n имели бы по крайней мере одну точку накопления p' в $P^{(1)}$, одновременно являвшуюся бы точкой накопления для точек q_n. Но эта точка накопления находилась бы *внутри*, а не на границе части пространства $\Pi(\varepsilon, P^{(1)})$, тогда как все q_n должны находиться *вне* $\Pi(\varepsilon, P^{(1)})$.

[6] Предполагавшаяся здесь публикация о «физико-математических приложениях учения о множествах» фактически как таковая не появилась. Лишь намеки на соответствующие идеи имеются, например, на с. 167—169. Было бы интересно поставить вопрос о том, далеко ли отстоит современная физика с ее «квантовой теорией» от такого «инфинитистского» образования понятий?

[7] Действительно,

1. $\sigma>\nu$, поскольку все интервалы с индексами $\leqslant\nu$ уже фигурируют как сравненные интервалы, а потому не могут находиться к ним в требуемом отношении;

2. $\varkappa_\sigma=\rho$, так как все φ_τ с $\tau<\rho$ уже сопоставлены с предшествующими интервалами (имеющими индексы $\leqslant\nu$), а значит, φ_ρ — *первый* интервал в последовательности (5) с требуемым свойством.

Впрочем, доказанная здесь теорема является лишь частным случаем общей теоремы об однозначной характеризации порядкового типа η всех рациональных чисел интервала, доказанной в I.10, § 9. Указанное в (3) множество интервалов J как раз «подобно» точечному множеству $\{\varphi_\nu\}$ в его пространственном расположении.

[8] Эти соображения более подробно обосновываются в указанном выше более позднем сочинении I.10, в § 10, 11, где речь идет о «фундаментальных последовательностях» и «порядковых типах линейного континуума».

[9] Данное в заключение обещание Кантор не смог выполнить, а неожиданные трудности, возникшие при осуществлении доказательства, заставили его преждевременно оборвать тот ряд исследований, продолжение которых предусматривалось первоначально. Вопрос о том, действительно ли континуум имеет «вторую мощность», приходится считать нерешенным и сегодня, спустя полстолетия после этого заявления [68]. Да и более позднюю работу I.10 в «Mathematische Annalen» (1895—1897, Bd. 46 und 49), задачей которой было новое обоснование всей теории множеств, нельзя рассматривать как обещанное продолжение.

Заканчиваемая этим вся публикация I.5 содержит в некотором роде квинтэссенцию труда жизни Кантора, так что все его остальные работы оказываются или предшествующими ей, или дополняющими ее.

6. О РАЗЛИЧНЫХ ТЕОРЕМАХ ТЕОРИИ ТОЧЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ, РАСПОЛОЖЕННЫХ В НЕПРЕРЫВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ n ИЗМЕРЕНИЙ. СООБЩЕНИЕ ПЕРВОЕ * [1]

...Намереваясь сообщить Вам доказательства нескольких теорем, которые я обнаружил в теории множеств, прошу позволить мне начать со следующих теорем A, B, C, упомянутых мною в мемуаре «Основы общего учения о многообразиях». Лейпциг, 1883 [здесь I.5.6, § 16]. Так как я буду ссылаться на эту работу в различных местах, то позволю себе обозначить ее буквами «Gr.».

Теорема A. «Точечное множество P (расположенное в непрерывном пространстве G_n n измерений), имеющее *первую мощность*, не может быть *совершенным* множеством».

Теорема B. «Если число α принадлежит *первому* или *второму* числовым классам и P — такое точечное множество, что его *производное множество* $P^{(\alpha)}$ порядка α обращается в нуль, то первое производное $P^{(1)}$ множества P и само P имеют *первую* мощность, кроме случаев, когда множества P или $P^{(1)}$ конечны».

---

* Sur divers théorèmes de la théorie des ensembles de points situés dans un espace continu à n dimension. Première communication: Extrait d'une lettre adressée à l'éditeur.— Acta math., 1883, vol. 2, p. 409—414. Перевод Ф. А. Медведева.

Теорема C. «Если P — такое точечное множество, что его первое *производное* $P^{(1)}$ имеет первую мощность, то существуют такие числа α *первого* или *второго* числовых классов, что имеем тождественно

$$P^{(\alpha)} \equiv 0,$$

и среди всех этих чисел α имеется одно, являющееся наименьшим».

Доказательство теоремы A. В соответствии с «Gr., § 10» я называю *совершенным точечным множеством* такое точечное множество S, что его первое производное $S^{(1)}$ совпадает с самим S, так что всякая точка s, принадлежащая S, является предельной точкой множества S, а всякая предельная точка s' множества S принадлежит S.

Пусть теперь

$$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_\nu, \ldots$$

— точки, образующие P; мы можем вообразить их заданными в форме такой последовательности (p_ν), поскольку P по условию нашей теоремы имеет *первую мощность*.

Мы предполагаем, что каждая точка p_ν из P является *предельной точкой* множества P, и отсюда намереваемся заключить о существовании *предельных точек* множества P, которые не принадлежат P как его *точки*. Отсюда будет следовать, что P не может быть совершенным множеством, так как если оно совершенно, то не только каждая *точка* из P должна быть *предельной точкой* множества P, но и каждая предельная точка множества P необходимо должна быть *точкой, принадлежащей* P.

Принимаем p_1 за центр непрерывного множества $(n-1)$-го измерения, являющегося геометрическим местом точек пространства G_n, отстоящих от p_1 на расстоянии $\rho_1=1$. Такое множество назовем сферой радиуса ρ_1 и обозначим ее через K_1.

Пусть p_{i_2} — первая из всех тех точек последовательности (p_ν), которые следуют за p_1 и попадают *внутрь* сферы K_1 (внутри сферы K_1 имеется бесконечно много таких точек, поскольку по нашему допущению центр p_1 является *предельной точкой* множества P). Обозначим через σ_1 расстояние между точками p_1 и p_{i_2} и возьмем p_{i_2} за центр *второй* сферы K_2, радиус ρ_2 которой определяется условием быть меньшей из двух величин

$$\tfrac{1}{2}\sigma_1 \quad \text{и} \quad \tfrac{1}{2}(\rho_1-\sigma_1).$$

Тогда сфера K_2 полностью расположена внутри K_1, а все точки

$$p_1, p_2, \ldots, p_{i_2-1}$$

последовательности (p_ν) расположены вне сферы K_2; радиус ρ_2 последней, очевидно, меньше $^1/_2$.

Точно так же пусть p_{i_3} — первая точка последовательности (p_ν) из всех тех, которые следуют за p_{i_2} и которые попадают внутрь сферы K_2; их имеется бесконечно много, поскольку p_{i_2} предположена предельной точкой множества P. Через σ_2 обозначим расстояние между точками p_{i_2} и p_{i_3} и возьмем p_{i_3} за центр третьей сферы K_3, радиус ρ_3 которой опреде-

ляется условием быть меньшей из двух величин

$$^1/_2\,\sigma_2 \quad \text{и} \quad ^1/_2\,(\rho_2-\sigma_2).$$

Тогда сфера K_3 полностью расположена внутри K_2, а все точки

$$p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_{i_3-1}$$

последовательности (p_ν) расположены вне сферы K_3; радиус ρ_3, очевидно, меньше $^1/_4$.

Следовательно, мы видим здесь *закон*, по которому можно построить бесконечную последовательность сфер

$$K_1,\ K_2,\ K_3,\ \ldots,\ K_\nu,\ \ldots,$$

связанную с определенной последовательностью целых чисел i_ν, растущих с их индексом так, что

$$1<i_2<i_3<\ldots$$

Каждая сфера K_ν расположена полностью внутри предыдущей сферы $K_{\nu-1}$.

Центр p_{i_ν} сферы K_ν определяется тем условием, что он является первой точкой последовательности (p_ν) из всех тех точек, которые следуют за $p_{i_{\nu-1}}$ и которые расположены внутри сферы $K_{\nu-1}$; радиус ρ_ν сферы K_ν определяется условием быть меньшим из двух чисел

$$^1/_2\,\sigma_{\nu-1} \quad \text{и} \quad ^1/_2\,(\rho_{\nu-1}-\sigma_{\nu-1}),$$

где через $\sigma_{\nu-1}$ обозначено расстояние между точками $p_{i_{\nu-1}}$ и p_{i_ν}.

Все точки $p_1, p_2, \ldots, p_{i_{\nu-1}}$ расположены вне сферы K_ν; однако имеется бесконечное число точек последовательности (p_ν), которые расположены внутри сферы K_ν, поскольку центр p_{i_ν} является в соответствии с нашим предположением предельной точкой множества P. Поскольку, очевидно, имеем

$$\rho_\nu \leqslant 1/2^{\nu-1},$$

то радиусы сфер K_ν делаются бесконечно малыми при $\nu=\infty$, а поскольку сферы K_ν расположены так, что K_ν находится внутри $K_{\nu-1}$, последняя — внутри $K_{\nu-2}$ и т. д., то отсюда по известному принципу заключаем о существовании точки t, к которой неопределенно приближаются центры p_{i_ν} таким образом, что имеем

$$\lim_{\nu=\infty} p_{i_\nu} = t;$$

следовательно, t является *предельной точкой* множества P. Но вместе с тем мы убеждаемся, что t не является *точкой*, принадлежащей P. Действительно, если бы это было так, то для некоторого значения индекса n имело бы место $t=p_n$ — *невозможное* равенство, поскольку t расположена внутри сферы K_ν, сколь бы велико ни было ν, а ν, напротив, можно взять достаточно большим, т. е. $\nu>n$, с тем чтобы p_n оказалась вне сферы K_ν.

Мы, следовательно, доказали, что P не может быть *совершенным множеством.*

Доказательство теоремы В. Если α — любое заданное число *первого* или *второго* числовых классов, то, каково бы ни было множество P, имеем следующее тождество:

$$P^{(1)} \equiv \sum_{\alpha'} (P^{(\alpha')} - P^{(\alpha'+1)}) + P^{(\alpha)}, \tag{1}$$

в котором α' пробегает все положительные целые числа, которые *меньше* α. Справедливость тождества (1) легко вытекает из общего понятия *производного множества* $P^{(\alpha)}$ порядка α.

Если α является таким числом, что существует другое число α_{-1}, непосредственно предшествующее α, то $P^{(\alpha)}$ определяется как *первое производное множество* множества $P^{(\alpha_{-1})}$; когда же α является таким числом (вроде, например, ω, ω^{ω} или $\omega^{\omega^{\omega}}+\omega^2$), что оно не имеет непосредственно предшествующего, то $P^{(\alpha)}$ определяется как наибольший общий делитель всех производных множеств $P^{(\alpha')}$, порядки α' которых *меньше* α.

По условию теоремы $P^{(\alpha)}$ обращается в нуль. Значит, здесь имеем

$$P^{(1)} \equiv \sum_{\alpha'} (P^{(\alpha\ )} - P^{(\alpha'+1)}).$$

Число значений у α' конечно или бесконечно, в зависимости от того, принадлежит ли α *первому* или *второму* числовому классу; в последнем случае множество значений α' имеет *первую* мощность (см. определение второго класса чисел в «Gr.», § 11).

Каждый член

$$(P^{(\alpha')} - P^{(\alpha'+1)})$$

нашей суммы есть множество точек, принадлежащее к категории тех, которые я называю *изолированными множествами* (см.: Ann. math., vol. 21, p. 51) [I.5.4] [2]. Как я доказал там же, *бесконечное* и *изолированное* множество всегда имеет *первую мощность.* Следовательно, член

$$(P^{(\alpha')} - P^{(\alpha'+1)})$$

нашей суммы есть конечное множество или множество *первой мощности.* Тем самым мы легко получаем, что $P^{(1)}$ тоже имеет *первую мощность*, а значит, первой мощности и P, как было доказано в только что указанном месте.

Доказательство теоремы С. Обозначив через Ω первое число третьего числового класса, для любого множества P имеем тождество:

$$P^{(1)} \equiv \sum_{\alpha} (P^{(\alpha)} - P^{(\alpha+1)}) + P^{(\Omega)}, \tag{2}$$

где α пробегает все целые положительные числа *первого* и *второго* числовых классов.

По условию нашей теоремы множество P таково, что его первое производное $P^{(1)}$ имеет *первую мощность*. Следовательно, и все производные $P^{(\alpha)}$, являющиеся делителями множества $P^{(1)}$, имеют ту же самую мощность, как только они состоят из бесконечного числа точек.

Опираясь теперь на теорему A, доказанную выше, мы заключаем, что разность

$$(P^{(\alpha)}-P^{(\alpha+1)})$$

не может обращаться в нуль, пока $P^{(\alpha)}$ *не станет нулем.*

Следовательно, если бы все производные $P^{(\alpha)}$ были *отличными* от нуля, то все члены $(P^{(\alpha)}-P^{(\alpha+1)})$ нашей суммы в правой части равенства (2) тоже были бы отличными от нуля. Поскольку же множество этих членов имеет *вторую* мощность (см. «Gr.», § 12), то отсюда тем более следовало бы, что множество точек в правой части нашего равенства (2) имело бы мощность, *не меньшую* чем *вторая*. Это противоречило бы тому условию, что множество $P^{(1)}$ в левой части равенства (2) предположено имеющим *первую* мощность. Следовательно, все производные $P^{(\alpha)}$ не могут быть отличными от нуля, а значит, существуют такие числа α *первого* или *второго* числовых классов, что

$$P^{(\alpha)}\equiv 0.$$

Как легко видеть, среди этих чисел α имеется наименьшее.

В мемуаре «Gr.» с. 31 [здесь 90] я указал также предложение, относящееся к случаю, когда $P^{(1)}$ не первой мощности, и которое в той форме, в которой я его выразил, не вполне справедливо во всей его общности. Как я обнаружил тогда, несомненно существует единственное разложение

$$P^{(1)}=R+S,$$

где S — совершенное множество, а R — множество *первой* мощности. Исходя из этого, я утверждал, что R является приводимым множеством, что вообще неправильно.

Господин Бендиксон из Стокгольма, который с замечательным успехом проанализировал это мое предложение, обнаружил, что R всегда таково, что для некоторого γ из первого или второго числовых классов имеет место равенство

$$\mathfrak{D}(R, R^{(\gamma)})=0.$$

Из сообщений, которые мне любезно прислал г. Бендиксон, вытекает, что он тогда совершенно независимо нашел и мои результаты, относящиеся к этому вопросу, которые он пополнил и исправил в указанном смысле. По моей просьбе г. Бендиксон любезно согласился отредактировать свои изыскания, чтобы опубликовать их вслед за этим сообщением [3].

[Примечание]

Ср. подробное изложение этого вопроса в § 16 работы I.5.6 и сделанные там замечания издателя.

7. О МОЩНОСТИ СОВЕРШЕННЫХ ТОЧЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ * [1]

...Что касается моей теоремы, в которой утверждается, что все *совершенные* точечные множества имеют одну и ту же мощность, т. е. мощность *континуума*, то я намереваюсь доказать ее следующим образом, ограничиваясь сначала линейными совершенными множествами. Пусть S — любое совершенное точечное множество, *не являющееся всюду плотным ни в каком интервале*, сколь бы малым он ни был. Мы предположим, что S содержится в интервале $(0 \ldots 1)$, концы которого принадлежат S; очевидно, что все остальные случаи, когда совершенное множество не является всюду плотным ни в каком интервале, можно свести к указанному путем проектирования.

В соответствии с моими соображениями в «Acta mathematica», т. 2, с. 378 [2] существует бесконечное множество различных интервалов, каждый из которых отделен от другого и которые мы вообразим расположенными по величине так, что меньшие интервалы идут после бóльших; мы обозначим их в этом порядке так:

$$(a_1 \ldots b_1), \quad (a_2 \ldots b_2), \ \ldots, \quad (a_\nu \ldots b_\nu), \ \ldots; \qquad (1)$$

они по отношению к множеству S таковы, что внутрь каждого из них не попадает ни одна точка из S, тогда как их концы a_ν и b_ν в совокупности с остальными предельными точками множества точек $\{a_\nu, b_\nu\}$ принадлежат S и определяют его. Через g мы обозначим любую из этих остальных предельных точек множества $\{a_\nu, b_\nu\}$, через $\{g\}$ — множество их и тогда имеем

$$S \equiv \{a_\nu\} + \{b_\nu\} + \{g\}. \qquad (2)$$

Кроме того, последовательность (1) интервалов такова, что промежуток между любыми двумя из них $(a_\nu \ldots b_\nu)$ и $(a_\mu \ldots b_\mu)$ всегда содержит бесконечное множество интервалов последовательности; более того, если $(a_\rho \ldots b_\rho)$ — какой-либо из этих интервалов, то существуют другие интервалы той же последовательности (1), которые бесконечно приближаются или к точке a_ρ, или к точке b_ρ, поскольку a_ρ и b_ρ, как *точки* совершенного множества S, являются его *предельными точками*.

Установив это, я беру какое-либо *всюду плотное* в интервале $(0 \ldots 1)$ множество первой мощности различных точек

$$\varphi_1, \ \varphi_2, \ \ldots, \ \varphi_\nu, \ \ldots; \qquad (3)$$

предполагается лишь, что концевые точки 0 и 1 не содержатся среди точек φ_ν.

Чтобы указать пример нужного нам здесь множества, напомню форму последовательности, в которую я расположил множество всех ра-

* De la puissance des ensembles parfaits de points: Extrait d'une lettre adressée à l'éditeur.— Acta math., 1884, vol. 4, p. 381—392. Перевод Ф. А. Медведева.

циональных чисел $\geqslant 0$ и $\leqslant 1$, в «Acta mathematica», т. 2, с. 319 [здесь I.3] [3], и для нашей цели нужно лишь устранить два первых члена, которыми там являются 0 и 1.

Однако я предпочитаю рассматривать последовательность (3) во всей ее общности.

Теперь я утверждаю следующее: *множество точек* $\{\varphi_\nu\}$ *и множество интервалов* $\{(a_\nu \dots b_\nu)\}$ *могут быть так однозначно сопоставлены друг с другом, что если* $(a_\nu \dots b_\nu)$ и $(a_\mu \dots b_\mu)$ — *два любых интервала, принадлежащие последовательности* (1), *а* φ_{k_ν} *и* φ_{k_μ} — *соответствующие им точки последовательности* (3), *то число* φ_{k_ν} *всегда меньше или больше числа* φ_{k_μ} *в зависимости от того, помещается ли интервал* $(a_\nu \dots b_\nu)$ *в сегменте* $(0 \dots 1)$ *перед интервалом* $(a_\mu \dots b_\mu)$ *или после него* [1].

Такое соответствие между множествами $\{\varphi_\nu\}$ и $\{(a_\nu \dots b_\nu)\}$ можно установить, например, по следующему правилу.

Интервалу $(a_1 \dots b_1)$ сопоставляем точку φ_1, интервалу $(a_2 \dots b_2)$ — член последовательности (3) с наименьшим индексом, имеющий такое же отношение «больше» или «меньше» к φ_1, в каком находится интервал $(a_2 \dots b_2)$ к интервалу $(a_1 \dots b_1)$ по их размещению на сегменте $(0 \dots 1)$, и этот член обозначаем через φ_{k_2}; затем интервалу $(a_3 \dots b_3)$ сопоставляем член с наименьшим индексом, имеющий такое же отношение «больше» или «меньше» к φ_1 и φ_2, в каком интервал $(a_3 \dots b_3)$ находится к интервалам $(a_1 \dots b_1)$ и $(a_2 \dots b_2)$ по их размещению на сегменте $(0 \dots 1)$.

Вообще интервалу $(a_\nu \dots b_\nu)$ сопоставляется член с наименьшим индексом последовательности (3) (его мы обозначим через φ_{k_ν}), имеющий такое же отношение «больше» или «меньше» ко всем уже расположенным точкам $\varphi_1, \varphi_{k_2}, \dots, \varphi_{k_{\nu-1}}$, в каком находится интервал $(a_\nu \dots b_\nu)$ к соответствующим интервалам $(a_1 \dots b_1), (a_2 \dots b_2), \dots, (a_{\nu-1} \dots b_{\nu-1})$ по их размещению на сегменте $(0 \dots 1)$.

Я утверждаю, что в соответствии с этим правилом *все точки* $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\nu, \dots$ *последовательности* (3) *будут последовательно сопоставлены, хотя и в порядке, отличном от закона последовательности* (3), *различным интервалам последовательности* (1). Действительно, для всякого отношения «больше» или «меньше» между конечным числом точек последовательности (3) много раз найдется сходное отношение такого же числа интервалов последовательности (1) по их размещению в сегменте $(0 \dots 1)$; это проистекает из того, что множество S является совершенным множеством, которое не является всюду плотным ни в каком интервале, сколь бы малым он ни был.

Положим для упрощения

$$\varphi_1 = \psi_1, \quad \varphi_{k_2} = \psi_2, \dots, \quad \varphi_{k_\nu} = \psi_\nu, \dots$$

Тогда последовательность

$$\psi_1, \ \psi_2, \ \dots, \ \psi_\nu, \ \dots \tag{4}$$

[1] Следовательно, речь здесь идет не о местах ν и μ, занимаемых этими интервалами в последовательности (1).

состоит абсолютно из тех же элементов, что и последовательность (3), *и последовательности* (3) *и* (4) *отличаются лишь расположением их членов.*

Значит, последовательность (4) точек ψ_ν имеет то замечательное отношение к последовательности интервалов (1), что всякий раз, как ψ_ν больше или меньше ψ_μ, так и a_ν и b_ν соответственно больше или меньше a_μ и b_μ. Еще раз напомним, что множество $\{\psi_\nu\}$, поскольку оно совпадает с заданным множеством $\{\varphi_\nu\}$ с точностью до порядка членов, является всюду плотным на всем сегменте $(0\ldots 1)$ и что концевые точки последнего 0 и 1 не принадлежат этому множеству.

Теперь, как легко доказать, получаем такие следствия указанного соответствия между множествами $\{\psi_\nu\}$ и $\{(a_\nu\ldots b_\nu)\}$.

Если $(a_{\lambda_1}\ldots b_{\lambda_1})$, $(a_{\lambda_2}\ldots b_{\lambda_2})$, ..., $(a_{\lambda_\nu}\ldots b_{\lambda_\nu})$, ... — *любая последовательность интервалов, принадлежащих последовательности* (1), *которая бесконечно приближается либо к точке* a_ρ, *либо к точке* b_ρ, *то соответствующая последовательность точек* ψ_{λ_1}, ψ_{λ_2}, ..., ψ_{λ_ν}, ..., *принадлежащих последовательности* (4), *бесконечно приближается к точке* ψ_ρ, *и наоборот.*

Если $(a_{\lambda_1}\ldots b_{\lambda_1})$, $(a_{\lambda_2}\ldots b_{\lambda_2})$, ..., $(a_{\lambda_\nu}\ldots b_{\lambda_\nu})$, ... — *произвольная последовательность того же вида, но такая, что ее члены бесконечно приближаются к точке g множества S (см. формулу* (2) *и смысл точки g), то соответствующая последовательность* ψ_{λ_1}, ψ_{λ_2}, ..., ψ_{λ_ν}, ... *в свою очередь бесконечно приближается к определенной точке сегмента* $(0\ldots 1)$, *которая не совпадает ни с какой точкой последовательностей* (3) *и* (4) *и которая, сверх того, полностью определяется точкой g. Обозначим через h эту точку, соответствующую точке g. Обратно, пусть h — любая точка сегмента* $(0\ldots 1)$, *не принадлежащая последовательностям* (3) *или* (4); *тогда она определяет точку g множества S, отличную от точек a_ν и b_ν. Таким образом, два переменных числа g и h являются однозначными функциями друг друга, а значит, множества $\{g\}$ и $\{h\}$ определенно имеют одинаковую мощность.*

Отсюда получается доказательство вышеуказанной теоремы.

Действительно, по формуле (2) имеем

$$S\equiv\{a_\nu\}+\{b_\nu\}+\{g\}.$$

Далее, очевидно, что

$$(0\ldots 1)\equiv\{\varphi_{2\nu}\}+\{\varphi_{2\nu-1}\}+\{h\}.$$

Поскольку же имеют место следующие формулы:

$$\{a_\nu\}\sim\{\varphi_{2\nu}\},\qquad \{b_\nu\}\sim\{\varphi_{2\nu-1}\},\qquad \{g\}\sim\{h\},$$

то по теореме (E) в «Acta mathematica», т. 2, с. 318 [здесь I.5.4] [[4]] получаем формулу

$$S\sim(0\ldots 1),$$

т. е. совершенное множество S имеет ту же мощность, что и линейный континуум, а это и требовалось доказать.

...Это доказательство имеет то преимущество, что позволяет нам обнаружить замечательный большой класс непрерывных функций действительного переменного x, свойства которых приводят к интересным исследованиям независимо от того, рассматриваются ли эти функции в соответствии с их определением, связанным с нашим изложением, или же их представляют в форме тригонометрических рядов, которые определенно существуют для них, поскольку эти непрерывные функции не имеют бесконечного числа максимумов и минимумов.

В самом деле, на интервале $(0\ldots 1)$ мы можем задать функцию $\psi(x)$, удовлетворяющую следующим условиям:

когда x заключен в каком-либо из интервалов $(a_\nu \ldots b_\nu)$, т. е. $a_\nu \leqslant x \leqslant b_\nu$, то $\psi(x)=\psi_\nu$; когда x имеет значение g, получаемое как предел последовательности интервалов $(a_{\lambda_1}\ldots b_{\lambda_1}), \ldots, (a_{\lambda_\nu}\ldots b_{\lambda_\nu}), \ldots$, то полагаем

$$\psi(g) = h = \lim_{\nu=\infty} \psi_{\lambda_\nu}. \tag{5}$$

В соответствии со сказанным $\psi(x)$ *является, конечно, непрерывной монотонной*[2] *функцией непрерывного переменного* x; *когда* x *возрастает от* 0 *до* 1, $\psi(x)$ непрерывно изменяется, не убывая, от 0 до 1; ее геометрический образ представляет собой лестничнообразное множество прямолинейных сегментов, каждый из которых параллелен оси x, дополненное некоторыми точками, делающими эту кривую непрерывной. Частный случай этих функций уже содержится в примере, упомянутом мной в «Acta mathematica», т. 2, с. 407 [см. примеч. авт. 11) к I.5.5] [6]. Полагая

$$z = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \ldots + \frac{c_\rho}{3^\rho} + \ldots, \tag{6}$$

где коэффициенты c_μ могут произвольно принимать значения 0 и 2, а ряд может состоять из конечного и бесконечного числа членов, имеем, что $\{z\}$ является *совершенным* множеством S, расположенным в интервале $(0\ldots 1)$, причем концевые точки 0 и 1 принадлежат этому множеству $\{z\}$. Более того, множество $\{z\}=S$ здесь таково, что оно не является всюду плотным ни в каком интервале, сколь бы малым он ни был. Можно, наконец, убедиться, что это множество $S=\{z\}$ имеет равной нулю *величину* $\mathfrak{J}(S)$ (*понятие*, которое я вскоре объясню).

Здесь точки, которые мы обозначили через b_ν, получаются из формулы (6) для z, если начиная с некоторого ρ, большего 1, положить $c_\rho=0$, так что все b_ν заключены в формуле

$$b_\nu = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \ldots + \frac{c_{\mu-1}}{3^{\mu-1}} + \frac{2}{3^\mu}. \tag{7}$$

---

[2] Это выражение введено К. Нейманом (см.: Über die nach Kreis-, Kugel- und Zylinderfunktionen fortschreitenden Entwicklungen. Leipzig, 1881, S. 26) [5].

Точки a_ν получаются из той же формулы для z, если начиная с некоторого ρ положить c_ρ равным всегда 2, так что, принимая во внимание равенство

$$1=\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\ldots,$$

имеем

$$a_\nu=\frac{c_1}{3}+\frac{c_2}{3^2}+\ldots+\frac{c_{\mu-1}}{3^{\mu-1}}+\frac{1}{3^\mu}, \quad (8)$$

где $c_\mu=0$, $c_{\mu+1}=c_{\mu+2}=\ldots=2$.

Свяжем теперь переменное z с другим переменным y, определяемым формулой

$$y=\frac{1}{2}\left(\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{2^2}+\ldots+\frac{c_\rho}{2^\rho}+\ldots\right), \quad (9)$$

относительно которой условимся, что коэффициенты c_ρ имеют те же значения, что и в (6).

Очевидно, что эта связь делает y функцией от z, которую мы обозначим через $\psi(z)$. Теперь мы замечаем, что два значения $\psi(z)$ для $z=a_\nu$ и $z=b_\nu$ оказываются равными, т. е.

$$\psi(a_\nu)=\psi(b_\nu)=\frac{1}{2}\left(\frac{c_1}{2^1}+\frac{c_2}{2^2}+\ldots+\frac{c_{\mu-1}}{2^{\mu-1}}+\frac{2}{2^\mu}\right).$$

Отсюда получается непрерывная и монотонная функция $\psi(x)$ непрерывного переменного x, определяемая следующим образом:

для $a_\nu<x<b_\nu$ полагаем $\psi(x)=\psi(a_\nu)=\psi(b_\nu)$, а для $x=z$ $\psi(x)=y=$ $=\psi(z)$.

Г-н Л. Шеффер из Берлина заметил, что эта функция $\psi(x)$, как и многие другие, противоречит теореме г-на Гарнака (см.: Math. Ann., 1882, Bd. 19, S. 241, Lehrs. 5) [7]. В самом деле, эта функция $\psi(x)$ имеет производную $\psi'(x)$, равную нулю, для всех значений x, за исключением тех, которые мы обозначили через z; последние образуют совершенное множество $\{z\}$, величина которого $\mathfrak{I}(\{z\})$ равна нулю. Но г. Шеффер сказал мне также, что он сумел заменить эту теорему некоторой другой, не вызывающей сомнений. Надеюсь, что он вскоре опубликует в «Acta» свои исследования по этому вопросу и по различным другим вопросам, которыми он занимается [8].

...Выше я доказал, что все совершенные линейные точечные множества, не являющиеся плотными ни в какой части сегмента, в котором они расположены, сколь бы малой она ни была, имеют ту же мощность, что и линейный континуум.

Возьмем теперь *произвольное* совершенное линейное точечное множество S, содержащееся в интервале $(-\omega\ldots+\omega)$. Я утверждаю, что это множество S имеет ту же мощность, что и континуум $(0\ldots1)$.

Действительно, поскольку мы уже рассмотрели случай, когда множество S не является плотным ни в какой непрерывной части сегмента $(-\omega \dots +\omega)$, то берем какой-либо интервал $(c \dots d)$, внутри которого S должно быть всюду плотным. Все точки из $(c \dots d)$ тоже принадлежат S, поскольку S является совершенным множеством.

Точечное множество $(c \dots d)$ является частичной системой множества S, а S представляет собой частичную систему сегмента $(-\omega \dots$ $\dots +\omega)$. Поскольку множество $(c \dots d)$ имеет ту же мощность, что и множество $(-\omega \dots +\omega)$, то отсюда заключаем, что и S имеет ту же мощность, что и $(-\omega \dots +\omega)$, т. е. мощность сегмента $(0 \dots 1)$, так как имеет место общая теорема:

«Пусть заданы: вполне определенное множество M произвольной мощности, частичное множество M', взятое в M, и частичное множество M'', взятое в M'. Если последняя система M'' имеет ту же мощность, что и первая M, то среднее множество M' всегда имеет ту же самую мощность, какую имеют M и M'' (см.: Acta math., vol. 2, p. 392) [здесь с. 97] [9].

Когда множество P таково, что первое производное множество $P^{(1)}$ является его делителем, то я называю P *замкнутым множеством.*

Всякое *замкнутое* множество P мощности, бо́льшей первой, разлагается, как мы знаем, единственным образом на множество R первой мощности и совершенное множество S. Отсюда с помощью полученных теорем выводим следующую: «Все замкнутые точечные множества делятся на два класса, одни имеют первую мощность, а другие имеют мощность арифметического континуума».

В очередном сообщении я покажу, что это разбиение на два класса имеет место и для незамкнутых точечных множеств. Тем самым с помощью принципов из § 13 моего мемуара в «Acta mathematica», т. 2, с. 390 [1.5.5] мы определим *мощность арифметического континуума*, доказав, что она совпадает с *мощностью второго класса чисел* (II) [10].

...Имеется понятие объема или величины, относящееся ко всякому множеству P, расположенному в плоском n-мерном пространстве G_n, будь это множество P непрерывным или нет.

В случае, когда P является непрерывным n-мерным континуумом или сводится к системе таких множеств, это понятие совпадает с обычным понятием объема.

Когда P представляет собой континуум меньшего чем n числа измерений, то величина объема обращается в нуль; то же происходит, когда P таково, что $P^{(1)}$ имеет первую мощность, а также в различных других случаях. Но на первый взгляд может показаться удивительным, что этот объем, который я обозначаю через $\mathfrak{J}(P)$, порой имеет отличное от нуля значение для множеств P в пространстве G_n, принадлежащих к тем, которые неплотны ни в какой непрерывной n-мерной части пространства G_n, сколь бы малой она ни была.

Я прихожу к этому общему понятию *объема* или *величины* $\mathfrak{J}(P)$ *произвольного* множества P, содержащегося в G_n, беря *всякую* точку p,

принадлежащую P или $P^{(1)}$, за центр полной сферы n измерений радиуса ρ, которую мы обозначим через $K(p, \rho)$. Наименьшее общее кратное всех этих полных сфер $K(p, \rho)$ (определение наименьшего общего кратного см.: Acta math., vol. 2, p. 357) [I.5.2] [11], т. е.

$$\mathfrak{M}[K(p, \rho)]$$

(где ρ — константа), для каждого ρ представляет собой множество, состоящее из непрерывных кусков n измерений, объем которого определяется по известным правилам при помощи n-кратного интеграла.

Пусть $f(\rho)$ — значение этого интеграла; $f(\rho)$ является непрерывной функцией от ρ, убывающей вместе с ρ. Предел функции $f(\rho)$, когда ρ сходится к нулю, служит у меня для определения объема $\mathfrak{J}(P)$, так что имеем

$$\mathfrak{J}(P) = \lim_{\rho=0} f(\rho). \tag{10}$$

Я особенно подчеркиваю, что это значение *объема* или *величины* произвольного множества P, содержащегося в плоском непрерывном пространстве G_n n измерений, является абсолютно зависящим от самого плоского пространства G_n, составной частью которого является рассматриваемое P, и, в частности, от числа n. Так что если мы рассматриваем *то же самое множество* P как составную часть другого плоского непрерывного пространства H_m, то значение объема множества P по отношению к пространству H_m вообще отлично от значения, относимого к тому же множеству P, рассматриваемому как составная часть пространства G_n.

Например, квадрат со стороной, равной единице, имеет равную нулю *величину*, если он рассматривается как составная часть трехмерного пространства; однако он имеет *величину*, равную 1, когда его рассматривают как часть двумерной плоскости. Это общее понятие *объема* или *величины* неизбежно для меня в исследованиях о *размерностях непрерывных множеств*, которые я обещал в «Acta mathematica», т. 2, с. 407 [здесь I.5.5, примеч. авт. 12)] и которые я пришлю позднее для Вашего журнала.

Ограничиваясь здесь *линейными* множествами точек, заключенными в интервале $(0\ldots 1)$, получаем, что *объем* или *величина* такого множества P легко определяется по методу, изложенному в «Acta mathematica», т. 2, с. 378 [здесь с. 61], где мы рассматривали интервалы, обозначенные через $(c_\nu \ldots d_\nu)$ и связанные с P и $P^{(1)}$ или, как я писал там, с $\mathfrak{M}(P, P^{(1)})$ по явному закону. Там мы положили

$$\sum (d_\nu - c_\nu) = \sigma,$$

где σ является определенной положительной величиной $\leqslant 1$. В нашем же случае легко убедиться, что

$$\mathfrak{J}(P) = 1 - \sigma. \tag{11}$$

...Совершенные линейные точечные множества S, которые неплотны ни в каком интервале, сколь бы малым он ни был, вообще имеют величину $\mathfrak{J}(S)$, отличную от нуля, но они могут иметь и величину $\mathfrak{J}(S)$, равную нулю.

Что касается тех, для которых $\mathfrak{J}(S)$ отлична от нуля, то при помощи композиции (сложения) их можно свести к множествам, для которых $\mathfrak{J}(S)=0$, и к таким совершенным множествам, которые не только имеют отличную от нуля величину, но и таковы, что все их *совершенные* части, получаемые при ограничении частичными интервалами из $(0\ldots 1)$, в свою очередь имеют отличную от нуля величину.

Для *этого последнего класса* линейных совершенных множеств имеется очень простое доказательство установленной выше теоремы, что их мощность равна мощности континуума.

В самом деле, берем такое совершенное множество S в интервале $(0\ldots 1)$ и полагаем, что концевые точки 0 и 1 принадлежат S. Найдем сначала последовательность (1) интервалов $(a_\nu\ldots b_\nu)$, принадлежащих в объясненном смысле совершенному множеству S.

Пусть x — любая величина >0 и $\leqslant 1$. Через S_x обозначим множество, образованное всеми точками из S, расположенными в интервале $(0\ldots x)$, и определим $\varphi(x)$ следующими условиями:

$$\varphi(0)=0, \quad \varphi(x)=\mathfrak{J}(S_x) \text{ для } x>0 \text{ и } \leqslant 1.$$

Эта функция, как легко видеть, непрерывна и монотонна в интервале $(0\ldots 1)$. При $x=1$ она принимает значение $\varphi(1)=\mathfrak{J}(S)=c$, отличное от нуля в соответствии с предположением, сделанным о S. Более того, в каждом из интервалов $(a_\nu\ldots b_\nu)$, т. е. для $a_\nu\leqslant x\leqslant b_\nu$, она сохраняет постоянное значение $\varphi(x)=\varphi(a_\nu)=\varphi(b_\nu)$. Когда x меньше a_ν, то всегда $\varphi(x)<\varphi(a_\nu)$; когда x больше b_ν, имеем $\varphi(x)>\varphi(b_\nu)$. *Это связано с тем,* что по предположению множество S таково, что всякое частичное совершенное множество, получаемое при ограничении частичными интервалами из $(0\ldots 1)$, в свою очередь имеет *величину*, отличную от нуля.

Непрерывная функция $\varphi(x)$ принимает все значения между 0 и c; каждое значение из тех, которые равны $\varphi(a_\nu)=\varphi(b_\nu)$, она принимает бесконечное число раз, т. е. при всех x, которые $\geqslant a_\nu$ и $\leqslant b_\nu$; однако она принимает *лишь один раз* каждое отличное от значений $\varphi(a_\nu)=$ $=\varphi(b_\nu)$ значение h из интервала $(0\ \ldots\ c)$ для *различных* значений g, где g отлично от всех значений, принадлежащих интервалам $(a_\nu\ldots b_\nu)$, будь то концы a_ν и b_ν или промежуточные значения.

А поскольку каждому из этих значений g переменного x соответствует некоторое значение $h=\varphi(g)$, отличное от значений $\varphi(a_\nu)=\varphi(b_\nu)$, и наоборот, то, как и в нашем первом доказательстве,

$$\{g\}=\{h\},$$

откуда, как и выше, заключаем, что мощность множества S равна мощности континуума $(0\ldots c)$.

...После получения этих результатов я возвратился к моим исследованиям по тригонометрическим рядам, опубликованным тринадцать лет

назад и с тех пор заброшенным. Мне не только удалось доказать, что теорема из «Acta mathematica», т. 2, с. 348 [здесь с. 17] остается справедливой, когда система точек, которую я обозначил там через P, такова, что ее производное множество $P^{(1)}$ имеет первую мощность, но я теперь обладаю даже результатами для случая, когда $P^{(1)}$ имеет мощность, большую первой. К этому я возвращусь в другой раз.

[Примечания]

Подробное изложение доказательств находится в I.5.6, § 19.

Высказанное в конце намерение продолжить исследования по тригонометрическим рядам не было им осуществлено [12].

8. О РАЗЛИЧНЫХ ТЕОРЕМАХ ИЗ ТЕОРИИ ТОЧЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ В n-КРАТНО ПРОТЯЖЕННОМ НЕПРЕРЫВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ G_n СООБЩЕНИЕ ВТОРОЕ *

Начиная дальнейшее изложение моих исследований о точечных множествах, я *прежде всего* хочу вкратце привести в § 1 те из относящихся сюда теорем, которые отчасти уже содержатся в работе, опубликованной мною в «Math. Ann.», Bd. 23, S. 453 [здесь I.5.6], а отчасти рассмотрены с других точек зрения в статьях г-д Бендиксона и Фрагмена (Acta math., vol. 2, p. 415; vol. 5, p. 47) [1]. При этом я могу ограничиться простыми формулировками и пояснениями и указанием на способы их доказательств, так как подробное изложение можно найти в упомянутой работе из «Math. Ann.»

§ 1

В теории точечных множеств очень часто приходится рассматривать *свойства* точечных множеств, удовлетворяющие следующим двум условиям [«дистрибутивное свойство» — здесь на с. 107].

Во-первых, если P является каким-либо точечным множеством с соответствующим свойством в области H пространства G_n, где H полностью расположена в конечном, и эта H при помощи надлежащего разбиения границы разложена на *конечное* число *частичных областей* $H_1, H_2, \ldots, H_m$, в которые соответственно попадают подмножества $P_1, P_2, \ldots, P_m$ множества P, то всегда *по крайней мере одно* из этих подмножеств обладает рассматриваемым свойством.

* Über verschiedene Theoreme aus der Theorie der Punktmengen in einem n-fach ausgedehnten stetigen Raume G_n. Zweite Mitteilung.— Acta math., 1885, vol. 7, p. 105—124. Перевод Ф. А. Медведева.

Во-вторых, если P — какое-либо точечное множество с указанным свойством, то этим свойством всегда обладает и $P+Q$, каково бы ни было Q.

Теперь под Υ я буду понимать любое свойство точечных множеств, которое удовлетворяет этим двум условиям. Тогда справедливо следующее общее предложение:

Теорема I. *Если H — какая-либо полностью расположенная в конечном непрерывная часть пространства G_n и P — содержащееся в H точечное множество со свойством Υ, то в H существует по крайней мере одна такая точка g, что если $K(\rho)$ — n-мерный шар с центром в g и радиуса ρ, то составная часть множества P, попадающая в область $K(\rho)$, всегда обладает свойством Υ, сколь бы малым ни брался радиус шара ρ.*

Под *замкнутым* точечным множеством (ensemble fermé) я понимаю такое P, для которого выполняется условие

$$\mathfrak{D}(P, P^{(1)}) = P^{(1)}. \quad (1)$$

Напротив, точечное множество P я называю *плотным в себе* (ensemble condensé en soi), если для него выполняется равенство

$$\mathfrak{D}(P, P^{(1)}) = P. \quad (2)$$

Если точечное множество таково, что оно не содержит никакой плотной в себе составной части, то я называю его *разрозненным* точечным множеством [ср. с. 122–124].

Для пояснения этих определений укажу, что всякое *совершенное* точечное множество как *замкнуто*, так и *плотно в себе*; что *производное плотного в себе* точечного множества всегда *совершенно* и что *изолированные* точечные множества образуют особую разновидность *разрозненных* множеств. Отмечу еще, что все *замкнутые* точечные множества первой мощности (ввиду теоремы А), а также множества вида $P-\mathfrak{D}(P, P^{(\Omega)})$ являются *разрозненными* множествами; последнее утверждение можно легко доказать с помощью нижеследующей теоремы III. В ходе настоящей работы будет установлена теорема, что все *разрозненные* множества имеют самое большее первую мощность.

Теорема II. *Если содержащееся в G_n точечное множество P обладает тем свойством, что когда H — любая полностью расположенная в конечном часть пространства G_n, тогда содержащаяся в H составная часть множества P конечна или первой мощности, то само P либо конечно, либо первой мощности.*

Теорема III. *Пусть Q — некоторое замкнутое множество, а R — точечное множество, обладающее тем свойством, что, во-первых, R не имеет общих точек с Q и, во-вторых, когда H — какая-либо непрерывная составная часть пространства G_n, в которую не попадает ни одной точки множества Q, тогда принадлежащая области H составная часть множества R конечна или первой мощности. В этом случае само R самое большее первой мощности.*

Для доказательства последней теоремы я пользуюсь некоторой n-кратно протяженной частью пространства, состоящей из одной или нескольких отдельных *непрерывных частей* и обозначаемой мною через

$$\Pi(\rho, Q)$$

ввиду ее зависимости как от произвольной положительной величины ρ, так и от замкнутого множества Q. Она получается из множества Q тем, что берутся вместе *все* n-мерные шары радиуса ρ, центрами которых являются точки, принадлежащие множеству Q. Вследствие предположения, сделанного относительно R, в часть пространства

$$G_n - \Pi(\rho, Q)$$

со сколь угодно малым ρ всегда попадает составная часть множества R, имеющая самое большее *первую* мощность, а с другой стороны ρ всегда можно выбрать столь малым, что эта часть пространства $G_n - \Pi(\rho, Q)$ будет содержать любую рассматриваемую точку r множества R, так как в противном случае эта точка принадлежала бы и *замкнутому* множеству R. Отсюда, полагая ρ становящейся бесконечно малой, легко заключаем, что само R имеет *самое большее* первую мощность.

Теорема D. *Если P — расположенное в G_n точечное множество, обладающее тем свойством, что его первое производное $P^{(1)}$ имеет мощность, бóльшую первой, то всегда существуют точки, которые одновременно принадлежат всем производным $P^{(\alpha)}$, где α — какое-нибудь число первого или второго числового класса, а совокупность всех этих точек, являющаяся не чем иным, как $P^{(\Omega)}$, всегда представляет собой совершенное множество.*

Теорема E. *Если P обладает тем же свойством, что и в теореме* D, *а $S = P^{(\Omega)}$ — совершенное множество, существование которого утверждается в теореме* D, *то разность*

$$R = P^{(1)} - S$$

всегда самое большее первой мощности, а потому первое производное $P^{(1)}$ такого множества P можно разложить на две такие составные части, что

$$P^{(1)} = R + S,$$

где R — самое большее первой мощности, а S — совершенное множество.

Теорема F. *Если P таково же, как в теоремах* D *и* E, *то всегда существует наименьшее число α, принадлежащее первому или второму числовому классу и такое, что*

$$P^{(\alpha)} = P^{(\alpha+1)} = P^{(\alpha+\lambda)},$$

где λ — совершенно произвольное конечное или трансфинитное число, а следовательно, уже производное порядка α множества P равно совершенному множеству S, т. е.

$$P^{(\alpha)} = P^{(\Omega)} = S.$$

Теорема G. *Если R — множество из теоремы* E, α — *число из теоремы* F, *то всегда*

$$\mathfrak{D}(R, R^{(\alpha)})=0,$$

а тем более

$$\mathfrak{D}(R, R^{(\Omega)})=0.$$

Последняя теорема G восходит к господину Бендиксону. Доказательства теорем D, E, F, G основываются как на теоремах I и III, так и на теоремах A, B, C, рассмотренных ранее. Доказательства последних содержатся в «Math. Ann.», Bd. 23 [здесь I.5.6, § 15—17].

Производное множество $P^{(1)}$, а потому и все производные более высокого порядка *любого* точечного множества P всегда являются *замкнутыми* множествами. Легко доказать, что и, обратно, всякое замкнутое множество можно представить как первое (или более высокого порядка) производное множество других множеств (Math. Ann., Bd. 23, S. 470) [здесь с. 120]. Поэтому, используя наши теоремы, мы можем утверждать о замкнутых множествах следующее.

Теорема H. *Если P — произвольное замкнутое точечное множество, то оно состоит из двух существенно разных разделенных частей R и S (из которых одна может оказаться и нулем), так что*

$$P=R+S, \tag{3}$$

где R — разрозненное множество самое большее первой мощности, а S, когда оно не нуль, является совершенным множеством и поэтому (Acta math., vol. 4, p. 381) [здесь I.7][1] *имеет мощность континуума. Если замкнутое множество P конечно или первой мощности, то часть S исчезает и тогда, начиная с некоторого α первого или второго числовых классов (и это наименьшее α всегда первого рода), имеет место*

$$P^{(\alpha)}=0.$$

Если же замкнутое множество P большей, чем первая, мощности, то S всегда является отличным от нуля совершенным множеством и, начиная с некоторого наименьшего α первого или второго числовых классов, имеем

$$P^{(\alpha)}=P^{(\alpha+\lambda)}=S,$$

а тем самым

$$P^{(\Omega)}=S.$$

При этом разрозненное множество R обладает тем свойством, что

$$\mathfrak{D}(R, R^{(\alpha)})=\mathfrak{D}(R, R^{(\Omega)})=0.$$

Все бесконечные замкнутые точечные множества или первой мощности, или мощности континуума (Math. Ann., Bd. 23, S. 488) [здесь с. 139].

В последующем я намереваюсь показать, как все эти теоремы можно *обобщить* на любые, также и *незамкнутые* точечные множества.

---

[1] Ср. также: *Bendixon I.* Sur la puissance des ensembles parfaits de points.— Bih. Kgl. sven. vetenskapsakad. handl., 1884, bd. 9, N 6 [2].

§ 2

Если *плотное в себе* точечное множество P обладает тем свойством, что его составная часть, попадающая в достаточно малую окрестность каждой его точки (т. е. в шар с центром в соответствующей точке), *всегда*, т. е. для всех его точек, имеет *одну и ту же мощность*, то мы будем называть такое плотное в себе множество *однородным* точечным множеством, и если эта мощность имеет порядок α, то P можно назвать *однородным точечным множеством порядка* α. Легко показать, что однородное множество порядка α само имеет мощность порядка α.

Так, например, множество *всех рациональных* чисел является *однородным* множеством *первого* порядка, а множество *всех иррациональных* чисел есть *однородное* множество *мощности линейного континуума*.

Пусть теперь P — *совершенно произвольное* точечное множество в G_n. Оно будет состоять из точек двоякого рода: первые расположены так, что в *достаточно малой* их окрестности не содержатся другие точки множества P — это так называемые изолированные точки множества P; другие точки из P *одновременно* являются предельными точками множества P, а значит, принадлежат и $P^{(1)}$, как его точки.

Совокупность *первых* мы будем обозначать через Pa и называть *адхеренцией* множества P; совокупность *вторых* будет обозначаться через Pc и называться *кохеренцией* множества P.

Тогда имеем

$$Pc = \mathfrak{D}(P, P^{(1)}) \tag{4}$$

и

$$P = Pa + Pc \tag{5}$$

Следовательно, Pa и Pc являются определенными частями множества P.

Pa — всегда *изолированное* множество или нуль. Pc не может быть ни тем, ни другим, однако ясно, что *всякая плотная в себе составная часть множества P одновременно является составной частью кохеренции Pc и что Pc тогда и только тогда равна P (а потому $Pa = 0$ и наоборот), когда P является плотным в себе множеством.*

К Pc можно применить то же самое разложение и, обозначив Pcc через Pc^2, получим

$$Pc = Pca + Pc^2; \qquad P = Pa + Pca + Pc^2.$$

Если ν-кратное применение *операции c* к P обозначить через Pc^ν, то также имеем

$$P = Pa + Pca + Pc^2a + \ldots + Pc^{\nu-1}a + Pc^\nu.$$

Pc^ν называется ν-й *кохеренцией* множества P.

А теперь с помощью *полной индукции* можно определить *кохеренцию порядка* γ множества P, где γ — любое *трансфинитное* число.

Если γ — *трансфинитное* число *первого* рода, то по определению

$$Pc^\gamma = (Pc^{\gamma-1})c. \tag{6}$$

Если же γ — *трансфинитное число второго* рода, то полагаем

$$Pc^{\gamma}=\mathfrak{D}(\ldots, Pc^{\gamma'}, \ldots), \tag{7}$$

где γ' пробегает *все* числа, меньшие γ. Для понимания равенства (7) заметим, что $Pc^{\gamma'}$ всегда полностью содержится в $Pc^{\gamma''}$, если $\gamma''<\gamma'$.

В соответствии с этими определениями для всех пар чисел γ и δ имеет место равенство

$$(Pc^{\gamma})c^{\delta}=Pc^{\gamma+\delta}, \tag{8}$$

и, как легко доказать, каково бы ни было *конечное* или *трансфинитное* число γ, справедлива следующая теорема:

$$P=\sum_{\gamma'=0,1,\ldots<\gamma} Pc^{\gamma'}a+Pc^{\gamma}. \tag{9}$$

Здесь различные составные части справа $Pc^{\gamma'}a$ и Pc^{γ} не пересекаются, т. е. не имеют общих точек. Каждый член $Pc^{\gamma'}a$, как *адхеренция* множества $Pc^{\gamma'}$, представляет собой *изолированное* множество, *сама же* сумма $\sum\limits_{\gamma'=0,1,\ldots<\gamma} Pc^{\gamma'}a$ всегда является, очевидно, *разрозненным* множеством, так как *всякая плотная в себе* составная часть множества P является составной частью множества Pc^{γ}, а значит, эта сумма не может иметь *никакой плотной в себе* составной части.

Докажем теперь, что *если P — разрозненное множество, то существует такое наименьшее число α первого или второго числового класса, что $Pc^{\alpha}=0$, а потому и $Pc^{\alpha+\lambda}=0$; если же P не является разрозненным множеством, то существует такое наименьшее число α первого или второго числового класса, что Pc^{α}, а потому и $Pc^{\alpha+\lambda}$, является плотным в себе множеством.*

Доказательство только что сформулированной теоремы мы осуществляем так.

1°. *Сначала* рассматриваем случай, *когда P первой мощности*, и применяем высказанную в (9) теорему к $\gamma=\Omega$, где Ω — *наименьшее* число третьего числового класса. Тогда имеем

$$P=\sum_{\gamma'=0,1,2,\ldots,\omega,\ldots<\Omega} Pc^{\gamma'}a+Pc^{\Omega}.$$

Если бы теперь все члены $Pc^{\gamma'}a$ справа были отличными от нуля, то эта сторона нашего равенства имела бы *по меньшей мере вторую мощность*, а тогда то же самое имело бы место и для левой части, т. е. для P, вопреки предположению, что P имеет *первую* мощность. Следовательно, можно найти числа γ' и среди них такое наименьшее число α (ибо особенностью целых чисел является то, что всякая их совокупность, состоящая из конечных или трансфинитных чисел, имеет *минимум*), что

$$Pc^{\alpha}=0.$$

Но

$$Pc^{\alpha}=Pc^{\alpha}a+Pc^{\alpha+1},$$

а потому

$$Pc^{\alpha}=Pc^{\alpha+1}=(Pc^{\alpha})c.$$

Если здесь Pc^{α} отлично от нуля, то из последнего равенства вытекает, что Pc^{α}, а потому и $Pc^{\alpha+\lambda}$ являются *плотным в себе* множеством. Если P — разрозненное множество, то Pc^{α} не может быть плотным в себе, а является *нулем*; если же P не является разрозненным множеством, то Pc^{α} не может быть нулем, а значит, оно *плотно в себе.*

2°. Перейдем теперь к посылке, что P *имеет мощность, бо́льшую первой.*

Свойство иметь мощность, *бо́льшую первой*, удовлетворяет *обоим* условиям, которые мы ввели в начале настоящей работы. Оно, следовательно, таково, что к нему применима теорема I, в которой поэтому мы можем под Υ понимать только что охарактеризованное *свойство множеств.* Если, кроме того, примем во внимание теорему II, то получаем, что в пространстве G_n должна существовать такая точка q, что во *всяком* n-мерном шаре $K(\rho)$ радиуса ρ, описанного вокруг q как центра, содержится составная часть множества P, имеющая мощность, *бо́льшую первой.* Если мы обозначим *совокупность всех этих точек* q через Q, то легко видеть, что Q является замкнутым множеством. Действительно, всякая *предельная точка* множества Q удовлетворяет тому же самому условию, при помощи которого мы определили точку q, а значит, принадлежит Q.

Теперь оба множества P и Q должны иметь общие точки или, другими словами, $\mathfrak{D}(P, Q)$ *отличен от нуля.*

Это следует из теоремы III, если в ней вместо множества, обозначенного через R, подставим наше множество P, а обозначенному там через Q множеству придадим значение множества Q, введенного здесь.

Ибо если мы рассмотрим непрерывную часть H пространства G_n, в которую не попадает никакой точки Q, то *составная часть* P_1 *множества* P, *попадающая в область* H, *может быть самое большее первой мощности.* Действительно, если бы P_1 имело бо́льшую мощность, то по только что доказанному существовало бы множество Q_1, которое относилось бы к P_1 так же, как Q к P, и Q_1 было бы, очевидно, составной частью множества Q, полностью расположенной в области H, вопреки сделанному относительно H предположению.

Следовательно, если бы было $\mathfrak{D}(P, Q)=0$, то выполнялись бы оба условия теоремы III, а отсюда мы могли бы заключить, что само P является множеством *самое большее первой мощности*, тогда как здесь мы предположили, что P имеет *бо́льшую* мощность. Значит, $\mathfrak{D}(P, Q)$ отличен от нуля.

Рассмотрим теперь множество $\mathfrak{D}(P, Q)$ детальнее и обозначим его через V. Оно состоит из принадлежащих P точек v, которые расположены так, что во *всякой* окрестности точки v содержатся точки из P, совокупность которых имеет мощность, *бо́льшую* первой. *Никакая точка* v из V не является изолированной точкой множеств V и P. Действительно, если мы зададим произвольный шар $K(\rho)$ с центром v, то в него

попадет составная часть V_1 множества P, имеющая мощность, *бо́льшую* первой. Последнее мы можем сказать и о множестве V_1-v, получаемом из V_1 удалением *единственной* точки v. Поэтому по доказанному выше о P и среди точек множества V_1-v должны существовать *такие*, что составные части множества V_1-v, попадающие во всякую окрестность этих точек, должны иметь мощности, *бо́льшие* первой, а такие точки являются, очевидно, тоже точками множества V. Мы видим, следовательно, что если произвольная точка v взята за центр шара $K(\rho)$ со сколь угодно малым радиусом ρ, то во внутрь этого шара попадают *другие* точки множества V, отличные от v. Ясно поэтому, что v не является *изолированной* точкой множества V.

Так как теперь доказано, что всякая точка v множества V является *предельной точкой* для V, то V оказывается *плотным в себе множеством.*

Мы видим поэтому, что всякое точечное множество P *бо́льшей, чем первая, мощности* обладает *определенной плотной в себе составной частью* V, состоящей из *всех точек* v множества P, расположенных таким образом, что во всяком шаре $K(\rho)$ с центром v содержится составная часть множества P *бо́льшей, чем первая, мощности.*

Отсюда прежде всего следует, что *разрозненное бесконечное множество всегда имеет первую мощность.* Действительно, *разрозненным* множеством мы назвали множество, не содержащее *плотной в себе* составной части; если бы оно имело мощность, *бо́льшую первой*, то по только что доказанному оно должно было бы обладать *плотной в себе* составной частью. В этой связи я мог бы упомянуть, что и г-н Бендиксон, как я узнал из его письма, нашел аналогичное доказательство последней теоремы после того, как я предложил ему для исследования этот вопрос.

Обратимся теперь к равенству (9) при *принятой посылке*, что P имеет мощность, *бо́льшую первой*, и тоже возьмем в нем $\gamma=\Omega$, т. е. рассмотрим равенство

$$P=\sum_{\gamma'=0,1,\ldots,\omega,\ldots<\Omega} Pc^{\gamma'}a+Pc^{\Omega}.$$

Составная часть $\sum\limits_{\gamma'=0,1,\ldots,\omega,\ldots<\Omega} Pc^{\gamma'}a$ справа, которую мы обозначим через R, представляет собой, как уже было подчеркнуто ранее, *разрозненное множество*, поскольку всякая *плотная в себе* составная часть множества P содержится и *во всякой кохеренции* множества P, а значит, и в Pc^{Ω}; всякая *плотная в себе* составная часть множества R была бы таковой и для P, а потому и для Pc^{Ω}, что исключается равенством $\mathfrak{D}(R, Pc^{\Omega})=0$.

Множество R, как *разрозненное*, имеет, как мы видим, первую мощность.

Но

$$R=\sum_{\gamma'=0,1,\ldots,\omega,\ldots<\Omega} Pc^{\gamma'}a, \tag{10}$$

и из этого равенства мы заключаем, что среди членов $Pc^{\gamma'}a$ правой части должны существовать такие, которые обращаются в нуль, ибо в противном случае R было бы *бо́льшей, чем первая, мощности.* Если теперь α — *наименьшее* число *первого* или *второго* числовых классов, для которого

$$Pc^{\alpha}a=0,$$

то получаем, что

$$Pc^{\alpha}=(Pc^{\alpha})\,c.$$

Здесь случай $Pc^{\alpha}=0$ исключен, так как Pc^{α} состоит *по меньшей мере* из *плотной в себе* составной части V множества P. Следовательно, Pc^{α}, а потому и $Pc^{\alpha+\lambda}=Pc^{\Omega}$, является *плотным в себе* множеством.

Обозначенная через V *плотная в себе* составная часть множества P, существование которой доказано в случае, когда P имеет мощность, бо́льшую *первой*, является составной частью *плотного в себе* множества $Pc^{\alpha}=Pc^{\Omega}$. Если теперь совокупность *всех* остальных точек множества Pc^{α} мы обозначим через U, так что

$$Pc^{\alpha}=Pc^{\Omega}=U+V, \tag{11}$$

то легко видеть, что U может быть *только нулем* или *однородным множеством первого порядка.* Действительно, так как Pc^{α} *плотно в себе*, то во *всякую* окрестность точки u множества U попадает бесконечно много точек множества Pc^{α}. Но последние в *достаточно малой* окрестности могут принадлежать только части U, но не части V, так как в противном случае u была бы по определению множества V точкой этого множества; следовательно, во *всякой* окрестности точки u имеются отличные от нее точки множества U, но их совокупность не может иметь мощности, большей *первой*, ибо в противном случае u принадлежала бы и множеству V.

Заметим еще, что ввиду $Pc^{\alpha}a=Pc^{\alpha+\lambda}a=0$ равенство (10) мы можем записать и так:

$$R=\sum_{\alpha'=0,1,\ldots<\alpha} Pc^{\alpha'}a. \tag{12}$$

Резюмируем полученные результаты в виде нижеследующих теорем.

Теорема J. *Если P является разрозненным бесконечным множеством, то оно имеет первую мощность и существует такое наименьшее число первого или второго числовых классов, что*

$$Pc^{\alpha}=0;$$

следовательно, в этом случае имеет место (ввиду (9), если в нем положить $\gamma=\alpha$) *равенство*

$$P=\sum_{\alpha'=0,1,\ldots<\alpha} Pc^{\alpha'}a.$$

Теорема K. *Если P первой мощности, не будучи, однако, разрозненным множеством, то существует такое число α первого или второго числовых классов, что Pc^{α} будет однородным множеством первого поряд-*

ка; если обозначить последнее через U, *а* $\sum\limits_{\alpha'=0,1,\ldots<\alpha} Pc^{\alpha'}a$ *через* R, *то* R *или пусто, или является разрозненным множеством и имеет место*

$$P=R+U.$$

При этом

$$\mathfrak{D}(R, U^{(1)})=0.$$

Последнее утверждение основывается на том, что если бы точка r множества R принадлежала $U^{(1)}$, то $r+U$, как и U, было бы *плотным в себе* множеством, а тем самым составной частью множества $U=Pc^{\alpha}$.

Теорема L. *Если P мощности больше первой, то существует такое наименьшее число α первого или второго числовых классов, что Pc^{α} является плотным в себе множеством; последнее состоит из составной части V, которая плотна в себе и содержит все точки множества P, которые таковы, что во всякой их окрестности содержатся составные части множества P, имеющие мощность, бóльшую первой, и составной части U, которая, если она не нуль, состоит из остальных точек множества Pc^{α} и образует однородное множество первого порядка. Если через R обозначить сумму* $\sum\limits_{\alpha'=0,1,\ldots<\alpha} Pc^{\alpha'}a$, *то R является или нулем, или разрозненным множеством и имеет место*

$$P=R+U+V.$$

При этом

$$\mathfrak{D}(R, U^{(1)})=0; \quad \mathfrak{D}(R, V^{(1)})=0; \quad \mathfrak{D}(U, V^{(1)})=0.$$

Последние соотношения можно доказать точно так же, как соответствующее утверждение в теореме K.

§ 3

Обнаруженные в § 2 существенно различные и отделяющиеся друг от друга составные части произвольного точечного множества P кажутся мне достаточно важными, чтобы оправдать особые обозначения и наименования для них.

Множество R мы будем называть *остатком* или *вычетом* множества P и обозначим через Pr, а $Pc^{\Omega}=U+V$ будет называться *полной инхеренцией* и обозначаться через Pi. Таким образом, имеем

$$R=Pr=\sum_{\alpha'=0,1,\ldots<\alpha} Pc^{\alpha'}a, \tag{13}$$

$$U+V=Pi=Pc^{\alpha}=Pc^{\Omega}, \tag{14}$$

$$P=Pr+Pi. \tag{15}$$

Множество U называется *инхеренцией первого порядка* множества P или же *первой инхеренцией*, а потому будет обозначаться через Pi_1.

Что касается *плотного в себе* множества V, то уже из § 2 легко видеть: оно таково, что во всякой окрестности *каждой* его точки v распо-

ложено множество точек более чем первой мощности, причем эти точки принадлежат не только P, *но и самому* V. Этим, однако, не утверждается, что V, если оно не становится пустым, обязательно является *однородным* множеством. Последнее будет твердо установлено лишь тогда, когда мы покажем, что у точечных множеств из G_n не может оказаться *большей мощности*, чем *вторая*. Действительно, если бы только это было доказано, то отсюда следовало бы, что V, если оно не становится пустым, будет *однородным множеством второго порядка*. Вследствие того что мы пока принимаем возможность существования бóльших, чем вторая, мощностей, получаем вообще следующее.

Если v — какая-либо точка множества V, $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu, \ldots$ — такая последовательность положительных величин, что

$$\rho_\nu > \rho_{\nu+1} \text{ и } \lim_{\nu=\infty} \rho_\nu = 0,$$

и через V_ν обозначена та часть множества V, которая попадает в шар $K(\rho_\nu)$ с *центром* в v, а через α_ν — *порядковое число мощности* множества V_ν, то ясно, что α_ν не может быть *меньше* $\alpha_{\nu+1}$ и что, следовательно,

$$\alpha_\nu \geqslant \alpha_{\nu+1},$$

ибо $V_{\nu+1}$ является частью V_ν.

Значит, мы имеем простую бесконечную последовательность *конечных* или *трансфинитных целых* чисел, которая при возрастании ν не возрастает. Но относительно такой последовательности целых чисел легко показать [1], что ее члены начиная с некоторого $\nu = \nu_0$ все должны быть равными друг другу, так что

$$\alpha_{\nu_0} = \alpha_{\nu_0+1} = \alpha_{\nu_0+2} = \ldots$$

Обозначим общее значение всех этих чисел через β.

Итак, мы видим, что *все* V_{ν_0}, V_{ν_0+1}, V_{ν_0+2}, ... имеют β-ю мощность, а отсюда легко видеть, что если $\rho \leqslant \rho_{\nu_0}$, то та составная часть множества V, которая попадает в шар $K(\rho)$ с *центром* v, *всегда* имеет β-ю *мощность*. Действительно, поскольку ρ по своей величине заключено между двумя определенными членами последовательности ρ_{ν_0}, ρ_{ν_0+1}, ρ_{ν_0+2}, ..., то как предположение, что мощность указанной части множества V *больше* мощности порядка β, так и предположение, что она *меньше* таковой, приводят к противоречию.

Отсюда мы видим, что каждой точке v множества V соответствует такое вполне определенное *конечное* или *сверхконечное* число β, что для достаточно малого значения ρ составная часть множества V, попадающая в шар $K(\rho)$ *с центром* в v, имеет мощность порядка β. Поэтому мы будем называть β *порядковым числом*, соответствующим точке v, а v — *точкой* β*-го порядка множества* V *или* P.

Очевидно, что совокупность *всех* точек порядка β множества V, если таковые вообще существуют, образует *однородное точечное множество порядка* β и *мощности* того же порядка β. Эту совокупность мы назовем β-й *инхеренцией* или *инхеренцией порядка* β множества P и обозначим через Pi_β.

Теперь имеем

$$V = \sum_{\beta=2,3,\ldots} Pi_\beta, \tag{16}$$

где отдельные члены справа могут быть и нулем, а β пробегает все *конечные* и *сверхконечные* числа, большие 1.

Так как по (14) $Pi = Pc^\Omega = U + V$, а $U = Pi_1$, то мы можем записать

$$Pi = \sum_{\beta=1,2,\ldots} Pi_\beta, \tag{17}$$

где β пробегает уже все положительные целые числа начиная с 1.

Между найденными нами различными составными частями точечного множества имеют место общие соотношения, заслуживающие выделения.

Если мы сначала рассмотрим определения точечных множеств Pa и Pc, как они выступают в формулах (4) и (5), то увидим, что

$$\mathfrak{D}(Pa, Pc) = 0, \tag{18}$$

$$\mathfrak{D}[Pa, (Pa)^{(1)}] = 0, \tag{19}$$

$$\mathfrak{D}[Pa, (Pc)^{(1)}] = 0. \tag{20}$$

В (18) утверждается, что оба множества Pa и Pc полностью отделены (лишены связи), т. е. не имеют ни одной общей точки, принадлежащей им; в (19) — что Pa является *изолированным* множеством; (20) позволяет узнать, что Pa не содержит также никакой точки, которая была бы предельной точкой множества Pc.

Изолированные точки множества P образуют Pa; мы назовем их *точками* 0*-го вида множества* P. *Изолированные* точки множества Pc образуют Pca; их мы назовем *точками* 1*-го вида множества* P.

Вообще точки *изолированного* множества $Pc^{\alpha'}$ будем называть *точками* α'*-го вида* множества P.

Получаемая из (13), (15) и (17) формула

$$P = \sum_{\alpha'=0,1,\ldots<\alpha} Pc^{\alpha'}a + \sum_{\beta=1,2,\ldots} Pi_\beta \tag{21}$$

показывает, что произвольная точка p множества P или принадлежит составной части $Pc^{\alpha'}a$ множества P и тогда p является *точкой* α'*-го вида* множества P, где α' — определенное число *первого* или *второго* числовых классов, меньшее α, а возможно, и 0; или же p принадлежит составной части Pi_β множества P и тогда она является *точкой порядка* β множества P. Поэтому *все* точки α-го вида множества P, если таковые вообще существуют, образуют *изолированное* множество; напротив, все точки *порядка* β из P, если они вообще имеются, образуют *однородное* множество порядка β.

Точки, содержащиеся в Pr, можно назвать *видовыми точками* (Artpunkte) множества P, а входящие в Pi точки — *порядковыми точками* (Ordnungspunkte) множества P.

Из *отсутствия* точек α'-го вида у P следует и *несуществование* точек ($\alpha'+\lambda$)-го вида, где λ — произвольное число первого или второго числовых классов. Действительно, если $Pc^{\alpha'}a=0$, то $Pc^{\alpha'}$ или *нуль*, или *плотное в себе* множество, а потому вообще $Pc^{\alpha'+\lambda}=Pc^{\alpha'}$ и $Pc^{\alpha'+\lambda}a=0$. *Наоборот, наличие* точек α'-го вида всегда указывает на *существование* точек всякого меньшего вида.

Напротив, *отсутствие* или *наличие* точек порядка β не оказывает никакого влияния на *наличие* или *отсутствие* порядковых точек с другим порядковым числом или видовых точек.

Если соотношение (20) применим вместо P к $Pc^{\alpha'}$, то получим

$$\mathfrak{D}[Pc^{\alpha'}a,\ (Pc^{\alpha'})^{(1)}]=0. \qquad (22)$$

Но теперь как $Pc^{\alpha'+\lambda}a$, так и Pi_β являются составными частями множества Pc^{α}; следовательно, имеем также

$$\mathfrak{D}[Pc^{\alpha'}a,\ (Pc^{\alpha'+\lambda}a)^{(1)}]=0, \qquad (23)$$

$$\mathfrak{D}[Pc^{\alpha'}a,\ (Pi_\beta)^{(1)}]=0. \qquad (24)$$

Мы видим, что составная часть $Pc^{\alpha'}a$ множества P не содержит ни *предельных точек* множества $Pc^{\alpha'+\lambda}$, ни *предельных точек* множества Pi_β.

Все точки правой части равенства (21), *за исключением содержащихся в первом члене* Pa, одновременно являются *предельными точками* множества P, а потому будет оправданным назвать при $\alpha'>0$ *точку* α'*-го вида* множества P тоже *предельной точкой* α'*-го вида* множества P, а точку порядка β — *предельной точкой* порядка β множества P; лишь точки 0-*го вида* из P *нельзя* называть одновременно *предельными точками множества* P, так как они являются *изолированными точками* P.

Очевидно, что $Pc^{\alpha'}$ мы можем охарактеризовать как совокупность *всех видовых точек из* P *с видовым числом* $\geqslant\alpha'$ и *всех порядковых точек* из P; $Pi=V=Pc^{\Omega}$ есть совокупность *всех порядковых точек* множества P.

Теперь что касается отношения *инхеренций* друг к другу, а также к *остатку* множества P, то вообще об этом мы можем утверждать следующее:

$$\mathfrak{D}[Pr,\ (Pi)^{(1)}]=0, \qquad (25)$$

а потому и

$$\mathfrak{D}[Pr,\ (Pi_\beta)^{(1)}]=0. \qquad (26)$$

Действительно, поскольку Pi является *плотным в себе* множеством, то и $Pi+Z$ тоже *плотное в себе* множество, если Z представляет собой какую-либо составную часть множества $(Pi)^{(1)}$. Поэтому если $\mathfrak{D}[Pr,\ (Pi)^{(1)}]$ было бы отличным от нуля и мы обозначили бы это множество через Z, то $Pi+Z$ было бы *плотной в себе* составной частью множества P, а потому имело бы место и $Pi=Pc^{\Omega}$, тогда как Z, будучи составной частью множества Pr, не может содержаться в Pi.

Далее можно утверждать, что

$$\mathfrak{D}[Pi_\beta,\ (Pi_{\beta'})^{(1)}]=0 \qquad (27)$$

в предположении, что $\beta'>\beta$.

Действительно, всякая *предельная точка* множества $Pi_{\beta'}$, если она является точкой из P, необходимо является *порядковой точкой* множества P *самое меньшее* порядка β', а значит, не может быть *точкой* множества Pi_β, ибо все точки множества Pi_β являются *точками порядка* β *множества* P, а по предположению $\beta<\beta'$.

Наши соображения можно пополнить еще во многих направлениях, но это мы отложим до другого случая.

Теперь же я хочу показать, как наши предшествующие теоремы, которые мы резюмировали в теореме H, получаются из этих новых результатов, как только множество P предположено *замкнутым*.

Согласно (1) под *замкнутым* множеством мы понимаем такое P, производное $P^{(1)}$ которого *полностью* содержится в нем, так что

$$\mathfrak{D}(P, P^{(1)})=P^{(1)}.$$

Поэтому согласно (4) для *замкнутых* множеств *первая кохеренция* множества P, которую мы обозначили через Pc, совпадает с *первым производным множеством*, т. е. имеем

$$Pc=P^{(1)}. \tag{28}$$

Но мы уже знаем, что *все* производные $P^{(\gamma)}$ тоже являются *замкнутыми* множествами, откуда следует, что в нашем случае вообще

$$Pc^\gamma=P^{(\gamma)}, \tag{29}$$

а потому

$$Pc^\gamma a=P^{(\gamma)}-P^{(\gamma+1)}, \tag{30}$$

где при $\gamma=0$ под $P^{(0)}$ понимается не что иное, как P.

Наконец, мы имеем здесь

$$Pi=Pc^\Omega=P^{(\Omega)}. \tag{31}$$

Поэтому $P^{(\Omega)}$, если оно не нуль, является *плотным в себе* множеством, а так как оно как производное множества P, кроме того, и *замкнуто*, то отсюда следует, что $P^{(\Omega)}$, если оно не исчезает, представляет собой *совершенное* множество.

Мы видим, следовательно, что в рассматриваемом случае составная часть $U=Pi_1$ множества Pi всегда исчезает и что поэтому Pi сводится к V. Действительно, поскольку Pi является *совершенным* множеством, то по теореме A его составная часть, попадающая в шар, описанный вокруг точки из Pi, всегда имеет мощность, *бóльшую первой*; поэтому никакая точка из Pi не может быть точкой *первого* порядка.

Поэтому всякое *замкнутое* множество первой мощности является *разрозненным* множеством. Теперь, смотря по тому, имеет ли *замкнутое* множество *первую* или *бóльшую* мощность, из теорем J и L и следующих за ними результатов получаются различные утверждения теоремы H.

Исследования о *точечных множествах*, доведенные теперь до некоторой степени завершенности, я с самого начала предпринял не только ради их спекулятивного интереса, но одновременно и имея в виду применения, которые я ожидал от них в *математической физике* и в других науках.

Гипотезы, которые брались за основу большинства теоретических исследований о *явлениях природы*, никогда вполне меня не удовлетворяли, и я считал, что это следует приписать тому обстоятельству, что *теоретики* большей частью или позволяли господствовать полной неопределенности в отношении *последних* элементов *материи*, или же принимали их за так называемые *атомы*, причем *очень малого*, но все же *не исчезающего совсем объема пространства*. Я нисколько не сомневался, что для получения безупречного *объяснения природы* последние или первоначальные *простые* элементы материи следует предполагать имеющимися в *актуально бесконечном числе* и рассматривать их в отношении *пространственности* как *совершенно непротяженные* и *строго точечные*. Я укрепился в этом убеждении, когда обнаружил, что в новое время столь выдающиеся физики, как Фарадей, Ампер, Вильг. Вебер, а из математиков наряду с другими Коши разделяли то же самое убеждение.

Однако, чтобы иметь возможность реализовать это *фундаментальное представление*, мне казалось необходимым предпослать этому общие исследования о *точечных множествах* в том виде, как я их проводил. *Простые* элементы природы, из объединения которых в некотором смысле получается *материя*, я, примыкая к Лейбницу, называю *монадами* или *единицами* (ср. главным образом две работы Лейбница: La monadologie/Ed. Erdmann, p. 705; Ed. Dutens. T. 2, p. 20 и Principes de la nature et de la grâce, fondés en raison/Ed. Erdmann, p. 714; Ed. Dutens. T. 2, p. 32) [3] и исхожу из взгляда, принятого, как я полагаю, в современной физике, что в основу следует положить *две специфически различные, действующие друг на друга материи* и в соответствии с этим два различных класса *монад—телесную материю и эфирную материю, телесные* **монады** *и эфирные монады*,— и эти два *субстрата* оказываются достаточными для *объяснения наблюдавшихся до сих пор чувственных явлений*.

С этой точки зрения в качестве *первого вопроса*, до которого, однако, не додумались ни Лейбниц, ни более поздние ученые, возникает такой: какие *мощности* соответствуют этим двум материям в отношении их элементов, когда они рассматриваются как *множества телесных*, соответственно *эфирных монад*? В этой связи я уже давно выдвинул *гипотезу*, что *мощность телесной материи* — это та, которую я называю в своих исследованиях *первой*, но, что, напротив, *мощность эфирной материи* является *второй*.

В пользу этих воззрений можно привести очень *много доводов*, которые я намереваюсь обсудить позднее. Если мы примем их предварительно, то мы должны мыслить *телесную материю* в каждый *момент времени* (будь то во всем пространстве G_3 или в какой-либо ограниченной его части) как *образ* некоторого точечного множества P первой мощности, а *эфирную материю* в том же пространстве — как *образ* существующего *наряду с ним* точечного множества Q *второй* мощности и оба эти множества следовало бы рассматривать в некотором роде как функции времени. Но из исследований § 2 вытекает, что

$$P = Pr + Pi_1,$$

где Pr — *разрозненное* множество, названное нами *остатком* множества P, а Pi_1, если оно не исчезает, первая *инхеренция* множества P, *однородное* точечное множество *первого* порядка; *остальные инхеренции* отпадают, так как P имеет *первую* мощность. Равным образом имеем

$$Q = Qr + Qi_1 + Qi_2,$$

поскольку Q *второй* мощности, а тем самым *инхеренции* порядка больше *второго* здесь отсутствуют.

И речь будет идти прежде всего о том, чтобы решить, не будут ли, возможно, пяти существенно различным частям, на которые оказываются разложенными *телесная* и *эфирная материи* в каждый момент времени, а тем самым и различным частям, на которые по (13) распадаются Pr и Qr, соответствовать и существенно различные *виды проявления* и *действия* материи, вроде *агрегатного состояния, химического различия, света* и *тепла, электричества* и *магнетизма.*

Однако предположения, которые я имею в этой связи, я мог бы высказать в определенной форме не раньше, чем осуществлю их более точную проверку.

[Примечания]

Настоящая работа является в основном дополнением и продолжением указанной во введении работы из «Math. Ann.» [I.5.6]. Теоремы I, II, III, D, E, F, G являются точным повторением теорем из § 15, 16 указанной статьи с теми же обозначениями. Затем в теореме H полученные результаты объединяются в той мере, в какой они относятся к «замкнутым» множествам, в одну теорему, согласно которой всякое замкнутое множество можно разложить на счетную «разрозненную» составную часть и на «совершенную» составную часть мощности континуума. Затем в § 2 делается попытка осуществить соответствующее общее разложение и незамкнутых множеств путем введения новых понятий («кохеренция», «адхеренция», «инхеренция»). Полученные здесь результаты, резюмированные в теоремах J, K, L, являются, по-видимому, не столь значимыми и плодотворными, как основополагающие теоремы о замкнутых множествах [4]. Высказанная Кантором в заключение надежда применить их к теории телесных и эфирных атомов кажется сегодня весьма проблематичной.

[1] Здесь применяется (еще не доказанное) предположение, что всякая мощность является алефом, а значит, что среди множества мощностей имеется наименьшая. См «Приложение», с. 443 и след. [5].

9. ОБ ОДНОМ ЭЛЕМЕНТАРНОМ ВОПРОСЕ УЧЕНИЯ О МНОГООБРАЗИЯХ *

В статье под названием «Об одном свойстве совокупности всех действительных алгебраических чисел» (J. reine und angew. Math., 1874, Bd. 77, S. 258) [здесь I.2] содержится первое доказательство теоремы, что существуют бесконечные многообразия, которые нельзя взаимно однозначно отобразить на совокупность всех конечных целых чисел 1, 2, 3, ..., ν, ... или, как я обычно выражаюсь, которые не имеют мощности последовательности чисел 1, 2, 3, ... Из доказанного там в § 2 непосредственно следует, что, например, совокупность всех действительных чисел произвольного интервала (α ... β) нельзя представить в форме последовательности

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots$$

Можно, однако, получить значительно более простое доказательство этой теоремы, не зависящее от рассмотрения иррациональных чисел.

Действительно, если m и w — два каких-либо исключающих друг друга признака (Charaktere), то рассматриваем совокупность M элементов

$$E = (x_1, x_2, \ldots, x_\nu, \ldots),$$

зависящих от бесконечно многих координат $x_1, x_2, \ldots, x_\nu, \ldots$, где каждая из этих координат есть m или w. Пусть M — совокупность всех элементов E.

Элементами совокупности M являются, например, три следующие:

$$E^{\mathrm{I}} = (m, m, m, m, \ldots),$$
$$E^{\mathrm{II}} = (w, w, w, w, \ldots),$$
$$E^{\mathrm{III}} = (m, w, m, w, \ldots).$$

Теперь я утверждаю, что такое многообразие M не имеет мощности последовательности 1, 2, ..., ν, ...

Это вытекает из следующей теоремы:

«Если $E_1, E_2, \ldots, E_\nu, \ldots$ — какая-либо просто бесконечная последовательность элементов многообразия M, то всегда существует такой элемент E_0 многообразия M, который не совпадает ни с каким E_ν».

Пусть

$$E_1 = (a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,\nu}, \ldots),$$
$$E_2 = (a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{2,\nu}, \ldots),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$E_\mu = (a_{\mu,1}, a_{\mu,2}, \ldots, a_{\mu,\nu}, \ldots),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

---

* Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre.— Jahresber. Dt. Math. Ver., 1890/1891, Bd. 1, S. 75—78. Перевод Ф. А. Медведева.

Здесь $a_{\mu,\nu}$ суть определенно m или w. Определим теперь последовательность $b_1, b_2, \ldots, b_\nu, \ldots$ так, чтобы b_ν был тоже равен только m или w и *отличен* от $a_{\nu,\nu}$.

Итак, если $a_{\nu,\nu}=m$, то $b_\nu=w$, а если $a_{\nu,\nu}=w$, то $b_\nu=m$.

Если теперь мы рассмотрим элемент

$$E_0=(b_1, b_2, b_3, \ldots)$$

многообразия M, то очевидно, что равенство

$$E_0=E_\mu$$

не может иметь места ни для какого положительного целочисленного значения μ, так как в противном случае для соответствующего μ и для всех целочисленных значений ν было бы

$$b_\nu=a_{\mu,\nu},$$

а значит, в частности,

$$b_\mu=a_{\mu,\mu},$$

что исключается определением b_ν. Из этой теоремы непосредственно следует, что совокупность всех элементов многообразия M нельзя представить в форме последовательности $E_1, E_2, \ldots, E_\nu, \ldots$, так как в противном случае мы столкнулись бы с противоречием, что некая вещь E_0 как была бы, так и не была бы элементом многообразия M.

Это доказательство замечательно не только вследствие его большой простоты, но главным образом потому, что содержащийся в нем принцип можно просто распространить на общую теорему, что мощности вполне определенных многообразий не имеют максимума или, что то же самое, каждому заданному многообразию L можно сопоставить другое многообразие M, имеющее бóльшую мощность, нежели L.

Пусть, например, L — линейный континуум, хотя бы совокупность всех действительных числовых величин z, которые $\geqslant 0$ и $\leqslant 1$.

Под M мы понимаем совокупность всех однозначных функций $f(x)$, принимающих лишь два значения 0 и 1, когда x пробегает все действительные значения, которые $\geqslant 0$ и $\leqslant 1$.

Что M не имеет мощности, *меньшей* мощности континуума L, следует из того, что можно задать подмножества множества M, имеющие ту же мощность, что и L, например, подмножество, состоящее из всех функций, которые для отдельного значения x_0 переменного x имеют значение 1, а для остальных значений x имеют значение 0.

Но M и *не имеет* мощности, *равной* мощности континуума L, ибо в противном случае многообразие M можно было бы поставить во взаимно однозначное соответствие с переменным z и M можно было бы так представить в форме однозначной функции двух переменных x и z

$$\varphi(x, z),$$

что при задании частного значения z получался бы некоторый элемент $f(x)=\varphi(x, z)$ многообразия M и, наоборот, всякий элемент $f(x)$ многообразия M получался бы из $\varphi(x, z)$ заданием одного определенного значе-

ния z. Но это приводит к противоречию. Действительно, если под $g(x)$ мы будем понимать ту однозначную функцию от x, которая принимает лишь значения 0 или 1 и для каждого значения x отлична от $\varphi(x, x)$, то $g(x)$, с одной стороны, является неким элементом многообразия M, а с другой — не может быть получена из $\varphi(x, z)$ никаким заданием частного значения $z=z_0$, так как $\varphi(z_0, z_0)$ отлично от $g(z_0)$.

Тем самым мощность многообразия M ни меньше, ни равна мощности континуума L; отсюда следует, что она больше, чем мощность у L (ср.: Журнал Крелле, т. 84, с. 242) [здесь I.3].

В «Основах общего учения о многообразиях» (Leipzig, 1883; Math. Ann., Bd. 21) [здесь I.5.5] я уже показал при помощи совершенно другого вспомогательного средства, что мощности не имеют максимума. Там даже было доказано, что совокупность всех мощностей, если последние мыслить упорядоченными по их величине, образует «вполне упорядоченное множество», так что для каждой мощности по самой ее природе имеется непосредственно бóльшая, а за всяким бесконечно возрастающим множеством мощностей тоже следует непосредственно бóльшая мощность [1].

«Мощности» представляют собой единственное и необходимое обобщение конечных «кардинальных чисел»; они суть не что иное, как актуально бесконечно большие кардинальные числа, и им отвечают те же реальность и определенность, какие присущи конечным кардинальным числам. Разве что закономерные соотношения между ними, соответствующая им «теория чисел», являются несколько иными, нежели в области конечного.

Дальнейшая обработка этого поля — дело будущего.

[Примечания]

В этой работе впервые дается классическое доказательство того факта, что $2^{\mathfrak{m}} > \mathfrak{m}$ (в записи для кардинальных чисел), при помощи «канторовского диагонального метода». Чтобы применить его вместо $\mathfrak{m} = \aleph_0 = \mathfrak{a}$ к мощности континуума $\mathfrak{c}$, нужно еще доказать, что континуум можно взаимно однозначно отобразить на множество *формально различных* двоичных дробей, поскольку всякое двоично рациональное число $p/2^n$ имеет не одно, а *два* двоичных разложения (только с нулями или только с единицами в конце). Но так как сами эти числа, представимые двумя способами, образуют *счетное* множество, а континуум содержит счетные подмножества, то в той же сокращенной записи получаем

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{a} + \mathfrak{c}_1 = \mathfrak{a} + \mathfrak{a} + \mathfrak{c}_1 = \mathfrak{a} + \mathfrak{c} = 2^{\mathfrak{a}} > \mathfrak{a}.$$

Ср. следующую за этой работу I.10, § 4.

[1] То, что совокупность всех мощностей образует вполне упорядоченную систему (даже если не «множество»), в указанном месте вовсе не «доказано», так как у Кантора еще отсутствует доказательство, что всякое множество можно вполне упорядочить и что поэтому всякая мощность является алефом.

10. К ОБОСНОВАНИЮ УЧЕНИЯ О ТРАНСФИНИТНЫХ МНОЖЕСТВАХ *

«Hypotheses non fingo» [Ньютон].
«Neque enim leges intellectui aut rebus damus ad arbitrium nostrum, sed tanquam scribae fideles ab ipsius naturae voce latas et prolatas excipimus et describimus».
«Veniet tempus, quo ista quae nunc latent, in lucem dies extrahat et longioris aevi dilligentia».
[1]

§ 1. Понятие мощности или кардинального числа

Под «множеством» мы понимаем соединение в некое целое M определенных хорошо различимых предметов m нашего созерцания или нашего мышления (которые будут называться «элементами» множества M). В знаках мы выражаем это так:

$$M = \{m\}. \tag{1}$$

Объединение нескольких множеств $M, N, P, \ldots$, не имеющих общих элементов, в единое множество мы обозначаем через

$$(M, N, P, \ldots). \tag{2}$$

Следовательно, элементами этого множества являются элементы множеств M, N, P и т. д., взятые вместе.

«Частью» или «подмножеством» множества M мы называем всякое *другое* множество M_1, элементы которого одновременно являются элементами множества M [1].

Если M_2 является частью M_1, а M_1— частью M, то и M_2 является частью M.

Всякому множеству соответствует определенная «мощность», которую мы называем также «кардинальным числом».

«Мощностью» или «кардинальным числом» множества M мы называем то общее понятие, которое получается при помощи нашей активной мыслительной способности из M, когда мы абстрагируемся от качества его различных элементов m и от порядка их задания.

Результат этого двойного акта абстракции — кардинальное число или мощность множества M — мы обозначаем через

$$\overline{\overline{M}} \tag{3}$$

Так как из каждого отдельного элемента m, когда мы отвлекаемся от качества, получается некая «единица», то само кардинальное число $\overline{\overline{M}}$ оказывается множеством, образованным исключительно из единиц, которое существует как интеллектуальный образ или как проекция заданного множества M в наш разум.

---

* Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre.— Math. Ann., 1895, Bd. 46, S. 481—512; 1897, Bd. 49, S. 207—246. Перевод Ф. А. Медведева.

Два множества M и N мы называем «эквивалентными» и обозначаем это через

$$M \sim N \text{ или } N \sim M, \tag{4}$$

если их можно поставить по некоторому закону в такое отношение друг к другу, что каждому элементу одного из них соответствует один и только один элемент другого.

Тогда каждой части M_1 множества M соответствует определенная эквивалентная часть N_1 множества N и наоборот.

Если имеется один такой закон соответствия для двух эквивалентных множеств, то его можно модифицировать многократно (отвлекаясь от случая, когда каждое из них состоит из одного элемента). А именно всегда можно позаботиться о том, чтобы определенному элементу m_0 из M соответствовал любой определенный элемент n_0 из N. Действительно, если при первоначальном законе элементы m_0 и n_0 не соответствуют друг другу, более того, если элементу m_0 из M соответствует элемент n_1 из N, а элементу n_0 из N — элемент m_1 из M, то берем тот модифицированный закон, по которому соответствующими элементами являются m_0 и n_0, а также m_1 и n_1 этих множеств, сохраняя первоначальный закон для остальных элементов. Тем самым поставленная цель достигается.

Всякое множество эквивалентно самому себе:

$$M \sim M. \tag{5}$$

Если два множества эквивалентны третьему, то они эквивалентны друг другу:

$$\text{из } M \sim P \text{ и } N \sim P \text{ следует } M \sim N. \tag{6}$$

Фундаментальное значение имеет то, *что два множества M и N имеют одно и то же кардинальное число тогда и только тогда, когда они эквивалентны:*

$$\text{из } M \sim N \text{ следует } \overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}} \tag{7}$$

и

$$\text{из } \overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}} \text{ следует } M \sim N. \tag{8}$$

Поэтому эквивалентность множеств является необходимым и безошибочным критерием равенства их кардинальных чисел.

Действительно, по предшествующему определению мощности кардинальное число $\overline{\overline{M}}$ не изменится, если вместо одного или нескольких, даже всех элементов m множества M подставляется по некоторой другой вещи.

Если теперь $M \sim N$, то в основе этого находится некий закон соответствия, при помощи которого M и N взаимно однозначно отображаются друг на друга; при этом элементу m из M соответствует элемент n из N. Тогда вместо каждого элемента m из M мы можем вообразить поставленным соответствующий элемент n из N и при этом M превращается в N без изменения кардинального числа. Следовательно,

$$\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}.$$

Обращение теоремы получается из того замечания, что между элементами множества M и различными единицами его кардинального числа $\overline{\overline{M}}$ имеет место взаимно однозначное соответствие. Действительно, как мы видели, $\overline{\overline{M}}$ получается из M в некотором смысле таким образом, что при этом из каждого элемента m возникает особая единица. Поэтому мы можем сказать, что

$$M \sim \overline{\overline{M}}. \tag{9}$$

Аналогично $N \sim \overline{\overline{N}}$. Следовательно, если $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$, то по (6) получаем $M \sim \sim N$.

Выделим еще теорему, непосредственно следующую из понятия эквивалентности:

Если $M, N, P, \ldots$ — множества, не имеющие общих элементов, $M', N', P', \ldots$ — такие же соответствующие им множества и

$$M \sim M',\ N \sim N',\ P \sim P', \ldots,$$

то всегда

$$(M, N, P, \ldots) \sim (M', N', P' \ldots).$$

§ 2. «Больше» и «меньше» для мощностей

Если два множества M и N с кардинальными числами $\mathfrak{a} = \overline{\overline{M}}$ и $\mathfrak{b} = \overline{\overline{N}}$ удовлетворяют двум условиям:

1) *не существует части множества M, которая эквивалентна N,*

2) *существует такая часть N_1 множества N, что $N_1 \sim M$,*

то прежде всего ясно, что то же самое будет выполняться, если в этих условиях M и N заменить двумя эквивалентными им множествами M' и N'; *они, следовательно, выражают определенное отношение чисел $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ друг к другу.*

Далее, *исключается* эквивалентность M и N, а значит, равенство $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$. Действительно, если бы было $M \sim N$, то, поскольку $N_1 \sim M$, мы получили бы и $N_1 \sim N$, а потому ввиду $M \sim N$ существовала бы такая часть M_1 множества M, что $M_1 \sim M$, следовательно, было бы $M_1 \sim N$, что противоречит условию 1).

В-третьих, *отношение $\mathfrak{a}$ к $\mathfrak{b}$ таково, что оно делает невозможным то же самое отношение $\mathfrak{b}$ к $\mathfrak{a}$.* Действительно, если бы в 1) и 2) роли множеств M и N поменялись местами, то из этого получились бы два условия, контрадикторно противоположные заданным.

Отношение $\mathfrak{a}$ к $\mathfrak{b}$, охарактеризованное условиями 1) *и* 2), *мы выражаем тем, что говорим: $\mathfrak{a}$ меньше $\mathfrak{b}$ или $\mathfrak{b}$ больше $\mathfrak{a}$*, символически

$$\mathfrak{a} < \mathfrak{b} \quad \text{или} \quad \mathfrak{b} > \mathfrak{a}. \tag{1}$$

Легко доказывается, что

$$\text{если } \mathfrak{a} < \mathfrak{b},\ \mathfrak{b} < \mathfrak{c}, \text{ то всегда } \mathfrak{a} < \mathfrak{c}. \tag{2}$$

Из этого определения столь же просто следует, что *если P_1 является частью множества P, то из $\mathfrak{a} < P_1$ всегда получается $\mathfrak{a} < \overline{\overline{P}}$, а из $\overline{\overline{P}} < \mathfrak{b}$ всегда следует $\overline{\overline{P_1}} < \mathfrak{b}$.*

Мы видели, что из трех отношений

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{b},\ \mathfrak{a}<\mathfrak{b},\ \mathfrak{b}<\mathfrak{a}$$

каждое исключает два остальных.

Напротив, ни в коей мере не очевидно и в этом месте нашего хода мыслей вряд ли можно доказать, что для любых двух кардинальных чисел $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ необходимо должно реализоваться одно из этих трех отношений.

Лишь позднее, когда мы рассмотрим возрастающую последовательность кардинальных чисел и проникнем в их взаимосвязь, мы убедимся в истинности теоремы:

А. «*Если $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — два произвольных кардинальных числа, то или $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}$, или $\mathfrak{a}<\mathfrak{b}$, или $\mathfrak{a}>\mathfrak{b}$*».

Из этой теоремы очень просто можно получить следующие теоремы, которыми мы пока пользоваться не можем:

В. «*Если два множества M и N таковы, что M эквивалентно некоторой части N_1 множества N, а N эквивалентно некоторой части M_1 множества M, то M и N эквивалентны*» [2].

С. «*Если M_1 является частью множества M, M_2 — частью множества M_1 и множества M и M_2 эквивалентны, то и M_1 эквивалентно множествам M и M_2*».

D. «*Если для двух множеств M и N выполняется условие, что N не эквивалентно ни самому M, ни какой-либо части M, то имеется часть N_1 множества N, которая эквивалентна M*».

Е. «*Если два множества M и N не эквивалентны и существует часть N_1 множества N, которая эквивалентна M, то никакая часть множества M не эквивалентна N*».

§ 3. Сложение и умножение мощностей

Объединение двух множеств M и N, не имеющих общих элементов, в § 1 (см. (2)) было обозначено через (M, N). Мы называем его «*суммой множеств M и N*».

Если M', N' — два других множества без общих элементов и $M\sim M'$, $N\sim N'$, то мы видели, что и

$$(M, N)\sim(M', N').$$

Отсюда следует, что кардинальное число множества (M, N) зависит только от кардинальных чисел $\overline{\overline{M}}=\mathfrak{a}$ и $\overline{\overline{N}}=\mathfrak{b}$.

Это приводит к определению суммы чисел $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, если положить

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\overline{\overline{(M, N)}}. \qquad (1)$$

Так как в понятии мощности мы абстрагируемся от порядка элементов, то легко получаем

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mathfrak{b}+\mathfrak{a}, \qquad (2)$$

а для трех кардинальных чисел

$$\mathfrak{a}+(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})=(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})+\mathfrak{c} \qquad (3)$$

Переходим к умножению.

Каждый элемент m множества M можно объединить с каждым элементом n некоторого другого множества N в новый элемент (m, n); для множества всех этих объединений (m, n) мы примем обозначение $(M\cdot N)$. Назовем его «*произведением множеств M и N*». Итак,

$$(M\cdot N)=\{(m, n)\}. \tag{4}$$

Убедимся, что и мощность множества $(M\cdot N)$ зависит лишь от мощностей $\overline{\overline{M}}=\mathfrak{a}$ и $\overline{\overline{N}}=\mathfrak{b}$. Действительно, если множества M и N мы заменим эквивалентными им множествами

$$M'=\{m'\} \quad \text{и} \quad N'=\{n'\}$$

и будем рассматривать m, m' и n, n' как соответствующие элементы, то тем самым множество

$$(M'\cdot N')=\{(m', n')\}$$

будет поставлено с $(M\cdot N)$ во взаимно однозначное соответствие такого вида, что (m, n) и (m', n') окажутся соответствующими друг другу. Следовательно,

$$(M'\cdot N')\sim(M\cdot N). \tag{5}$$

Определим теперь произведение $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}$ равенством

$$\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}=(\overline{\overline{M\cdot N}}). \tag{6}$$

Множество с кардинальным числом $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}$ можно образовать из двух множеств M и N также и при помощи следующего правила: исходим из множества N и заменяем в нем каждый элемент n множеством $M_n\sim M$. Если объединить элементы всех этих [не пересекающихся друг с другом] множеств M_n в нечто целое S, то легко видеть, что

$$S\sim(M\cdot N), \tag{7}$$

а значит,

$$\overline{\overline{S}}=\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}.$$

Действительно, если при любом взятом за основу законе соответствия двух эквивалентных множеств M и M_n элемент из M_n, соответствующий элементу m множества M, обозначить через m_n, то получим

$$S=\{m_n\} \tag{8}$$

и потому множества S и $(M\cdot N)$ ставятся во взаимно однозначное соответствие друг с другом условием, что в качестве отвечающих друг другу элементов рассматриваются m_n и (m, n).

Из наших определений легко получаются теоремы:

$$\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}=\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{a}, \tag{9}$$

$$\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c}=(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})\cdot\mathfrak{c}, \tag{10}$$

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})=\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}+\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c}, \tag{11}$$

ибо

$$(M \cdot N) \sim (N \cdot M),$$
$$(M \cdot (N \cdot P)) \sim ((M \cdot N) \cdot P),$$
$$(M \cdot (N,\ P)) \sim ((M \cdot N),\ (N \cdot P)).$$

Следовательно, сложение и умножение мощностей вообще подчиняются коммутативному, ассоциативному и дистрибутивному законам.

§ 4. Возведение мощностей в степень

Под *«покрытием множества N элементами множества M»* или просто под *«покрытием N посредством M»* мы понимаем закон, при помощи которого с каждым элементом n из N связывается один определенный элемент из M, причем один и тот же элемент из M может применяться неоднократно. Элемент множества M, связываемый с n, есть в некотором смысле однозначная функция от n, и его можно обозначать, например, через $f(n)$. Эта функция называется *«функцией покрытия элемента n»*; соответствующее покрытие множества N обозначается через $f(N)$ [3].

Два покрытия $f_1(N)$ и $f_2(N)$ называются равными тогда и только тогда, когда *для всех элементов n из N* выполняется равенство

$$f_1(n) = f_2(n), \tag{1}$$

так что если хотя бы лишь для одного отдельного элемента $n = n_0$ это равенство не выполняется, то $f_1(N)$ и $f_2(N)$ будут рассматриваться как различные покрытия множества N.

Может случиться, например, что для отдельного элемента m_0 из M при всех n будет

$$f(n) = m_0;$$

этот закон образует особое покрытие N множеством M.

Другой тип покрытия получится тогда, когда при различных выделенных элементах m_0 и m_1 множества M и выделенном элементе n_0 множества N полагаем

$$f(n_0) = m_0, \quad f(n) = m_1$$

для всех n, отличных от n_0.

Совокупность всех различных покрытий множества N посредством M образует определенное множество с элементами $f(N)$. Мы называем его *«множеством покрытий N посредством M»* и обозначаем через $(N \mid M)$; следовательно,

$$(N \mid M) = \{f(N)\}. \tag{2}$$

Если $M \sim M'$ и $N \sim N'$, то легко находим, что и

$$(N \mid M) \sim (N' \mid M'). \tag{3}$$

Значит, кардинальное число множества $(N \mid M)$ зависит только от кардинальных чисел $\overline{\overline{M}} = \mathfrak{a}$ и $\overline{\overline{N}} = \mathfrak{b}$ и служит для определения степени $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}$:

$$\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} = \overline{\overline{(N \mid M)}}. \tag{4}$$

Для любых трех множеств M, N и P легко доказываются теоремы:

$$((N|M)\cdot(P|M)) \sim ((N|P)|M), \tag{5}$$

$$((P|M)\cdot(P|N)) \sim (P|(M\cdot N)), \tag{6}$$

$$(P|(N|M)) \sim ((P\cdot N)|M), \tag{7}$$

из которых, полагая $\overline{\overline{P}}=\mathfrak{c}$ и принимая во внимание § 3, на основании (4) получаем теоремы, справедливые для любых трех кардинальных чисел $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$,

$$\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}\cdot\mathfrak{a}^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}, \tag{8}$$

$$\mathfrak{a}^{\mathfrak{c}}\cdot\mathfrak{b}^{\mathfrak{c}} = (\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})^{\mathfrak{c}}, \tag{9}$$

$$(\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}})^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c}}. \tag{10}$$

Насколько богатыми по содержанию и далеко идущими являются эти простые формулы, относящиеся к мощностям, видно из следующего примера. Если мы обозначим мощность линейного континуума X (т. е. совокупности X всех действительных чисел x, которые $\geqslant 0$ и $\leqslant 1$) через $\mathfrak{o}$, то легко убедиться, что она, между прочим, может быть выражена формулой

$$\mathfrak{o} = 2^{\aleph_0}, \tag{11}$$

смысл символа $\aleph_0$ которой объясняется в § 6.

Действительно, $2^{\aleph_0}$ по (4) есть не что иное, как мощность всех двоичных разложений чисел x вида

$$x = \frac{f(1)}{2} + \frac{f(2)}{2^2} + \ldots + \frac{f(\nu)}{2^\nu} + \ldots \text{ (где } f(\nu) = 0 \text{ или } 1). \tag{12}$$

Если мы заметим при этом, что каждое число x имеет единственное разложение, за исключением чисел $x = \dfrac{2\nu+1}{2^\mu} < 1$, представляющихся двояким образом, то, обозначая через $\{s_\nu\}$ «счетную» совокупность последних, имеем прежде всего, что

$$2^{\aleph_0} = \overline{\overline{(\{s_\nu\}, X)}}.$$

Если мы исключим из X какое-либо «счетное» множество $\{t_\nu\}$ и остаток обозначим через X_1, то

$$X = (\{t_\nu\}, X_1) = (\{t_{2\nu-1}\}, \{t_{2\nu}\}, X_1),$$

$$(\{s_\nu\}, X) = (\{s_\nu\}, \{t_\tau\}, X_1),$$

$$\{t_{2\nu-1}\} \sim \{s_\nu\},\ \{t_{2\nu}\} \sim \{t_\nu\},\ X_1 \sim X_1,$$

следовательно,

$$X = (\{s_\nu\}, X),$$

а значит (§ 1),

$$2^{\aleph_0} = \overline{\overline{X}} = \mathfrak{o}.$$

Из (11) после возведения в квадрат (§ 6, (6)) следует

$$\mathfrak{o}\cdot\mathfrak{o} = 2^{\aleph_0}\cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0+\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{o},$$

а отсюда через продолжение умножения на $\mathfrak{o}$

$$\mathfrak{o}^{\nu}=\mathfrak{o}, \tag{13}$$

где ν — любое конечное кардинальное число.

Если обе части равенства (11) возведем в степень $\aleph_0$, то получим

$$\mathfrak{o}^{\aleph_0}=(2^{\aleph_0})^{\aleph_0}=2^{\aleph_0\cdot\aleph_0}$$

А так как по § 6 (8) $\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$, то

$$\mathfrak{o}^{\aleph_0}=\mathfrak{c}. \tag{14}$$

Однако формулы (13) и (14) не имеют другого смысла, кроме такого: «как ν-мерный, так $\aleph_0$-мерный континуумы имеют мощность одномерного континуума». Следовательно, *все содержание* работы из 84-го тома журнала Крелле, с. 242 [I.3] получается чисто алгебраически из *основных формул действий с мощностями при помощи этих нескольких строк.*

§ 5. Конечные кардинальные числа [4]

Прежде всего нужно будет показать, как изложенные выше принципы, на которых далее будет построено учение об актуально бесконечных или трансфинитных кардинальных числах, приводят к самому естественному, кратчайшему и наиболее строгому обоснованию учения о конечных числах.

Отдельной вещи e_0, когда мы подведем ее под понятие множества $E_0=(e_0)$, соответствует в качестве кардинального числа то, что мы называем «единицей» и обозначаем через 1; имеем

$$1=\overline{\overline{E}}_0. \tag{1}$$

Присоединяем теперь к E_0 некоторую другую вещь e_1 и обозначаем через E_1 сумму множеств, так что

$$E_1=(E_0,\ e_1)=(e_0,\ e_1). \tag{2}$$

Кардинальное число множества E_1 называется «два» и будет обозначаться через 2:

$$2=\overline{\overline{E}}_1. \tag{3}$$

Добавлением новых элементов получаем последовательность множеств

$$E_2=(E_1,\ e_2),\quad E_3=(E_2,\ e_3),\ \ldots,$$

которая при неограниченном продолжении приводит нас к остальным так называемым *конечным кардинальным числам*, обозначаемым через 3, 4, 5, ... Происходящее при этом вспомогательное использование тех же чисел как индексов оправдывается тем, что число в этом значении применяется только после того, как оно уже было определено как кардинальное число. Если в данной последовательности под $\nu-1$ мы будем понимать число, непосредственно предшествующее числу ν, то получим

$$\nu=\overline{\overline{E}}_{\nu-1}, \tag{4}$$

$$E_\nu=(E_{\nu-1},\ e_\nu)=(e_0,\ e_1,\ \ldots,\ e_\nu). \tag{5}$$

Из определения суммы в § 3 следует

$$\overline{\overline{E}}_\nu=\overline{\overline{E}}_{\nu-1}+1, \tag{6}$$

т. е. всякое конечное кардинальное число (кроме 1) является суммой непосредственно предшествующего и 1.

В нашем ходе мыслей теперь на передний план выступают три следующих предложения.

А. *«Все члены неограниченной последовательности конечных кардинальных чисел*

$$1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots$$

отличны друг от друга (т. е. не выполняется установленное в § 1 условие эквивалентности соответствующих им множеств)».

В. *«Каждое из этих чисел ν больше, чем предшествующее ему, и меньше, чем следующее за ним* (§ 2)».

С. *«Не существует кардинального числа, которое по своей величине было бы расположено между двумя соседними числами ν и $\nu+1$»*.

Доказательства этих теорем мы основываем на двух следующих теоремах D и E, которые поэтому нужно доказать предварительно.

D. *«Если M — множество, обладающее свойством не иметь одинаковой мощности ни с каким своим подмножеством, то и множество (M, e), получаемое из M присоединением одного нового элемента e, обладает тем же свойством не иметь одинаковой мощности ни с каким из его подмножеств»*.

E. *«Если N — множество с конечным кардинальным числом ν, а N_1 — какое-либо подмножество множества N, то кардинальное число множества N_1 равно одному из предшествующих чисел* 1, 2, 3, ..., $\nu-1$»*.

Доказательство теоремы D. Если мы предположим, что множество (M, e) имеет одинаковую мощность с одним из его подмножеств, которое мы обозначим через N, то придется различать два случая, которые оба приводят к противоречию.

1. Множество N содержит e в качестве элемента, пусть $N=(M_1, e)$. Тогда M_1 является частью множества M, так как N является частью множества (M, e). В § 1 мы видели, что закон соответствия двух эквивалентных множеств (M, e) и (M_1, e) можно модифицировать так, что элемент e одного из них будет соответствовать элементу e другого. Но тогда и множества M и M_1 находятся во взаимно однозначном соответствии. Однако это противоречит предположению, что M не имеет одинаковой мощности ни с какой его частью M_1.

2. Подмножество N множества (M, e) не содержит e как элемент, и тогда N есть или M, или часть M. При взятом за основу законе соответствия между (M, e) и N элемент e первого множества соответствует, возможно, элементу f другого. Пусть $N=(M_1, f)$. Тогда одновременно множество M будет находиться во взаимно однозначном соответствии с M_1. Но M_1, как часть множества N, во всяком случае является и частью множества M. Так что и здесь M было бы эквивалентно своей части, вопреки предположению.

Доказательство теоремы E. Предположим справедливость этой теоремы для некоторого ν и докажем справедливость ее для непосредственно следующего $\nu+1$.

Берем за основу $E_\nu=(e_0, e_1, \ldots, e_\nu)$ в качестве множества с кардинальным числом $\nu+1$. Если теорема верна для этого множества, то очевидно (§ 1), что она правильна и для всякого другого множества с тем же кардинальным числом $\nu+1$. Пусть E' — какая-либо часть множества E_ν. Исследуем такие случаи:

1) E' не содержит e_ν как элемент. Тогда E' есть или $E_{\nu-1}$, или часть множества $E_{\nu-1}$, а значит, имеет кардинальным числом или ν, или одно из чисел $1, 2, 3, \ldots, \nu-1$, поскольку мы предположили нашу теорему верной для множества $E_{\nu-1}$ с кардинальным числом ν;

2) E' состоит из единственного элемента, и тогда $\overline{\overline{E'}}=1$;

3) E' состоит из e_ν и некоторого множества E'', так что $E'=(E'', e_\nu)$. E'' является частью множества $E_{\nu-1}$, а значит, согласно предположению имеет в качестве кардинального числа одно из чисел $1, 2, 3, \ldots, \nu-1$.

Но теперь $\overline{\overline{E'}}=\overline{\overline{E''}}+1$, а потому E' имеет в качестве кардинального числа одно из чисел $2, 3, \ldots, \nu$.

Доказательство теоремы A. Каждое из множеств, обозначенных нами через E_ν, обладает свойством не быть эквивалентным никакому своему подмножеству. Действительно, если мы предположим, что это справедливо для некоторого ν, то по теореме D это же получается для непосредственно следующего $\nu+1$.

Для $\nu=1$ очевидно, что множество $E_1=(e_0, e_1)$ не эквивалентно никакому своему подмножеству, каковыми здесь являются (e_0) и (e_1).

Рассмотрим теперь любые два числа последовательности $1, 2, 3, \ldots$, и пусть μ — предшествующее, а ν — последующее, так что $E_{\mu-1}$ является подмножеством множества $E_{\nu-1}$. Поэтому $E_{\mu-1}$ и $E_{\nu-1}$ не эквивалентны, а тем самым соответствующие кардинальные числа $\mu=\overline{\overline{E}}_{\mu-1}$ и $\nu=\overline{\overline{E}}_{\nu-1}$ не равны.

Доказательство теоремы B. Если из двух конечных кардинальных чисел μ и ν первое является предшествующим, а второе последующим, то $\mu<\nu$. Действительно, если мы рассмотрим два множества $M=E_{\mu-1}$ и $N=E_{\nu-1}$, то каждое из них удовлетворяет обоим условиям § 2 для $\overline{\overline{M}}<\overline{\overline{N}}$. Условие 1) выполняется, так как по теореме E подмножество множества $M=E_{\mu-1}$ имеет только одно из кардинальных чисел $1, 2, 3, \ldots$ $\ldots, \mu-1$, а значит, по теореме A не может быть эквивалентным множеству $N=E_{\nu-1}$. Условие 2) выполняется, поскольку здесь само M является частью N.

Доказательство теоремы C. Пусть $\mathfrak{a}$ — кардинальное число, которое меньше $\nu+1$. В соответствии с условием 2) из § 2 существует подмножество множества E_ν с кардинальным числом $\mathfrak{a}$. По теореме E подмножеству множества E_ν соответствует лишь одно из кардинальных чисел $1, 2, 3, \ldots, \nu$.

Следовательно, $\mathfrak{a}$ равно одному из кардинальных чисел $1, 2, 3, \ldots, \nu$.

По теореме B ни одно из этих чисел не больше ν.

Не существует поэтому кардинального числа $\mathfrak{a}$, которое меньше $\nu+1$ и больше ν.

Для дальнейшего важна следующая теорема:

F. «*Если K — любое множество различных конечных кардинальных чисел, то среди них имеется число $\varkappa_1$, которое меньше остальных, а значит, является наименьшим из всех них*».

Доказательство. Множество K или содержит число 1, и тогда оно является наименьшим и $\varkappa_1=1$, или же нет. Пусть в последнем случае J — совокупность *всех* тех кардинальных чисел нашей последовательности 1, 2, 3, ..., которые меньше входящих в K. Если число ν принадлежит J, то и все числа $<\nu$ принадлежат J. Но J должно содержать такой элемент ν_1, что ν_1+1, а значит, и все бóльшие числа не принадлежат J, так как в противном случае J охватывало бы совокупность всех конечных чисел, а между тем принадлежащие K числа не содержатся в J. Следовательно, J есть не что иное, как отрезок $(1, 2, 3, \ldots, \nu_1)$. Число $\nu_1+1= =\varkappa_1$ необходимо является элементом множества K, и оно меньше всех остальных.

Из F заключаем:

G. «*Всякое множество $K=\{\varkappa\}$ различных конечных кардинальных чисел можно так представить в виде последовательности*

$$K=\{\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \ldots\},$$

что

$$\varkappa_1<\varkappa_2<\varkappa_3< \ldots »$$

§ 6. Наименьшее трансфинитное кардинальное число алеф-нуль [5]

Множества с конечными кардинальными числами называются «*конечными множествами*», а все остальные множества мы будем называть «*трансфинитными множествами*», а соответствующие им кардинальные числа — «*трансфинитными кардинальными числами*».

Совокупность *всех конечных кардинальных чисел* ν дает нам первоочередной пример трансфинитного множества; назовем соответствующее ему кардинальное число (§ 1) «алеф-нуль», символически $\aleph_0$, и значит, по определению

$$\aleph_0 = \overline{\overline{\{\nu\}}}. \tag{1}$$

Что $\aleph_0$ является *трансфинитным* числом, т. е. *не равен никакому конечному числу* μ, вытекает из того простого факта, что если к множеству $\{\nu\}$ будет добавлен новый элемент e_0, то множество-сумма $(\{\nu\}, e_0)$ эквивалентно первоначальному множеству $\{\nu\}$. Действительно, между этими двумя множествами можно вообразить взаимно однозначное соответствие, по которому элементу e_0 первого множества соответствует элемент 1 второго, элементу ν первого — элемент $\nu+1$ второго. Поэтому по § 3 имеем

$$\aleph_0+1=\aleph_0. \tag{2}$$

Но в § 5 было показано, что (для конечного μ) $\mu+1$ всегда отлично от μ, а потому $\aleph_0$ не равен никакому конечному числу μ.

Число $\aleph_0$ *больше всякого конечного числа* μ:

$$\aleph_0 > \mu. \tag{3}$$

Это вытекает с учетом § 2 из того, что $\mu = \overline{\overline{1, 2, 3, \ldots, \mu}})$, что никакая часть множества $(1, 2, 3, \ldots, \mu)$ не эквивалентна множеству $\{\nu\}$ и что само $(1, 2, 3, \ldots, \mu)$ является некоторой частью множества $\{\nu\}$.

С другой стороны, $\aleph_0$ является *наименьшим трансфинитным числом.* Если $\mathfrak{a}$ — какое-либо отличное от $\aleph_0$ трансфинитное кардинальное число, то всегда

$$\aleph_0 < \mathfrak{a}. \tag{4}$$

Это вытекает из следующих теорем.

A. «*Всякое трансфинитное множество* T *имеет подмножества с кардинальным числом* $\aleph_0$».

Доказательство [6]. Если мы в соответствии с каким-либо правилом удалили из T элементы $t_1, t_2, \ldots, t_{\nu-1}$, то всегда остается возможность выделить еще элемент t_ν. Множество $\{t_\nu\}$, в котором ν означает любое конечное кардинальное число, является подмножеством множества T с кардинальным числом $\aleph_0$, так как $\{t_\nu\} \sim \{\nu\}$ (§ 1).

B. «*Если* S — *трансфинитное множество с кардинальным числом* $\aleph_0$ *и* S_1 — *какое-либо трансфинитное подмножество множества* S, *то и* $\overline{\overline{S}}_1 = \aleph_0$».

Доказательство. По предположению $S \sim \{\nu\}$. Во взятом за основу законе соответствия между этими двумя множествами обозначим через s_ν тот элемент множества S, который соответствует элементу ν из $\{\nu\}$. Тогда

$$S = \{s_\nu\}.$$

Подмножество S_1 множества S состоит из некоторых элементов $s_\varkappa$, и совокупность всех чисел $\varkappa$ образует трансфинитную часть K множества $\{\nu\}$. По теореме G из § 5 множество K можно представить в виде последовательности

$$K = \{\varkappa_\nu\},$$

где

$$\varkappa_\nu < \varkappa_{\nu+1},$$

следовательно, и

$$S_1 = \{s_{\varkappa_\nu}\}.$$

Отсюда следует, что $S_1 \sim S$, а значит, $\overline{\overline{S}}_1 = \aleph_0$.

Принимая во внимание § 2, из A и B получаем формулу (4).

Из (2), прибавляя 1 к обеим частям равенства, заключаем, что

$$\aleph_0 + 2 = \aleph_0 + 1 = \aleph_0,$$

а повторяя это соображение, имеем

$$\aleph_0 + \nu = \aleph_0. \tag{5}$$

Но имеем и

$$\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0. \tag{6}$$

Действительно, по (1) из § 3 $\aleph_0+\aleph_0$ есть кардинальное число $\overline{\overline{(\{a_\nu\}, \{b_\nu\})}}$, так как

$$\overline{\overline{\{a_\nu\}}} = \overline{\overline{\{b_\nu\}}} = \aleph_0.$$

Но очевидно, что

$$\{\nu\} = (\{2\nu-1\}, \{2\nu\}),$$

$$(\{2\nu-1\}, \{2\nu\}) \sim (\{a_\nu\}, \{b_\nu\}),$$

а значит,

$$\overline{\overline{(\{a_\nu\}, \{b_\nu\})}} = \overline{\overline{\{\nu\}}} = \aleph_0.$$

Равенство (6) можно будет записать также так:

$$\aleph_0\cdot 2=\aleph_0,$$

а повторяя прибавление $\aleph_0$ к обеим сторонам, находим, что

$$\aleph_0\cdot\nu=\nu\cdot\aleph_0=\aleph_0. \tag{7}$$

Но имеет место и

$$\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0. \tag{8}$$

Доказательство [7]. По (6) из § 3 $\aleph_0\cdot\aleph_0$ есть кардинальное число произведения множеств

$$\{(\mu, \nu)\},$$

где μ и ν являются двумя независимыми друг от друга произвольными конечными кардинальными числами. Если и λ является представителем произвольного конечного кардинального числа (так что $\{\lambda\}$, $\{\mu\}$, $\{\nu\}$ суть лишь различные обозначения одной и той же совокупности всех конечных кардинальных чисел), то нам нужно показать, что

$$\{(\mu, \nu)\} \sim \{\lambda\}.$$

Если $\mu+\nu$ мы обозначим через ρ, то ρ принимает все числовые значения 2, 3, 4, ... и в целом имеется $\rho-1$ элементов (μ, ν), для которых $\mu+\nu=\rho$, а именно таких:

$$(1, \rho-1), (2, \rho-2), \ldots, (\rho-1, 1).$$

Зафиксировав в этой последовательности один элемент (1, 1), для которого $\rho=2$, затем два элемента, для которых $\rho=3$, затем три элемента, для которых $\rho=4$, и т. д., получим все элементы (μ, ν) в виде простой последовательности

$$(1,1);\ (1,2),\ (2,1);\ (1,3),\ (2,2),\ (3,1);\ (1,4),\ (2,3), \ldots,$$

причем, как легко видеть, элемент (μ, ν) получается на λ-м месте, где

$$\lambda=\mu+(\mu+\nu-1)(\mu+\nu-2)/2 \tag{9}$$

и принимает каждое числовое значение 1, 2, 3, ... один раз. Следова-

тельно, при помощи (9) между множествами $\{\lambda\}$ и $\{(\mu, \nu)\}$ можно установить взаимно однозначное соответствие.

Если умножить обе части равенства (8) на $\aleph_0$, то получим $\aleph_0^3=\aleph_0^2=\aleph_0$, а через повторное умножение на $\aleph_0$ — формулу

$$\aleph_0^\nu=\aleph_0,$$

справедливую для всякого конечного кардинального числа ν.

Теоремы E и A из § 5 приводят к теореме о *конечных* множествах:

C. «*Всякое конечное множество обладает тем свойством, что оно не эквивалентно никакому своему подмножеству*».

Этой теореме явно противостоит следующая теорема о *трансфинитных* множествах:

D. «*Всякое трансфинитное множество T обладает тем свойством, что оно содержит подмножества T_1, которые эквивалентны ему*» [8].

Доказательство. По теореме A этого параграфа существует подмножество $S=\{t_\nu\}$ множества T с кардинальным числом $\aleph_0$. Пусть $T=(S, U)$, так что U состоит из тех элементов множества T, которые отличны от элементов t_ν. Если мы положим $S_1=\{t_{\nu+1}\}$, $T_1=(S_1, U)$, то T_1 будет подмножеством множества T и притом получающимся удалением единственного элемента t_1 из T. Так как $S\sim S_1$ (теорема B этого параграфа) и $U\sim U$, то и (§ 1) $T\sim T_1$.

В этих теоремах C и D самым отчетливым образом выступает то существенное различие между конечными и трансфинитными множествами, которое было указано еще в 1877 г. в 84-м томе журнала Крелле, с. 242 [I. 3].

После того как мы ввели наименьшее трансфинитное кардинальное число $\aleph_0$ и изучили его простейшие свойства, возникает вопрос о бóльших кардинальных числах и их получении из $\aleph_0$.

Нам предстоит показать, что трансфинитные кардинальные числа можно упорядочить по их величине и что в этом упорядочении они образуют,— как и конечные числа, но в некотором обобщенном смысле,— «*вполне упорядоченное множество*» [9].

Из $\aleph_0$ по некоторому определенному закону получается *ближайшее большее* кардинальное число $\aleph_1$, из него по тому же закону *ближайшее большее* $\aleph_2$ и так далее.

Но и неограниченная последовательность кардинальных чисел

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_\nu, \ldots$$

не исчерпывает понятия трансфинитного кардинального числа. Будет доказано существование кардинального числа, которое мы обозначим через $\aleph_\omega$ и которое оказывается *ближайшим бóльшим* числом, чем все $\aleph_\nu$; из него, так же как $\aleph_1$ из $\aleph_0$, получается ближайшее большее $\aleph_{\omega+1}$, и так продолжается без конца.

Для *всякого трансфинитного кардинального числа* $\mathfrak{a}$ существует получаемое из него по единообразному закону *ближайшее большее*; но и для всякого неограниченно возрастающего вполне упорядоченного мно-

жества $\{\mathfrak{a}\}$ трансфинитных кардинальных чисел $\mathfrak{a}$ существует *ближайшее большее* кардинальное число, единообразно получаемое отсюда.

Для строгого обоснования этого положения вещей, обнаруженного в 1882 г. и описанного в работе «Основы общего учения о многообразиях», а также в 21-м томе «Math. Ann.» [I. 5.5, § 11—13], мы пользуемся так называемыми *порядковыми типами*, теория которых излагается в нижеследующих параграфах.

§ 7. Порядковые типы просто упорядоченных множеств [10]

Множество M мы называем «*просто упорядоченным*», если между его элементами существует определенное «*порядковое отношение*», в соответствии с которым из любых двух элементов m_1 и m_2 один занимает «*более низкое*», а другой «*более высокое*» положение, и притом так, что если из трех элементов m_1, m_2, m_3, например, m_1 по положению ниже, чем m_2, а m_2 ниже, чем m_3, то всегда m_1 имеет более низкое положение, чем m_3.

Соотношение между элементами m_1 и m_2, в соответствии с которым m_1 имеет более низкое положение, а m_2— более высокое в заданном порядковом отношении, будет выражаться формулами

$$m_1 \prec m_2, \qquad m_2 \succ m_1. \tag{1}$$

Так, например, всякое точечное множество P, заданное на неограниченной прямой, будет просто упорядоченным множеством, если из двух принадлежащих ему точек p_1 и p_2 более низкий ранг приписан той, координата которой (при выбранных начале координат и направлении) меньше.

Очевидно, что одно и то же множество можно «просто упорядочить» по различным законам. Возьмем, например, множество R всех положительных рациональных чисел p/q (где p и q взаимно просты), которые больше 0 и меньше 1. Тогда, во-первых, имеем их «естественное» упорядочение по величине. Но их можно упорядочить, например, и так (и при этом упорядочении будем обозначать это множество через R_0), что из двух чисел p_1/q_1 и p_2/q_2, у которых суммы p_1+q_1 и p_2+q_2 имеют различное значение, более низкий ранг получает то число, для которого меньше соответствующая сумма, а если $p_1+q_1=p_2+q_2$, то более низкий ранг будет иметь меньшее из этих чисел.

Очевидно, что в этом упорядочении наше множество имеет вид

$$R_0 = (r_1, r_2, \ldots, r_\nu, \ldots) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \ldots\right),$$

где

$$r_\nu \prec r_{\nu+1},$$

так как одному и тому же значению $p+q$ всегда отвечает лишь конечное число различных рациональных чисел.

Итак, всегда, когда мы говорим о *просто упорядоченном* множестве M, мы имеем в виду заданным некоторое *определенное упорядочение* его элементов в объясненном выше смысле.

Существуют дважды, трижды, ν-кратно, α-кратно упорядоченные множества, однако в нашем исследовании мы пока отказываемся рассматривать их. Поэтому в последующем нам можно пользоваться более кратким выражением «упорядоченное множество», когда речь идет о «просто упорядоченном множестве».

Всякому упорядоченному множеству M соответствует определенный «*порядковый тип*» или, короче, определенный «*тип*», который мы будем обозначать через

$$\overline{M}. \tag{2}$$

Под этим мы понимаем то *общее понятие, которое получается из M, когда мы отвлекаемся от качества элементов m, но сохраняем их порядковое расположение.*

В соответствии с этим порядковый тип $\overline{M}$ сам является упорядоченным множеством, элементами которого являются *исключительно единицы*, расположенные по отношению друг к другу так же, как и соответствующие им элементы множества M, из которых они получены абстрагированием.

Два упорядоченных множества M и N мы называем «*подобными*», если их можно так поставить во взаимно однозначное соответствие, что когда m_1 и m_2 — любые два элемента из M, а n_1 и n_2 — соответствующие им элементы из N, то всегда порядковое отношение m_1 к m_2 в M такое же, как и порядковое отношение n_1 к n_2 в N. Такое соответствие подобных множеств мы называем их «отображением» друг на друга [2]. При этом каждому подмножеству M_1 множества M (которое, очевидно, тоже является упорядоченным множеством) соответствует подобное ему подмножество N_1 множества N.

Подобие двух упорядоченных множеств M и N мы выражаем формулой

$$M \simeq N. \tag{3}$$

Всякое упорядоченное множество подобно самому себе.

Если два упорядоченных множества подобны третьему, то они подобны и друг другу.

Простое соображение показывает, что *два упорядоченных множества имеют одинаковый порядковый тип тогда и только тогда, когда они подобны, так что из двух формул*

$$\overline{M} = \overline{N}, \qquad M \simeq N \tag{4}$$

одна всегда является следствием другой.

Если в порядковом типе $\overline{M}$ мы абстрагируемся и от расположения элементов, то получим (§ 1) кардинальное число $\overline{\overline{M}}$ упорядоченного множества M, которое одновременно является кардинальным числом порядкового типа $\overline{M}$.

Из $\overline{M} = \overline{N}$ всегда следует $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$, т. е. упорядоченные множества равных типов всегда имеют одну и ту же мощность или кардинальное число; подобие упорядоченных множеств всегда обеспечивает их эквива-

лентность. Напротив, два упорядоченных множества могут быть эквивалентными, не будучи подобными.

Для обозначения порядковых типов мы будем пользоваться малыми буквами греческого алфавита.

Если α — порядковый тип, то под

$$\overline{\alpha} \tag{5}$$

будем понимать соответствующее ему кардинальное число.

Порядковые типы конечных просто упорядоченных множеств не представляют особого интереса. Действительно, легко убедиться, что для одного и того же конечного кардинального числа ν все просто упорядоченные множества подобны друг другу, а значит, имеют один и тот же порядковый тип. Поэтому конечные просто упорядоченные типы подчиняются тем же законам, что и конечные кардинальные числа, и для них допустимо применять те же знаки $1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots$, хотя понятийно они и отличаются от кардинальных чисел.

Совсем иначе обстоит дело для трансфинитных порядковых типов. Действительно, для одного и того же трансфинитного кардинального числа существует несчетно много различных типов просто упорядоченных множеств, которые в их совокупности образуют особый *«класс типов»*.

Следовательно, каждый из этих классов типов определяется трансфинитным кардинальным числом $\mathfrak{a}$, являющимся общим для всех отдельных типов, принадлежащих этому классу; поэтому мы называем его кратко классом типов $[\mathfrak{a}]$.

Тот из них, который естественно представляется нам и полное изучение которого поэтому должно явиться нашей ближайшей целью в теории трансфинитных множеств, это класс типов $[\aleph_0]$, охватывающий все типы с наименьшим кардинальным числом $\aleph_0$.

Кардинальное число $\mathfrak{a}$, *определяющее* класс типов $[\mathfrak{a}]$, мы должны отличать от того кардинального числа $\mathfrak{a}'$, которое *само определяется классом типов* $[\mathfrak{a}]$; последнее является кардинальным числом, соответствующим классу типов $[\mathfrak{a}]$, как только он является *строго определенным множеством, элементами которого являются все типы α с кардинальным числом* $\mathfrak{a}$. Мы увидим, что $\mathfrak{a}'$ отлично от $\mathfrak{a}$ и притом всегда больше, чем $\mathfrak{a}$.

Если в упорядоченном множестве M мы обратим все порядковые отношения между элементами, так что всюду «более низкий» станет «более высоким», а «более высокий» — «более низким», то опять получим упорядоченное множество, которое обозначим через

$${}^*M \tag{6}$$

и назовем *«обратным»* для M.

Если $\alpha=\overline{M}$, то порядковый тип множества ${}^*M$ обозначим через

$${}^*\alpha. \tag{7}$$

Может случиться, что ${}^*\alpha=\alpha$, как, например, у конечных типов или у ти-

па множества R всех рациональных чисел, которые больше 0 и меньше 1, в их естественном упорядочении. Этот тип мы будем изучать, обозначив его через η.

Заметим, далее, что два подобных упорядоченных множества могут быть отображены друг от друга или *единственным* образом, или *несколькими* способами; в первом случае соответствующий тип подобен самому себе лишь единственным образом, а во втором — несколькими [11].

Не только все конечные типы, но и те типы трансфинитных «вполне упорядоченных множеств», которыми мы займемся далее и которые назовем «трансфинитными порядковыми числами», таковы, что они допускают лишь единственное отображение на себя. Напротив, указанный выше тип η отображается на себя несчетно многими способами.

Это различие мы хотим пояснить двумя примерами.

Под ω мы понимаем тип вполне упорядоченного множества

$$(e_1, e_2, \ldots, e_\nu, \ldots),$$

в котором

$$e_\nu \prec e_{\nu+1},$$

где ν является представителем всех конечных кардинальных чисел.

Другое вполне упорядоченное множество

$$(f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots)$$

с условием

$$f_\nu \prec f_{\nu+1}$$

и того же типа ω может быть «отображено» на первое только так, что e_ν и f_ν являются соответствующими элементами. Действительно, самому низкому по рангу элементу e_1 первого множества должен соответствовать самый низкий элемент f_1 второго, непосредственно следующему по рангу за e_1 элементу e_2 должен соответствовать непосредственно следующий за f_1 элемент f_2 и т. д.

Всякое другое взаимно однозначное соответствие этих двух эквивалентных множеств $\{e_\nu\}$ и $\{f_\nu\}$ не является «отображением» в том смысле, который мы зафиксировали выше для теории типов.

Напротив, возьмем теперь упорядоченное множество вида

$$\{e_{\nu'}\},$$

где ν' — представитель всех положительных и отрицательных конечных целых чисел, включая 0, и где тоже

$$e_{\nu'} \prec e_{\nu'+1}.$$

Это множество не имеет самого высокого и самого низкого по рангу элемента. Его тип по определению суммы, которое будет дано в § 8, таков:

$$^*\omega + \omega.$$

Он подобен самому себе бесчисленно многими способами.

Действительно, если мы рассмотрим множество

$$\{f_{\nu'}\}$$

того же типа, в котором

$$f_{\nu'} \prec f_{\nu'+1},$$

то эти два упорядоченных множества можно так отобразить друг на друга, что, понимая под ν_0' определенное число ν', элементу $e_{\nu'}$ первого будет соответствовать элемент $f_{\nu_0'+\nu'}$ второго. Вследствие произвольности ν_0' мы имеем здесь бесконечно много отображений.

Развитое здесь понятие «порядкового типа» охватывает, если его таким же образом перенести на «кратно упорядоченные множества», вместе с введенным в § 1 понятием «кардинального числа» или «мощности» все «числоподобное», которое мыслимо вообще, и не допускает в этом смысле никакого дальнейшего обобщения [12]. Оно не содержит ничего произвольного, а является естественным обобщением понятия числа. *Следует особо подчеркнуть, что критерий равенства* (4) *вытекает с абсолютной необходимостью из понятия порядкового типа, а потому не допускает никакого изменения.* В непонимании этого состоит главная причина грубой ошибки, содержащейся в труде господина Д. Веронезе «Grundzüge der Geometrie» (немецкий перевод А. Шеппа. Leipzig, 1894) [³].

«Число или численность упорядоченной группы» определено там на с. 30 как полностью совпадающее с тем, что мы назвали «порядковым типом просто упорядоченного множества» («Zur Lehre vom Transfiniten». Halle, 1890, S. 68—75,— оттиск из «Ztschr. Philos. und philos. Krit.» за 1887 г. [здесь II.3]).

Однако критерий равенства г-н Веронезе считает нужным дополнить. На с. 31 он говорит: «Числа, единицы которых соответствуют однозначно и в том же порядке и из которых одно не является частью другого или не равно части другого, равны» [1].

Это определение равенства содержит круг, а потому не имеет смысла. Действительно, что в его дополнении означает «*не равно части другого*?»

Чтобы ответить на этот вопрос, прежде всего нужно знать, когда два числа равны или не равны. *Следовательно, его определение равенства* (отвлекаясь от его произвольности) *предполагает некое определение равенства, относительно которого вновь нужно знать, что означает равно или не равно, и т. д. до бесконечности.*

После того как г-н Веронезе получил таким образом зыбкий фундамент для сравнения чисел, *оставляющий место произволу*, не приходится удивляться той беспорядочности, с которой он далее оперирует со своими псевдотрансфинитными числами и приписывает им свойства, которыми они не могут обладать на основании простых соображений, поскольку

---

[1] В оригинальном итальянском издании это место (с. 27) дословно выглядит так: «Numeri le unità dei quali si corrispondono univocamente e nel medesimo ordine, e di cui l'uno non è parte o uguale ad una parte dell'altro, sono uguali».

они в придуманной им форме не имеют реального существования, а существуют лишь на бумаге. А тем самым становится понятным то бросающееся в глаза их сходство с в высшей степени абсурдными «бесконечными числами» Фонтенеля в его «Géométrie de l'Infini». Paris, 1727 [4].

Г-н В. Киллинг в «Index lectionum» Мюнстерской академии (за 1895—96 год) тоже вкратце высказал свои соображения против основ книги Веронезе [5].

§ 8. Сложение и умножение порядковых типов

Сумму (M, N) двух множеств M и N, когда последние упорядочены, можно рассматривать как упорядоченное множество, в котором порядковые соотношения элементов из M, а также порядковые соотношения элементов из N относительно друг друга сохраняются, а все элементы из M имеют более низкий ранг, чем все элементы из N. Если M' и N' — два других упорядоченных множества [без общих элементов], $M \simeq M'$ и $N \sim N'$, то и $(M, N) \simeq (M', N')$. Следовательно, порядковый тип множества (M, N) зависит только от порядковых типов $\overline{M} = \alpha$ и $\overline{N} = \beta$. Поэтому мы определяем

$$\alpha + \beta = \overline{(M, N)}. \tag{1}$$

В сумме $\alpha+\beta$ α называется «то, к чему прибавляют», а β — «прибавляемым».

Для любых трех типов легко доказывается ассоциативный закон

$$\alpha + (\beta+\gamma) = (\alpha+\beta) + \gamma. \tag{2}$$

Напротив, коммутативный закон для сложения типов вообще несправедлив. Это мы видим уже из такого примера.

Если ω — упоминавшийся в § 7 тип вполне упорядоченного множества

$$E = (e_1, e_2, \ldots, e_\nu, \ldots), \qquad e_\nu \prec e_{\nu+1},$$

то $1+\omega$ не равна $\omega+1$.

Действительно, если f — некий новый элемент, то согласно (1) имеем

$$1 + \omega = \overline{(f, E)}, \qquad \omega + 1 = \overline{(E, f)}.$$

Но множество

$$(f, E) = (f, e_1, e_2, \ldots, e_\nu, \ldots)$$

подобно множеству E, а значит,

$$1+\omega = \omega.$$

Напротив, множества E и (E, f) не подобны, поскольку первое не имеет наивысшего по рангу члена, а последнее имеет наивысший член f. Поэтому $\omega+1$ отлично от $\omega = 1+\omega$.

Из двух упорядоченных множеств M и N с типами α и β можно образовать упорядоченное множество S тем, что в N вместо каждого элемента n ставится упорядоченное множество M_n, имеющее тот же тип α, что и M, т. е.

$$\overline{M}_n = \alpha, \tag{3}$$

а об упорядочении в

$$S=\{M_n\} \tag{4}$$

принимаются такие соглашения:

1) два любых элемента из S, принадлежащие одному и тому же множеству M_n, сохраняют в S то же самое порядковое отношение, как и в M_n;

2) два любых элемента из S, которые принадлежат различным множествам M_{n_1} и M_{n_2} сохраняют в S порядковое отношение, имеющееся между n_1 и n_2 в N.

Как легко видеть, порядковый тип множества S зависит лишь от типов α и β. Мы вводим определение:

$$\alpha\cdot\beta=\overline{S}. \tag{5}$$

В этом произведении α называется *«множимым»*, а β — *«множителем»*.

Взяв за основу какое-либо *отображение* множества M на M_n, обозначим через m_n элемент, соответствующий элементу m из M_n.

Тогда можем также написать

$$S=\{m_n\}. \tag{6}$$

Если мы возьмем еще третье упорядоченное множество $P=\{p\}$ с порядковым типом $\overline{P}=\gamma$, то по (5)

$$\alpha\cdot\beta=\overline{\{m_n\}},\qquad \beta\cdot\gamma=\overline{\{n_p\}},\qquad (\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\overline{\{(m_n)_p\}},$$
$$\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)=\overline{\{m_{(n_p)}\}}.$$

Но упорядоченные множества $\{(m_n)_p\}$ и $\{m_{(n_p)}\}$ подобны и будут отображаться друг на друга, если в качестве соответствующих рассматривать их элементы $(m_n)_p$ и $m_{(n_p)}$.

Следовательно, для трех типов α, β и γ справедлив *ассоциативный закон*

$$(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma). \tag{7}$$

Из (1) и (5) легко получается и *дистрибутивный закон*

$$\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma, \tag{8}$$

однако в этой форме только тогда, когда *двучленный фактор играет роль множителя.*

Напротив, *коммутативный закон* для типов теряет общезначимость при умножении, как и при сложении.

Например, $2\cdot\omega$ и $\omega\cdot 2$ являются различными типами. Действительно, по (5)

$$2\cdot\omega=(e_1, f_1;\ e_2, f_2;\ \ldots\ ;\ e_\nu, f_\nu;\ \ldots)=\omega;$$

напротив,

$$\omega\cdot 2=(e_1, e_2, \ldots, e_\nu, \ldots\ ;\ f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots)$$

очевидно отличен от ω.

Если сравнить определения элементарных операций над кардинальными числами, данные в § 3, с установленными здесь операциями над

порядковыми типами, то легко видеть, что кардинальное число суммы двух типов равно сумме кардинальных чисел отдельных типов и что кардинальное число произведения двух типов равно произведению кардинальных чисел отдельных типов.

Следовательно, всякое получающееся из двух элементарных операций равенство между порядковыми типами остается справедливым, если в нем все типы заменить их кардинальными числами.

§ 9. Порядковый тип η множества всех рациональных чисел, которые больше 0 и меньше 1, в их естественном упорядочении [13]

Как и в § 7, под R мы понимаем систему всех рациональных чисел p/q (p и q взаимно просты), которые >0 и <1, *в их естественном упорядочении*, когда величина числа определяет его ранг. Порядковый тип множества R мы обозначаем через η:

$$\eta=\overline{R}. \tag{1}$$

Но то же самое множество мы представили там и в другом упорядочении, в котором оно было обозначено через R_0, причем ранг сначала определялся величиной $p+q$, а затем — для тех рациональных чисел, у которых $p+q$ имеет одно и то же значение,— величиной самой p/q. Множество R_0 имеет форму вполне упорядоченного множества типа ω:

$$R_0=(r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_\nu,\ \ldots), \qquad \text{где } r_\nu<r_{\nu+1}, \tag{2}$$

$$\overline{R}_0=\omega. \tag{3}$$

Поскольку R и R_0 отличаются лишь расположением элементов, то они имеют одно и то же кардинальное число, а так как очевидно, что $\overline{\overline{R}}_0=\aleph_0$, то и

$$\overline{\overline{R}}=\overline{\overline{\eta}}=\aleph_0. \tag{4}$$

Следовательно, тип η принадлежит классу типов $[\aleph_0]$.

Заметим, во-вторых, что в R не содержится ни наинизшего, ни наивысшего по рангу элементов.

В-третьих, R обладает тем свойством, что между двумя любыми его элементами располагаются по рангу его другие элементы; это свойство мы выражаем словами: R «*всюду плотно*».

Покажем теперь, что три признака типа η у R являются характеристическими, т. е. что имеет место следующая теорема:

«Если просто упорядоченное множество M удовлетворяет трем условиям:

1) $\overline{\overline{M}}=\aleph_0$,
2) M не имеет наинизшего и наивысшего по рангу элементов,
3) M всюду плотно,

то порядковый тип у M равен η, т. е.

$$\overline{M}=\eta.$$

Доказательство. В соответствии с условием 1) M можно представить в форме вполне упорядоченного множества типа ω; взяв за основу такую форму, обозначим M через M_0 и положим

$$M_0=(m_1, m_2, \ldots, m_\nu, \ldots). \tag{5}$$

Теперь нам нужно показать, что

$$M \simeq R, \tag{6}$$

т. е. нужно доказать, что M можно так отобразить на R, что порядковое отношение любых двух элементов в M такое же, как и порядковое отношение соответствующих им двух элементов в R.

Элементу r_1 в R можно поставить в соответствие элемент m_1 в M.

Элемент r_2 имеет определенное порядковое отношение к r_1 в R; ввиду условия 2) существует бесконечно много элементов m_ν из M, которые находятся в M в том же порядковом отношении к m_1, в каком находится r_2 к r_1 в R; *из них* мы выбираем тот, который в M_0 имеет наименьший индекс, скажем m_{ι_2}, и сопоставляем его r_2.

Элемент r_3 имеет определенные порядковые отношения к r_1 и r_2 в R; ввиду условий 2) и 3) существует бесконечно много элементов m_ν из M, которые находятся в тех же порядковых отношениях к m_1 и m_{ι_2}, в каких r_3 находится в R к r_1 и r_2; мы выбираем тот из них, скажем m_{ι_3}, который в M_0 имеет наименьший индекс, и сопоставляем его r_3.

Метод сопоставления мы представляем себе продолжающимся по этому закону. Если ν элементам

$$r_1, r_2, r_3, \ldots, r_\nu$$

из R сопоставлены в качестве образов определенные элементы

$$m_1, m_{\iota_2}, m_{\iota_3}, \ldots, m_{\iota_\nu}$$

из M, которые в M имеют те же самые порядковые отношения друг к другу, в каких находятся соответствующие им элементы в R, то элементу $r_{\nu+1}$ из R будет теперь сопоставляться в качестве образа тот элемент $m_{\iota_{\nu+1}}$ с наименьшим индексом из M_0, который имеет к

$$m_1, m_{\iota_2}, m_{\iota_3}, \ldots, m_{\iota_\nu}$$

то же самое отношение в M, в каком $r_{\nu+1}$ находится к $r_1, r_2, \ldots, r_\nu$ в R.

Таким образом, *всем* элементам r_ν из R мы поставили в соответствие в качестве образов элементы m_{ι_ν} из M, причем элементы m_{ι_ν} имеют в M такое же расположение, как и соответствующие элементы r_ν в R.

Нужно, однако, еще показать, что элементы m_{ι_ν} включают в себя *все элементы* m_ν из M или, что то же самое, последовательность

$$1, \iota_2, \iota_3, \ldots, \iota_\nu, \ldots$$

является лишь *перестановкой* последовательности

$$1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots$$

Это мы докажем при помощи *полной индукции*, показав, что *если* элементы $m_1, m_2, \ldots, m_\nu$ при этом отображении появились, *то то же самое произойдет и со следующим элементом* $m_{\nu+1}$.

Пусть λ столь велико, что среди элементов

$$m_1, m_{\iota_2}, m_{\iota_3}, \ldots, m_{\iota_\lambda}$$

содержатся элементы

$$m_1, m_2, \ldots, m_\nu$$

(которые по предположению подпали под отображение). Может случиться, что среди них содержится и $m_{\nu+1}$; тогда $m_{\nu+1}$ подпадает под отображение.

Если же $m_{\nu+1}$ *не* содержится среди элементов

$$m_1, m_{\iota_2}, m_{\iota_3}, \ldots, m_{\iota_\lambda},$$

то $m_{\nu+1}$ имеет в M определенное порядковое отношение к этим элементам; такое же расположение по отношению к $r_1, r_2, \ldots, r_\lambda$ имеют в R бесконечно многие элементы, и пусть среди последних, рассматриваемых в R_0, наименьший индекс будет иметь элемент $r_{\lambda+\sigma}$.

Тогда, как легко убедиться, $m_{\nu+1}$ тоже имеет к

$$m_1, m_{\iota_2}, m_{\iota_3}, \ldots, m_{\iota_{\lambda+\sigma-1}}$$

такое же отношение в M, как и $r_{\lambda+\sigma}$ к

$$r_1, r_2, \ldots, r_{\lambda+\sigma-1}$$

в R. Так как $m_1, m_2, \ldots, m_\nu$ уже подпадали под отображение, то $m_{\nu+1}$ является рассматриваемым в M_0 элементом с наименьшим индексом, имеющим это отношение к

$$m_1, m_{\iota_2}, \ldots, m_{\iota_{\lambda+\sigma-1}}.$$

Следовательно, в соответствии с принятым нами законом соотнесения

$$m_{\iota_{\lambda+\sigma}} = m_{\nu+1}.$$

Значит, и в этом случае элемент $m_{\nu+1}$ подпадает под отображение и притом так, что $r_{\lambda+\sigma}$ является соответствующим ему элементом в R.

Таким образом, мы видим, что при нашем способе соотнесения *всё множество* M будет отображено на *всё множество* R; M и R будут подобными множествами, что и требовалось доказать.

Из только что доказанной теоремы вытекают следующие утверждения:

«η является порядковым типом всех отрицательных и положительных рациональных чисел, включая нуль, в их естественном упорядочении».

«η является порядковым типом всех рациональных чисел, которые больше a и меньше b, в их естественном упорядочении; здесь a и b — два любых действительных числа и $a<b$».

«η является порядковым типом всех действительных алгебраических чисел в их естественном упорядочении».

«η является порядковым типом всех действительных алгебраических чисел, больших a и меньших b, в их естественном упорядочении; здесь a и b — два любых действительных числа и $a<b$».

Действительно, все эти упорядоченные множества удовлетворяют трем требованиям, содержащимся в нашей теореме о M (см.: Журнал Крелле, т. 77, с. 258) [I.2].

Если, далее, мы рассмотрим заданные в соответствии с определениями из § 8 множества с типами $\eta+\eta$, $\eta\eta$, $(1+\eta)\eta$, $(\eta+1)\eta$, $(1+\eta+1)\eta$, то найдем, что и для них выполняется любое из трех указанных условий. Тем самым имеем теоремы:

$$\eta+\eta=\eta, \tag{7}$$

$$\eta\eta=\eta, \tag{8}$$

$$(1+\eta)\eta=\eta, \tag{9}$$

$$(\eta+1)\eta=\eta, \tag{10}$$

$$(1+\eta+1)\eta=\eta. \tag{11}$$

Повторное применение (7) и (8) дает для всякого конечного ν

$$\eta\cdot\nu=\eta \tag{12}$$

и

$$\eta^{\nu}=\eta. \tag{13}$$

Напротив, как легко видеть, для $\nu>1$ типы $1+\eta$, $\eta+1$, $\nu\cdot\eta$, $1+\eta+1$ отличаются и друг от друга и от η. С другой стороны,

$$\eta+1+\eta=\eta, \tag{14}$$

но $\eta+\nu+\eta$ отличен от η при $\nu>1$.

Наконец, следует подчеркнуть, что

$$^{*}\eta=\eta. \tag{15}$$

§ 10. Фундаментальные последовательности, содержащиеся в трансфинитном упорядоченном множестве

Берем за основу какое-либо упорядоченное трансфинитное множество M. Каждое подмножество множества M само является упорядоченным множеством. Для изучения типа $\overline{M}$ кажутся особенно заслуживающими внимания те подмножества из M, которым соответствуют типы ω и $^{*}\omega$; мы называем их *«содержащимися в М фундаментальными последовательностями первого порядка»*, причем первые (типа ω) *«возрастающими»*, а вторые (типа $^{*}\omega$) *«убывающими»*.

Поскольку мы ограничиваемся рассмотрением фундаментальных последовательностей *первого порядка* (в дальнейших исследованиях бу-

дут рассмотрены и фундаментальные последовательности *более высоких порядков*) [6], то мы назовем их здесь просто «*фундаментальными последовательностями*».

Следовательно, «возрастающая фундаментальная последовательность» имеет вид

$$\{a_\nu\}, \text{ где } a_\nu \prec a_{\nu+1}, \tag{1}$$

а «убывающая фундаментальная последовательность» — вид

$$\{b_\nu\}, \text{ где } b_\nu \succ b_{\nu+1}. \tag{2}$$

В наших соображениях ν (а также $\varkappa$, λ, μ) всюду имеют смысл *конечного* кардинального числа или же *конечного* типа, соответственно *конечного* порядкового числа.

Две содержащиеся в M возрастающие фундаментальные последовательности $\{a_\nu\}$ и $\{a_\nu'\}$ мы назовем «*перемежающимися*», символически

$$\{a_\nu\} \parallel \{a_\nu'\}, \tag{3}$$

если для каждого элемента a_ν существуют такие элементы a_λ', что

$$a_\nu \prec a_\lambda',$$

и одновременно для каждого элемента a_ν' существуют такие элементы a_μ, что

$$a_\nu' \prec a_\mu.$$

Две содержащиеся в M убывающие фундаментальные последовательности $\{b_\nu\}$ и $\{b_\nu'\}$ называются «*перемежающимися*», символически

$$\{b_\nu\} \parallel \{b_\nu'\}, \tag{4}$$

если для каждого элемента b_ν существуют такие элементы b_λ', что

$$b_\nu \succ b_\lambda',$$

а для каждого элемента b_ν' существуют такие элементы b_μ, что

$$b_\nu' \succ b_\mu.$$

Возрастающую последовательность $\{a_\nu\}$ и убывающую $\{b_\nu\}$ мы называем «*перемежающимися*», символически

$$\{a_\nu\} \parallel \{b_\nu\}, \tag{5}$$

если: 1) для всех ν и μ

$$a_\nu \prec b_\mu$$

и 2) в M существует *самое большее один* такой элемент m_0 (а значит, или только один, или не существует совсем), что для всех ν

$$a_\nu \prec m_0 \prec b_\nu.$$

Тогда имеют место теоремы:

А. «*Если две фундаментальные последовательности являются перемежающимися с третьей, то они являются перемежающимися и одна с другой*».

B. «*Две одинаково направленные фундаментальные последовательности, из которых одна является подмножеством другой, всегда перемежаются*».

Если в M существует элемент m_0, который по отношению к возрастающей фундаментальной последовательности $\{a_\nu\}$ занимает такое положение, что

1) для всякого ν

$$a_\nu \prec m_0,$$

2) для всякого элемента m из M, который $\prec m_0$, существует такое определенное число ν_0, что

$$a_\nu \succ m \text{ для } \nu \geqslant \nu_0,$$

то мы будем называть m_0 «*предельным элементом последовательности* $\{a_\nu\}$ *в* M» и одновременно «*главным элементом множества* M».

Аналогично назовем m_0 «*главным элементом множества* M» и одновременно «*предельным элементом последовательности* $\{b_\nu\}$ *в* M», если выполняются следующие условия:

1) для всякого ν

$$b_\nu \succ m_0,$$

2) для всякого элемента m из M, который $\succ m_0$, существует такое определенное число ν_0, что

$$b_\nu \prec m \text{ для } \nu \geqslant \nu_0.$$

Фундаментальная последовательность *не может иметь более одного* предельного элемента в M; но M вообще может иметь много главных элементов.

Убеждаемся в справедливости следующих теорем:

C. «*Если фундаментальная последовательность имеет предельный элемент в* M, *то все перемежающиеся с нею фундаментальные последовательности имеют тот же предельный элемент в* M».

D. «*Если две фундаментальные последовательности* (*направленные одинаково или по-разному*) *имеют один и тот же предельный элемент в* M, *то они являются перемежающимися*».

Если M и M' — два подобных упорядоченных множества, так что

$$\overline{M} = \overline{M}', \tag{6}$$

и за основное взято какое-либо отображение этих множеств друг на друга, то, как легко видеть, справедливы следующие теоремы:

E. «*Всякой фундаментальной последовательности в* M *соответствует в качестве образа фундаментальная последовательность в* M' *и наоборот*; *всякой возрастающей последовательности соответствует возрастающая же, всякой убывающей — убывающая*; *перемежающимся фундаментальным последовательностям в* M *соответствуют в качестве образов перемежающиеся последовательности в* M' *и наоборот*».

F. «*Если фундаментальной последовательности в* M *соответствует предельный элемент в* M, *то соответствующей ей фундаментальной по-*

следовательности в M' сопоставляется предельный элемент в M' и наоборот; оба этих предельных элемента являются образами друг друга при заданном отображении».

G. «*Главным элементам множества M соответствуют в качестве образов главные элементы множества M' и наоборот*».

Если множество M состоит только из главных элементов, так что каждый его элемент является главным, то мы называем его «*плотным в себе множеством*».

Если для всякой фундаментальной последовательности в M существует предельный элемент в M, то мы называем M «*замкнутым множеством*».

Множество, одновременно «плотное в себе» и «замкнутое», называется «*совершенным множеством*» [14].

Если некоторое множество обладает одним из этих трех предикатов, то тот же самый предикат присущ и всякому подобному ему множеству; поэтому те же самые предикаты можно приписать и соответствующим порядковым типам, а тем самым существуют «*плотные в себе типы*», «*замкнутые типы*», «*совершенные типы*», а также «*всюду плотные типы*» (§ 9).

Так, например, η является «плотным в себе типом»; как показано в § 9, он является и «всюду плотным», но не «замкнутым».

Типы ω и $^*\omega$ не имеют главных элементов (главных единиц); напротив, $\omega+\nu$ и $\nu+^*\omega$ имеют каждый один главный элемент и являются «замкнутыми типами».

Тип $\omega\cdot 3$ имеет три главных элемента, но не является «замкнутым»; тип $\omega\cdot 3+\nu$ имеет три главных элемента и является «замкнутым».

§ 11. Порядковый тип θ линейного континуума X [15]

Мы обращаемся к изучению порядкового типа множества $X=\{x\}$ всех действительных чисел, которые $\geqslant 0$ и $\leqslant 1$, в их естественном упорядочении, так что для любых двух его элементов x и x'

$$x \prec x', \text{ если } x < x'.$$

Пусть обозначением этого типа будет

$$\overline{X}=\theta. \tag{1}$$

Из элементов учения о рациональных и иррациональных числах известно, что всякая фундаментальная последовательность $\{x_\nu\}$ в X имеет предельный элемент x_0 в X и что, обратно, каждый элемент x множества X является предельным элементом фундаментальной последовательности, принадлежащей X. Тем самым X является «*совершенным множеством*», а θ — «*совершенным типом*».

Но этим θ еще охарактеризован недостаточно; нам, кроме того, нужно принять во внимание следующее свойство множества X:

X содержит изученное в § 9 множество R порядкового типа η в качестве своего подмножества и *притом так, что между двумя любыми элементами x_0 и x_1 множества X расположены по порядку элементы множества R*.

Теперь будет показано, что *эти признаки, взятые вместе*, исчерпывающе характеризуют порядковый тип θ линейного континуума X, так что справедлива теорема:

«Если упорядоченное множество M таково, что оно 1) *«совершенно»,* 2) *в нем содержится множество S с кардинальным числом $\overline{\overline{S}}=\aleph_0$, которое так относится к M, что между любыми двумя элементами m_0 и m_1 множества M расположены по порядку элементы множества S, то $\overline{M}=$* $=\theta$».

Доказательство. Если бы S содержало наинизший или наивысший элементы, то ввиду 2) они являлись бы таковыми и как элементы множества M; тогда их можно было бы удалить из S без того, чтобы это множество потеряло бы свое отношение к M, выраженное в 2).

Поэтому мы с самого начала полагаем S без наинизшего и наивысшего элементов; тогда по § 9 S имеет порядковый тип η.

Действительно, так как S является частью M, то по 2) между любыми двумя элементами s_0 и s_1 множества S расположены по порядку и другие элементы из S. Кроме того, согласно 2) мы имеем $\overline{\overline{S}}=\aleph_0$.

Поэтому множества S и R *«подобны»*,

$$S \simeq R. \qquad (2)$$

Мы выбираем какое-либо *«отображение»* множества R на S и утверждаем, что оно порождает одновременно определенное *«отображение»* X на M и притом такое, что:

всем элементам множества X, одновременно принадлежащим множеству R, будут соответствовать в качестве образов те элементы из M, которые одновременно являются элементами множества S и в выбранном отображении множества R на S соответствуют этим элементам.

Если же x_0 является элементом из X, не принадлежащим R, то его можно рассматривать как предельный элемент некоторой фундаментальной последовательности $\{x_\nu\}$, содержащейся в X, которую можно заменить связанной с нею фундаментальной последовательностью $\{r_{\varkappa_\nu}\}$, содержащейся в R. Последней в качестве образа соответствует фундаментальная последовательность $\{s_{\lambda_\nu}\}$ в S и M, которая ввиду (1) будет иметь некоторый предельный элемент m_0 в M, не принадлежащий S (F, § 10). Этот элемент m_0 в M (остающийся тем же самым, если вместо фундаментальных последовательностей $\{x_\nu\}$ и $\{r_{\varkappa_\nu}\}$ взять другие, имеющие тот же предельный элемент x_0 в X (E, C, D в § 10)) оказывается образом элемента x_0 в X. Обратно, всякому элементу m_0 из M, не содержащемуся в S, отвечает вполне определенный элемент x_0 из X, не принадлежащий R, образом которого является m_0.

Таким образом, между X и M установлено взаимно однозначное соответствие, относительно которого нужно еще показать, что оно дает «отображение» этих множеств.

Это прежде всего верно для элементов множеств X и M, которые одновременно принадлежат R, соответственно S.

Сравним теперь элемент r из R с некоторым элементом x_0 из X, не принадлежащим R; пусть соответствующими элементами из M будут s и m_0.

Если $r \prec x_0$, то существует возрастающая фундаментальная последовательность $\{r_{\varkappa_\nu}\}$, имеющая предельным элементом x_0, и начиная с некоторого ν_0 имеем

$$r \prec r_{\varkappa_\nu} \text{ для } \nu \geqslant \nu_0.$$

Образом последовательности $\{r_{\varkappa_\nu}\}$ в M является возрастающая фундаментальная последовательность $\{s_{\lambda_\nu}\}$, которая имеет предельным элементом m_0 в M, и (§ 10), во-первых, имеем $s_{\lambda_\nu} \prec m_0$ для всякого ν, а во-вторых, $s \prec s_{\lambda_\nu}$ для $\nu \geqslant \nu_0$, а потому (§ 7) $s \prec m_0$.

Если $r \succ x_0$, то аналогично заключаем, что $s \succ m_0$.

Наконец, если мы рассмотрим два элемента x_0 и x_0', не принадлежащие R, и соответствующие им элементы m_0 и m_0' в M, то аналогичное соображение показывает, что если $x_0 \prec x_0'$, то $m_0 \prec m_0'$.

Тем самым доказательство подобия множеств X и M завершено, а потому

$$\overline{M} = \theta.$$

§ 12. Вполне упорядоченные множества

Особое место среди просто упорядоченных множеств занимают *вполне упорядоченные множества*. Их порядковые типы, которые мы называем «*порядковыми числами*», образуют естественный материал для точного определения высших трансфинитных кардинальных чисел или мощностей, определения, вполне соответствующего тому, какое мы дали для наименьшего трансфинитного числа алеф-нуль при помощи системы всех конечных чисел ν (§ 6).

«*Вполне упорядоченным*» мы называем просто упорядоченное множество F (§ 7), если его элементы f, начиная с наинизшего f_1, *появляются в определенной последовательности* так, что выполняются два таких условия:

I. «В F существует наинизший по рангу элемент f_1».

II. «Если F' — какое-либо подмножество множества F и F обладает одним или несколькими элементами более высокого ранга, чем все элементы из F', то существует элемент f' множества F, который непосредственно следует за совокупностью F', так что в F не существует элемента, который по рангу расположен между F' и f'»[2] [16].

[2] Это определение «вполне упорядоченного» множества, если отвлечься от словесной формы, полностью совпадает с определением, введенным в «Math. Ann.», Bd. 21, S. 548 (Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, S. 4) [здесь с. 67].

В частности, за каждым отдельным элементом f множества M, *если он не наивысший*, следует определенный другой элемент f', как *непосредственно более высокий по рангу*. Это вытекает из условия II, если вместо F' подставить отдельный элемент f. Далее, если в F содержится, например, бесконечная последовательность идущих друг за другом элементов

$$e' \prec e'' \prec e''' \prec \ldots \prec e^{(\nu)} \prec e^{(\nu+1)} \ldots,$$

однако так, что в F еще существуют элементы, имеющие более высокий ранг, *чем все* $e^{(\nu)}$, то по условию II с заменой в нем F' совокупностью $\{e^{(\nu)}\}$ существует такой элемент f', что не только

$$f' \succ e^{(\nu)}$$

для всех значений ν, но и не существует в F *такого элемента* g, который удовлетворяет двум условиям:

$$g \prec f', \qquad g \succ e^{(\nu)}$$

для всех значений ν.

Так, к примеру, три множества

$$(a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots),$$

$$(a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots, b_1, b_2, \ldots, b_\mu, \ldots),$$

$$(a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots, b_1, b_2, \ldots, b_\mu, c_1, c_2, c_3),$$

где

$$a_\nu \prec a_{\nu+1} \prec b_\mu \prec b_{\mu+1} \prec c_1 \prec c_2 \prec c_3,$$

являются *вполне упорядоченными*. Два первых из них не имеют наивысшего элемента, у третьего наивысший элемент c_3; у второго и третьего непосредственно за всеми элементами a_ν следует b_1, в третьем за всеми элементами a_ν и b_μ непосредственно следует c_1.

В последующем мы намереваемся распространить на группы элементов введенные в § 7 знаки $\prec$ и $\succ$, служившие там для выражения порядкового отношения двух любых элементов, так что формулы

$$M \prec N, \qquad M \succ N$$

будут выражать то, что в предложенном упорядочении все элементы множества M имеют более низкий, соответственно более высокий ранг, чем все элементы множества N.

A. *«Всякое подмножество F_1 вполне упорядоченного множества F имеет самый низкий элемент».*

Доказательство. Если наинизший элемент f_1 множества F принадлежит F_1, то он одновременно является и наинизшим элементом множества F_1.

В противном случае пусть F' есть совокупность всех элементов множества F, которые имеют более низкий ранг, чем все элементы множества F_1. Тогда именно вследствие этого никакой элемент множества F не находится между F' и F_1.

Поэтому если f' непосредственно следует (согласно II) за F', то он необходимо принадлежит F_1 и имеет в нем наинизший ранг.

B. *«Если просто упорядоченное множество F обладает тем свойством, что как F, так и всякое его подмножество имеют наинизший элемент, то F является вполне упорядоченным множеством».*

Доказательство. Так как F имеет наинизший элемент, то условие I выполнено.

Пусть F' — такое подмножество множества F, что в F существует один или несколько элементов $\succ F'$; пусть F_1 — совокупность всех этих элементов и f' — наинизший элемент множества F_1. Тогда, очевидно, f' является элементом множества F, непосредственно следующим за F'. Тем самым выполнено и условие II, а потому F является вполне упорядоченным множеством.

C. *«Всякое подмножество F' вполне упорядоченного множества F является вполне упорядоченным множеством».*

Доказательство. По теореме A как F', так и всякое подмножество F'' множества F' (являющееся одновременно подмножеством множества F) имеют самый низкий элемент. Поэтому по теореме B F' является вполне упорядоченным множеством.

D. *«Всякое множество G, подобное вполне упорядоченному множеству F, тоже является вполне упорядоченным».*

Доказательство. Если M — множество, содержащее наинизший элемент, то и всякое подобное ему множество имеет наинизший элемент, как это следует непосредственно из определения подобия (§ 7).

Поскольку же в данном случае должно быть $G \simeq F$ и F, как вполне упорядоченное множество, обладает наинизшим элементом, то это же должно иметь место и для G.

Равным образом всякое подмножество G' множества G имеет наинизший элемент; действительно, при отображении G на F множеству G' соответствует в качестве образа подмножество F' в F, так что

$$G' \simeq F'.$$

Но по теореме A множество F' имеет наименьший элемент, а потому таковой имеет и G', а значит, по теореме B множество G является вполне упорядоченным.

E. *«Если во вполне упорядоченное множество G вместо его элементов g будут подставлены вполне упорядоченные множества с условием, что для вполне упорядоченных множеств F_g и $F_{g'}$, подставляемых вместо двух элементов g и g' отношение $g \prec g'$ влечет $F_g \prec F_{g'}$, то множество H, полученное объединением элементов всех множеств F_g, будет вполне упорядоченным».*

Доказательство. Как H, так и всякое подмножество H_1 множества H имеют наинизший элемент, что по теореме B характеризует H как вполне упорядоченное множество. Действительно, если g_1 является наинизшим элементом множества G, то наинизший элемент у F_{g_1} является одновременно и наинизшим элементом у H. Далее, если перед нами некоторое подмножество H_1 множества H, то его элементы при-

надлежат определенным множествам F_g, которые взятые вместе образуют подмножество подобного G вполне упорядоченного множества $\{F_g\}$, состоящего из элементов F_g; и если, например, F_{g_0} является наинизшим элементом этого подмножества, то наинизший элемент содержащегося в F_{g_0} подмножества множества H одновременно является наинизшим элементом у H_1.

§ 13. Отрезки вполне упорядоченных множеств

Если f является каким-либо элементом вполне упорядоченного множества F, *отличным от начального элемента* f_1, то множество A всех элементов из F, которые $\prec f$, будем называть «*отрезком множества* F» и притом отрезком множества F, *определяемым элементом* f. Напротив, множество R всех остальных элементов из F, *включая* f, будет называться «*остатком множества* F» и притом остатком множества F, *определяемым элементом* f. По теореме C (§ 12) множества A и R являются вполне упорядоченными, и согласно § 8 и 12 мы можем написать

$$F=(A,\ R), \tag{1}$$

$$R=(f,\ R'), \tag{2}$$

$$A\prec R. \tag{3}$$

R' представляет собой часть множества R, следующую за начальным элементом f, и сводится к 0, если R, помимо f, не имеет других элементов.

Если в виде примера мы возьмем вполне упорядоченное множество

$$F=(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_\nu,\ \ldots,\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_\mu,\ \ldots,\ c_1,\ c_2,\ c_3),$$

то в нем определяются: элементом a_3 отрезок

$$(a_1,\ a_2)$$

и соответствующий остаток

$$(a_3,\ a_4,\ \ldots,\ a_\nu,\ \ldots,\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_\mu,\ \ldots,\ c_1,\ c_2,\ c_3);$$

элементом b_1 — отрезок

$$(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_\nu,\ \ldots)$$

и соответствующий остаток

$$(b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_\mu,\ \ldots,\ c_1,\ c_2,\ c_3);$$

элементом c_2 — отрезок

$$(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_\nu,\ \ldots,\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_\mu,\ \ldots c_1)$$

и соответствующий остаток

$$(c_2,\ c_3).$$

Если A и A' — два отрезка множества F, f и f' — определяющие их элементы, и

$$f'\prec f,$$

то и A' является отрезком множества A. В этом случае мы называем A' *меньшим*, а A *бóльшим* отрезками множества F:

$$A' < A.$$

В соответствии с этим о каждом отрезке A множества F мы тоже можем сказать, что он меньше самого F:

$$A < F.$$

А. «*Если два подобных вполне упорядоченных множества F и G отображаются друг на друга, то каждому отрезку A множества F соответствует подобный ему отрезок B множества G, а каждому отрезку B множества G — подобный ему отрезок множества F, и элементы f и g из F и G, которыми определяются соответствующие друг другу отрезки A и B, тоже соответствуют друг другу при этом отображении*» [17].

Доказательство. Если два подобных просто упорядоченных множества M и N отображены друг на друга, m и n — два соответствующих элемента и M' — множество всех элементов из M, которые $\prec m$, а N' — множество всех элементов из N, которые $\prec n$, то при этом отображении M' и N' соответствуют друг другу. Действительно, каждый элемент m' множества M, который $\prec m$, должен (§ 7) соответствовать элементу n' множества N, который $\prec n$, и наоборот.

Если эту общую теорему мы применим к вполне упорядоченным множествам F и G, то получим то, что нам требовалось доказать.

В. «*Вполне упорядоченное множество F не подобно никакому своему отрезку*».

Доказательство. Если мы предположим, что $F \simeq A$, то это означает для нас, что установлено отображение F на A. Тогда по теореме А отрезку A множества F соответствует в качестве образа отрезок $A' \simeq F$ отрезка A, так что $A' \simeq A$. Следовательно, было бы также $A' \simeq F$ и $A' < A$. Аналогично из A' получился бы меньший отрезок A'' множества F такой, что $A'' \simeq F$ и $A'' < A'$ и т. д.

Тем самым мы получили бы *необходимо бесконечную последовательность*

$$A > A' > A'' \ldots A^{(\nu)} > A^{(\nu+1)} \ldots$$

из становящихся все меньше и меньше отрезков множества F, каждый из которых подобен множеству F.

Если через $f, f', f'', \ldots, f^{(\nu)}, \ldots$ мы обозначим элементы множества F, определяющие эти отрезки, то было бы

$$f \succ f' \succ f'' \succ \ldots f^{(\nu)} \succ f^{(\nu+1)} \ldots$$

Следовательно, налицо было бы *бесконечное* подмножество

$$(f, f', f'', \ldots, f^{(\nu)}, \ldots)$$

множества F, в котором *никакой элемент не имеет наинизшего ранга*.

Но такие подмножества у F невозможны ввиду теоремы А из § 12. Следовательно, предположение об отображении множества F на его

отрезок приводит к противоречию, а потому F не подобно никакому своему отрезку.

Хотя по теореме В вполне упорядоченное множество F не подобно никакому своему *отрезку*, тем не менее, если F *бесконечно*, всегда существуют *другие подмножества* множества F, которым подобно F. Так, например, множество

$$F = (a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots)$$

подобно каждому его остатку

$$(a_{\varkappa+1}, a_{\varkappa+2}, \ldots, a_{\varkappa+\nu}, \ldots).$$

Поэтому имеет смысл то, что наряду с теоремой В мы можем установить еще и следующую:

С. «*Вполне упорядоченное множество F не подобно никакому подмножеству любого из его отрезков*».

Доказательство. Предположим, что F' — некоторое подмножество отрезка A множества F и что $F' \simeq F$. Вообразим какое-либо отображение множества F на F'. Тогда по теореме А отрезку A множества F будет соответствовать в качестве образа отрезок F'' вполне упорядоченного множества F'; этот отрезок будет определяться элементом f' множества F'. Одновременно f' является элементом отрезка A и определяет некоторый отрезок A' отрезка A, подмножеством которого является F''.

Поэтому допущение существования такого подмножества F' отрезка A множества F, что $F' \sim F$, приводит нас к такому подмножеству F'' отрезка A' множества A, что $F'' \simeq A$.

То же рассуждение приводит к подмножеству F''' отрезка A'' множества A' такому, что $F''' \simeq A'$. И, продолжая таким образом, мы получим, как и в доказательстве теоремы В, необходимо бесконечную последовательность становящихся все меньше отрезков множества F

$$A > A' > A'' > \ldots > A^{(\nu)} > A^{(\nu+1)} > \ldots,$$

а тем самым бесконечную последовательность определяющих эти отрезки элементов

$$f \succ f' \succ f'' \succ \ldots \succ f^{(\nu)} \succ f^{(\nu+1)} \succ \ldots,$$

в которой нет наинизшего элемента, что невозможно по теореме А из § 12. Поэтому не существует никакого подмножества F' отрезка A множества F такого, что $F' \simeq F$.

D. «*Два различных отрезка A и A' вполне упорядоченного множества F не подобны друг другу*».

Доказательство. Если $A' < A$, то A' является и отрезком вполне упорядоченного множества A, а потому по теореме В не может быть подобным A.

Е. «*Два подобных вполне упорядоченных множества F и G можно отобразить друг на друга лишь единственным способом*».

Доказательство. Пусть в предположении двух различных отображений множества F на G f будет элементом из F, которому при

этих двух отображениях соответствуют в качестве образов различные элементы g и g' в G. Пусть A — отрезок множества F, определяемый посредством f, а B и B' — отрезки множества G, определяемые при помощи g и g'. По теореме A должно быть как $A \simeq B$, так и $A \simeq B'$, а потому было бы и $B \simeq B'$, что противоречит теореме D.

F. «*Если F и G два вполне упорядоченных множества, то отрезок A множества F может иметь самое большее один подобный ему отрезок B в G*».

Доказательство. Если бы отрезок A множества F имел два подобных ему отрезка B и B' в G, то B и B' были бы подобны, что невозможно по теореме D.

G. «*Если A и B — подобные отрезки двух вполне упорядоченных множеств F и G, то для каждого меньшего отрезка $A' < A$ множества F существует подобный ему отрезок $B' < B$ множества G, а для каждого меньшего отрезка $B' < B$ множества G — подобный ему отрезок $A' < A$ множества F*».

Доказательство следует из теоремы A, когда она применяется к подобным множествам A и B.

H. «*Если A и A' — два отрезка вполне упорядоченного множества F, B и B' — подобные им отрезки вполне упорядоченного множества G и $A' < A$, то и $B' < B$*».

Доказательство получается из теорем F и G.

J. «*Если отрезок B вполне упорядоченного множества G не подобен никакому отрезку вполне упорядоченного множества F, то как всякий отрезок $B' > B$ множества G, так и само G не подобны никакому отрезку множества F, ни самому F*».

Доказательство получается из теоремы G.

K. «*Если для всякого отрезка A вполне упорядоченного множества F существует подобный ему отрезок B другого вполне упорядоченного множества G и, обратно, для всякого отрезка B множества G существует подобный ему отрезок A множества F, то $F \simeq G$*».

Доказательство. F и G мы можем отобразить друг на друга по следующему закону.

Наинизший элемент f_1 из F соответствует наинизшему элементу g_1 из G. Если $f > f_1$ — какой-либо другой элемент множества F, то он определяет некий отрезок A множества F; ему по предположению соответствует определенный подобный отрезок B множества G. Пусть элемент g множества G, определяющий отрезок B, будет образом элемента f. И если g — любой элемент множества G, который $> g_1$, то он определяет некий отрезок B множества G и ему по предположению соответствует подобный отрезок A множества F. Пусть образом элемента g будет элемент f, определяющий отрезок A.

Легко видеть, что определенное таким образом взаимно однозначное соответствие между F и G является *отображением* в смысле § 7.

Действительно, если f и f' — два любых элемента из F, g и g' — соответствующие им элементы из G, A и A' — отрезки, определяемые при помощи f и f', B и B' — отрезки, определяемые при помощи g и g', и,

например,

$$f' \prec f,$$

то

$$A' < A;$$

поэтому по теореме H и

$$B' < B,$$

а значит,

$$g' \prec g.$$

L. *«Если для всякого отрезка A вполне упорядоченного множества F существует подобный ему отрезок B вполне упорядоченного множества G, но, напротив, имеется по крайней мере один отрезок множества G, для которого не имеется подобного ему отрезка множества F, то существует определенный отрезок B_1 множества G такой, что $B_1 \simeq F$».*

Доказательство. Рассматриваем совокупность всех отрезков множества G, для которых не существует подобных отрезков в F; среди них можно указать *наименьший* отрезок, который мы обозначим через B_1. Последнее вытекает из того, что по теореме A из § 12 множество всех элементов, определяющих эти отрезки, обладает наинизшим элементом. Отрезок B_1 множества G, определяемый последним, и будет наименьшим из этой совокупности. По теореме J *всякий* отрезок множества G, который $> B_1$, таков, что для него в F не найдется подобного ему отрезка; поэтому все отрезки B множества G, которым соответствуют подобные отрезки множества F, должны быть $< B_1$, и притом каждому отрезку $B < B_1$ соответствует подобный ему отрезок A множества F, поскольку как раз B_1 является наименьшим из тех отрезков множества G, которым не соответствуют подобные отрезки в F.

Тем самым для каждого отрезка A множества F существует подобный ему отрезок B множества B_1 и для каждого отрезка B множества B_1 имеется подобный ему отрезок A множества F; поэтому по теореме K

$$F \simeq B_1.$$

M. *«Если вполне упорядоченное множество G содержит по крайней мере один отрезок, для которого во вполне упорядоченном множестве F не имеется подобного ему отрезка, то всякий отрезок A множества F должен иметь подобный ему отрезок B в G».*

Доказательство. Пусть B_1 — наименьший отрезок в G из всех тех, для которых в F нет подобных (см. доказательство теоремы L). Если бы можно было задать отрезки в F, которым не соответствовали бы подобные отрезки в G, то и среди них был бы наименьший, который мы обозначим через A_1. Тогда для каждого отрезка множества A_1 существовал бы подобный отрезок множества B_1 и для каждого отрезка множества B_1 — подобный отрезок множества A_1. Поэтому по теореме K было бы

$$B_1 \simeq A_1.$$

Но это противоречит тому, что для B_1 не имеется подобного ему отрезка

в F. Поэтому в F нельзя задать отрезок, которому не соответствует подобный ему отрезок в G.

N. «*Если F и G — два любых вполне упорядоченных множества, то*: 1) *или F и G подобны друг другу*, 2) *или существует определенный отрезок B_1 множества G, который подобен множеству F*, 3) *или существует определенный отрезок A_1 множества F, который подобен множеству G; каждый из этих трех случаев исключает возможность двух других*».

Доказательство. Поведение F по отношению к G может быть *трояким*:

1) всякому отрезку A множества G соответствует подобный отрезок B множества G и, наоборот, всякому отрезку B множества G соответствует подобный отрезок A множества F;

2) всякому отрезку A множества F соответствует подобный отрезок B множества G; напротив, существует по крайней мере один отрезок множества G, которому не соответствует подобный ему отрезок в F;

3) всякому отрезку B множества G соответствует подобный отрезок A множества F; напротив, существует по крайней мере один отрезок множества F, которому не соответствует подобный ему отрезок в G.

Случай, когда существует как отрезок множества F, которому не соответствует подобный ему в G, так и отрезок множества G, которому не соответствует подобный ему в F, невозможен; он исключается теоремой M.

По теореме K в *первом* случае

$$F \simeq G.$$

По теореме L во *втором* случае существует определенный отрезок B_1 множества G такой, что

$$B_1 \simeq F,$$

а в *третьем* — существует определенный отрезок A_1 множества F такой, что

$$A_1 \simeq G.$$

Однако не может быть одновременно $F \simeq G$ и $F \simeq B_1$, так как тогда было бы и $G \simeq B_1$, вопреки теореме B; на том же основании не может быть одновременно $F \simeq G$ и $G \simeq A_1$.

Но невозможно и одновременное наличие $F \simeq B_1$ и $G \simeq A_1$. Действительно, по теореме A из $F \simeq A_1$ вытекало бы существование такого отрезка B_1' множества B_1, что $A_1 \simeq B_1'$. Поэтому тогда было бы и $G \simeq B_1'$ вопреки теореме B.

O. «*Если подмножество F' вполне упорядоченного множества F не подобно никакому отрезку множества F, то оно подобно самому F*».

Доказательство. По теореме C из § 12 F' является вполне упорядоченным множеством. Если бы F' не было подобно ни отрезку множества F, ни самому F, то по теореме N существовал бы отрезок F_1' множества F', который был бы подобен F. Но F_1' является подмножеством того отрезка A множества F, который определяется тем же

элементом, что и отрезок F_1' множества F'. Следовательно, множество F должно было бы быть подобным своему отрезку, что противоречит теореме C.

§ 14. Порядковые числа вполне упорядоченных множеств

В соответствии с § 7 всякое просто упорядоченное множество имеет определенный *порядковый тип* $\overline{M}$; он является тем общим понятием, которое получается из M, если при сохранении расположения его элементов отвлечься от свойств последних, так что из них получаются чистые единицы, находящиеся по отношению друг к другу в некотором определенном порядковом расположении. *Всем подобным друг другу множествам и только им соответствует один и тот же порядковый тип.*

Порядковый тип вполне упорядоченного множества F мы называем соответствующим ему «*порядковым числом*».

Если α и β — два любых порядковых числа, то они ведут себя по отношению друг к другу *трояко*. А именно если F и G — два таких вполне упорядоченных множества, что

$$\overline{F}=\alpha, \qquad \overline{G}=\beta,$$

то по теореме N из § 13 возможны три взаимно исключающих друг друга случая:

1) $$F\simeq G;$$

2) существует такой определенный отрезок B_1 множества G, что

$$F\simeq B_1;$$

3) существует такой определенный отрезок A_1 множества F, что

$$G\simeq A_1.$$

Легко видеть, что каждый из этих трех случаев остается прежним, если F и G будут заменены подобными им множествами F' и G'. Тем самым мы имеем и три отношения типов α и β друг к другу.

В первом случае $\alpha=\beta$; *во втором случае мы скажем, что* $\alpha<\beta$, *а в третьем, что* $\alpha>\beta$.

Следовательно, имеем теорему:

A. «*Если* α *и* β — *два произвольных порядковых числа, то или* $\alpha=\beta$, *или* $\alpha<\beta$, *или* $\alpha>\beta$».

Из определения отношений «меньше» или «больше» легко следует:

B. «*Если имеются три порядковых числа* α, β, γ *и* $\alpha<\beta$, $\beta<\gamma$, *то* $\alpha<\gamma$».

Значит, порядковые числа в их *расположении по величине* образуют просто упорядоченное множество; позднее мы покажем, что оно является *вполне упорядоченным* множеством.

Определенные в § 8 операции *сложения* и *умножения* порядковых типов произвольных просто упорядоченных множеств применимы, естественно, и к порядковым числам.

Если $\alpha=\overline{F}$, $\beta=\overline{G}$, где F и G — вполне упорядоченные множества, то [по (1) из § 8]

$$\alpha+\beta=\overline{(F, G)}. \qquad (1)$$

Очевидно, что сумма множеств (F, G) также является вполне упорядоченным множеством; следовательно, имеем теорему:

С. «*Сумма двух порядковых чисел также является порядковым числом*».

В сумме $\alpha+\beta$ число α называется «то, к чему прибавляют», а β — «прибавляемым».

Так как F является *отрезком* множества (F, G), то всегда

$$\alpha<\alpha+\beta. \qquad (2)$$

Напротив, G является не *отрезком*, а *остатком* множества (F, G), а потому, как мы видели в § 13, может быть подобным множеству (F, G); если этого нет, то G по теореме О § 13 подобно некоторому отрезку множества (F, G). Следовательно,

$$\beta\leqslant\alpha+\beta. \qquad (3)$$

Тем самым имеем

D. «*Сумма двух порядковых чисел всегда больше того числа, к которому прибавляют и, напротив, больше прибавляемого или равна ему. Если $\alpha+\beta=\alpha+\gamma$, то отсюда всегда следует, что $\beta=\gamma$*».

Вообще $\alpha+\beta$ и $\beta+\alpha$ не равны. Напротив, если γ — третье порядковое число, то

$$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma). \qquad (4)$$

Следовательно [см. § 8],

Е. «*Для сложения порядковых чисел справедлив ассоциативный закон*».

Если в множество G типа β подставить вместо *каждого* элемента g любое множество F_g типа α, то по теореме Е § 12 получится *вполне упорядоченное* множество H, тип которого полностью определяется типами α и β; этот тип будет называться *произведением* $\alpha\cdot\beta$:

$$\overline{F}_g=\alpha, \qquad (5)$$

$$\alpha\cdot\beta=\overline{H}. \qquad (6)$$

F. «*Произведение двух порядковых чисел тоже является порядковым числом*».

В произведении $\alpha\cdot\beta$ число α называется «*множимым*», а β — «*множителем*».

Вообще $\alpha\cdot\beta$ и $\beta\cdot\alpha$ не равны. Однако имеем (§ 8)

$$(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma), \qquad (7)$$

т. е.

G. «*Для умножения порядковых чисел справедлив ассоциативный закон*».

Дистрибутивный закон вообще справедлив лишь в следующем виде [см. (8) из § 8]:

$$\alpha \cdot (\beta+\gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma. \qquad (8)$$

Относительно величины произведения справедлива, как легко видеть, теорема

Н. «*Если множитель больше* 1, *то произведение двух порядковых чисел всегда больше множимого и, напротив, больше или равно, чем множитель. Если* $\alpha\beta=\alpha\gamma$, *то всегда* $\beta=\gamma$».

С другой стороны, очевидно, что

$$\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha. \qquad (9)$$

Здесь добавляется еще операция *вычитания*. Если α и β — два порядковых числа и $\alpha<\beta$, то всегда существует определенное порядковое число, которое мы обозначим через $\beta-\alpha$ и которое удовлетворяет равенству

$$\alpha+(\beta-\alpha)=\beta. \qquad (10)$$

Действительно, если $\overline{G}=\beta$, то G имеет такой отрезок B, что $\overline{B}=\alpha$; соответствующий остаток мы обозначим через S и получим

$$G=(B, S)$$

и

$$\beta=\alpha+\overline{S},$$

а значит,

$$\beta-\alpha=\overline{S}. \qquad (11)$$

Определенность разности $\beta-\alpha$ проистекает из того, что отрезок B множества G является полностью определенным, а потому и S задается однозначно. Подчеркнем такие вытекающие из (4), (8) и (10) формулы:

$$(\gamma+\beta)-(\gamma+\alpha)=\beta-\alpha, \qquad (12)$$

$$\gamma(\beta-\alpha)=\gamma\beta-\gamma\alpha \ [18]. \qquad (13)$$

Существенно то, что всегда можно суммировать и бесконечное число порядковых чисел так, что их сумма является определенным порядковым числом, зависящим от порядка следования ее слагаемых.

Если, например,

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu, \ldots$$

произвольная просто бесконечная последовательность порядковых чисел и мы имеем

$$\beta_\nu=\overline{G}_\nu, \qquad (14)$$

то [теорема Е из § 12] и

$$G=(G_1, G_2, \ldots, G_\nu, \ldots) \qquad (15)$$

является вполне упорядоченным множеством, порядковое число которого β представляет собой сумму чисел β_ν. Имеем, следовательно,

$$\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu+\ldots=\overline{G}=\beta \qquad (16)$$

и, как легко вытекает из определения произведения, всегда имеет место

$$\gamma\cdot(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu+\ldots)=\gamma\cdot\beta_1+\gamma\cdot\beta_2+\ldots+\gamma\beta_\nu+\ldots \tag{17}$$

Если мы положим

$$\alpha_\nu=\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu, \tag{18}$$

то

$$\alpha_\nu=\overline{(G_1, G_2, \ldots, G_\nu)}. \tag{19}$$

Здесь

$$\alpha_{\nu+1}>\alpha_\nu, \tag{20}$$

и по (10) мы можем выразить числа β_ν через числа α_ν так:

$$\beta_1=\alpha_1, \qquad \beta_{\nu+1}=\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu. \tag{21}$$

Поэтому последовательность

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$$

представляет собой *произвольную* последовательность порядковых чисел, удовлетворяющих *условию* (20); мы называем ее «*фундаментальной последовательностью*» порядковых чисел (§ 10). Между нею и β имеет место соотношение, которое можно выразить следующим образом:

1) $\beta>\alpha_\nu$ для каждого ν, так как множество $(G_1, G_2, \ldots, G_\nu)$, порядковым числом которого является α_ν, представляет собой некий *отрезок* множества G, имеющего порядковое число β;

2) если β' — *любое* порядковое число $<\beta$, то начиная с некоторого ν всегда

$$\alpha_\nu>\beta'.$$

Действительно, так как $\beta'<\beta$, то существует отрезок B' множества G типа β'. Элемент множества G, определяемый этим отрезком, должен принадлежать одному из подмножеств G_ν, которое мы обозначим через G_{ν_0}. Но тогда B' — тоже отрезок множества $(G_1 G_2, \ldots, G_{\nu_0})$, а значит, $\beta'<\alpha_{\nu_0}$, и поэтому

$$\alpha_\nu>\beta'$$

для $\nu\geqslant\nu_0$.

Тем самым β является порядковым числом, непосредственно следующим по величине за всеми α_ν. Поэтому мы будем называть его «*пределом*» чисел α_ν для возрастающего индекса ν и обозначать через $\operatorname*{Lim}_\nu \alpha_\nu$, так что по (16) и (21)

$$\operatorname*{Lim}_\nu \alpha_\nu=\alpha_1+(\alpha_2-\alpha_1)+\ldots+(\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu)+\ldots \tag{22}$$

Предыдущее мы можем высказать в виде следующей теоремы:

I. «*Всякой фундаментальной последовательности $\{\alpha_\nu\}$ порядковых чисел соответствует порядковое число $\operatorname*{Lim}_\nu \alpha_\nu$, которое непосредственно следует по величине за всеми α_ν; оно представляется формулой* (22)».

Если понимать под γ какое-либо постоянное порядковое число, то

с помощью формул (12), (13) и (17) легко доказать теоремы, содержащиеся в таких формулах:

$$\operatorname*{Lim}_{\nu}(\gamma+\alpha_\nu)=\gamma+\operatorname*{Lim}_{\nu}\alpha_\nu, \tag{23}$$

$$\operatorname*{Lim}_{\nu}\gamma\cdot\alpha_\nu=\gamma\cdot\operatorname*{Lim}_{\nu}\alpha_\nu. \tag{24}$$

В § 7 мы уже упомянули, что все просто упорядоченные множества заданного *конечного* кардинального числа ν имеют один и тот же порядковый тип. Здесь это можно доказать следующим образом [19]. Всякое просто упорядоченное множество *конечного* кардинального числа является *вполне упорядоченным* множеством, ибо оно, как и всякое его подмножество, должно иметь наименьший элемент, что по теореме B из § 12 и есть признак вполне упорядоченности множества.

Поэтому типы конечных просто упорядоченных множеств суть не что иное, как *конечные порядковые числа.* Однако двум различным порядковым числам α и β не может соответствовать одно и то же *конечное* кардинальное число ν. Например, если $\alpha<\beta$ и $\overline{G}=\beta$, то, как мы знаем, существует отрезок B множества G такой, что $\overline{B}=\alpha$. Следовательно, в противном случае множество G и его подмножество B имели бы одно и то же кардинальное число, что невозможно по теореме C из § 6.

Совсем иначе обстоит дело с *трансфинитными порядковыми числами*; для одного и того же трансфинитного кардинального числа $\mathfrak{a}$ существует *бесконечно много* порядковых чисел, образующих единую связную систему, которую мы назовем «*числовым классом* $Z(\mathfrak{a})$». Она является частью класса типов $[\mathfrak{a}]$ (§ 7).

Очередным предметом нашего рассмотрения является числовой класс $Z(\aleph_0)$, который мы назовем *вторым числовым классом.*

В этой связи под *первым числовым классом* мы понимаем совокупность $\{\nu\}$ всех *конечных* порядковых чисел.

§ 15. Числа второго числового класса $Z(\aleph_0)$

Второй числовой класс $Z(\aleph_0)$ есть совокупность $\{\alpha\}$ всех порядковых типов α вполне упорядоченных множеств с кардинальным числом $\aleph_0$ (§ 6).

A. «*Второй числовой класс имеет наименьшее число* $\omega=\operatorname*{Lim}_{\nu}\nu$».

Доказательство. Под ω мы понимаем тип вполне упорядоченного множества

$$F_0=(f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_\nu,\ \ldots), \tag{1}$$

где ν пробегает все конечные порядковые числа и

$$f_\nu<f_{\nu+1}. \tag{2}$$

Следовательно (§ 7),

$$\omega=\overline{F}_0 \tag{3}$$

и

$$\overline{\overline{\omega}}=\aleph_0. \tag{4}$$

Поэтому ω является числом второго числового класса и притом *наименьшим*. Действительно, если γ — какое-либо порядковое число $<\omega$, то оно должно быть (§ 14) типом некоторого *отрезка* множества F_0. Но F_0 имеет лишь отрезки

$$A = (f_1, f_2, \ldots, f_\nu)$$

с конечным порядковым числом ν. Поэтому $\gamma = \nu$.

Следовательно, не существует *трансфинитных* порядковых чисел, которые были бы меньше ω, а потому последнее является наименьшим из них. Из данного в § 14 определения символа $\operatorname{Lim}\limits_{\nu} \alpha_\nu$ очевидно, что $\omega = \operatorname{Lim}\limits_{\nu} \nu$.

В. «*Если α — какое-либо число второго числового класса, то непосредственно следующим за ним по величине числом того же числового класса является $\alpha+1$*».

Доказательство. Пусть F — вполне упорядоченное множество типа α и с кардинальным числом $\aleph_0$, а значит,

$$\overline{F} = \alpha, \tag{5}$$

$$\overline{\overline{\alpha}} = \aleph_0. \tag{6}$$

Если под g понимать некий вновь добавленный элемент, то имеем

$$\alpha + 1 = \overline{(F, g)}. \tag{7}$$

Так как F является отрезком множества (F, g), то

$$\alpha + 1 > \alpha. \tag{8}$$

Но имеем

$$\overline{\overline{(\alpha + 1)}} = \overline{\overline{\alpha}} + 1 = \aleph_0 + 1 = \aleph_0 \, (\text{§ } 6).$$

Поэтому число $\alpha+1$ принадлежит второму числовому классу. И между α и $\alpha+1$ не существует порядковых чисел, ибо всякое число γ, которое $<\alpha+1$, соответствует в качестве типа некоторому отрезку множества (F, g), а таковым может быть или F, или же отрезок его. Следовательно, γ или $=$ или $<\alpha$.

С. «*Если $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$ — любая фундаментальная последовательность чисел первого или второго числового класса, то и непосредственно следующее за нею по величине число* $\operatorname{Lim}\limits_{\nu} \alpha_\nu$ (§ 14) *тоже принадлежит второму числовому классу*».

Доказательство. Согласно § 14 из фундаментальной последовательности $\{\alpha_\nu\}$ число $\operatorname{Lim}\limits_{\nu} \alpha_\nu$ получается тем, что устанавливается другая последовательность $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu, \ldots$ так, что

$$\beta_1 = \alpha_1, \quad \beta_2 = \alpha_2 - \alpha_1, \ \ldots, \ \beta_{\nu+1} = \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu, \ \ldots$$

Тогда если $G_1, G_2, \ldots, G_\nu, \ldots$ — такие вполне упорядоченные множества [без общих элементов], что

$$\overline{G}_\nu = \beta_\nu,$$

то и

$$G = (G_1, G_2, \ldots, G_\nu, \ldots)$$

будет вполне упорядоченным множеством и

$$\operatorname*{Lim}_\nu \alpha_\nu = \overline{G}.$$

Так что остается доказать, что

$$\overline{\overline{G}} = \aleph_0.$$

Но поскольку числа $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu, \ldots$ принадлежат первому или второму числовым классам, то

$$\overline{\overline{G}}_\nu \leqslant \aleph_0,$$

а потому

$$\overline{\overline{G}} \leqslant \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0.$$

А так как G во всяком случае является трансфинитным множеством, то случай $\overline{\overline{G}} < \aleph_0$ исключается [20].

Две *фундаментальные последовательности* $\{\alpha_\nu\}$ и $\{\alpha_\nu'\}$ чисел первого или второго числового класса мы называем (§ 10) «*перемежающимися*», символически

$$\{\alpha_\nu\} \parallel \{\alpha_\nu'\}, \tag{9}$$

если для *всякого* ν найдутся такие конечные числа λ_0, μ_0, что

$$\alpha_\lambda' > \alpha_\nu, \quad \lambda \geqslant \lambda_0, \tag{10}$$

и

$$\alpha_\mu > \alpha_\nu', \quad \mu \geqslant \mu_0. \tag{11}$$

D. «*Предельные числа* $\operatorname*{Lim}_\nu \alpha_\nu$ *и* $\operatorname*{Lim}_\nu \alpha_\nu'$, *соответствующие двум фундаментальным последовательностям* $\{\alpha_\nu\}$, $\{\alpha_\nu'\}$, *равны тогда и только тогда, когда* $\{\alpha_\nu\} \parallel \{\alpha_\nu'\}$.

Доказательство. Положим для краткости $\operatorname*{Lim}_\nu \alpha_\nu = \beta$, $\operatorname*{Lim}_\nu \alpha_\nu' = \gamma$.

Если мы сначала предположим, что $\{\alpha_\nu\} \parallel \{\alpha_\nu'\}$, то тогда утверждается, что $\beta = \gamma$. Действительно, если бы β не было равно γ, то одно из этих двух чисел должно быть меньшим, например $\beta < \gamma$. Поэтому начиная с некоторого ν было бы $\alpha_\nu' > \beta$ [с. 214], а потому ввиду (11) начиная с некоторого μ было бы $\alpha_\mu > \beta$. Однако это невозможно, так как $\beta = \operatorname*{Lim}_\nu \alpha_\nu$, а значит, для всех μ $\alpha_\mu < \beta$.

Обратно если предположить, что $\beta = \gamma$, то, поскольку $\alpha_\nu < \gamma$, начиная с некоторого λ должно быть $\alpha_\lambda' > \alpha_\nu$, а так как $\alpha_\nu' < \beta$, то начиная с некоторого μ будет $\alpha_\mu > \alpha_\nu'$, т. е. $\{\alpha_\nu\} \parallel \{\alpha_\nu'\}$.

E. «*Если* α — *любое число второго числового класса,* ν_0 — *произвольное конечное порядковое число, то* $\nu_0 + \alpha = \alpha$, *а потому и* $\alpha - \nu_0 = \alpha$».

Доказательство. Сначала убеждаемся в справедливости теоремы, когда $\alpha=\omega$. Имеем

$$\omega=(\overline{f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots}),$$
$$\nu_0=(\overline{g_1, g_2, \ldots, g_{\nu_0}}),$$

а потому

$$\nu_0+\omega=(\overline{g_1, g_2, \ldots, g_{\nu_0}, f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots})=\omega.$$

Но $\alpha>\omega$, поэтому [(10) из § 14]

$$\alpha=\omega+(\alpha-\omega),$$
$$\nu_0+\alpha=(\nu_0+\omega)+(\alpha-\omega)=\omega+(\alpha-\omega)=\alpha.$$

F. «*Если* ν_0 — *любое конечное порядковое число, то* $\nu_0\cdot\omega=\omega$».

Доказательство. Чтобы получить множество типа $\nu_0\cdot\omega$, нужно вместо отдельных элементов f_ν множества $(f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots)$ подставить множества $(g_{\nu,1}, g_{\nu,2}, \ldots, g_{\nu,\nu})$ типа ν_0. Получится множество

$$(g_{1,1}, g_{1,2}, \ldots, g_{1,\nu_0}, g_{2,1}, \ldots, g_{2,\nu_0}, \ldots, g_{\nu,1}, g_{\nu,2}, \ldots, g_{\nu,\nu_0}, \ldots),$$

которое, очевидно, подобно множеству $\{f_\nu\}$. Поэтому

$$\nu_0\cdot\omega=\omega.$$

Короче то же самое получается так. По (24) из § 14 имеем в виду $\omega=\operatorname{Lim}_\nu \nu$

$$\nu_0\cdot\omega=\operatorname{Lim}_\nu \nu_0\cdot\nu.$$

С другой стороны,

$$\{\nu_0\nu\}\parallel\{\nu\},$$

а значит,

$$\operatorname{Lim}_\nu \nu_0\nu=\operatorname{Lim}_\nu \nu=\omega.$$

Следовательно,

$$\nu_0\cdot\omega=\omega.$$

G. «*Всегда имеем*

$$(\alpha+\nu_0)\,\omega=\alpha\omega,$$

где под α *понимается число второго, а под* ν_0 — *число первого числовых классов*».

Доказательство. Мы имеем

$$\operatorname{Lim}_\nu \nu=\omega.$$

Поэтому по (24) из § 14

$$(\alpha+\nu_0)\,\omega=\operatorname{Lim}_\nu(\alpha+\nu_0)\,\nu.$$

Но

$$(\alpha+\nu_0)\,\nu=\overbrace{(\alpha+\nu_0)}^{1}+\overbrace{(\alpha+\nu_0)}^{2}+\ldots+\overbrace{(\alpha+\nu_0)}^{\nu}=$$

$$= \alpha + (\underbrace{\nu_0 + \alpha}_{1}) + (\underbrace{\nu_0 + \alpha}_{2}) \ldots (\underbrace{\nu_0 + \alpha}_{\nu-1}) + \nu_0,$$
$$= \underbrace{\alpha}_{1} + \underbrace{\alpha}_{2} + \ldots + \underbrace{\alpha}_{\nu} + \nu_0,$$
$$= \alpha\nu + \nu_0.$$

Теперь, как легко видеть, имеем [поскольку $\alpha(\nu+1) = \alpha\nu + \alpha > \alpha\nu + \nu_0$]

$$\{\alpha\nu + \nu_0\} \parallel \{\alpha\nu\},$$

а значит,

$$\operatorname{Lim}_{\nu} (\alpha + \nu_0)\nu = \operatorname{Lim}_{\nu} (\alpha\nu + \nu_0) = \operatorname{Lim}_{\nu} \alpha\nu = \alpha\omega.$$

H. «*Если α — любое число второго числового класса, то совокупность $\{\alpha'\}$ всех чисел первого и второго числовых классов, меньших α, в их расположении по величине является вполне упорядоченным множеством типа α.*

Доказательство. Пусть F — такое вполне упорядоченное множество, что $\overline{F} = \alpha$. Пусть f_1 — самый низкий элемент множества F. Если α' — любое порядковое число $< \alpha$, то существует (§ 14) определенный отрезок A' множества F такой, что

$$\overline{A'} = \alpha',$$

и, наоборот, всякий отрезок A' своим типом $\overline{A'} = \alpha'$ определяет число $\alpha' < \alpha$ первого или второго числового класса. Действительно, поскольку $\overline{\overline{F}} = \aleph_0$, то $\overline{\overline{A'}}$ может быть лишь конечным кардинальным числом или $\aleph_0$.

Отрезок A' будет определяться неким элементом $f' \succ f_1$ множества F и, наоборот, всякий элемент $f' \succ f_1$ множества F определяет отрезок A' этого множества. Если f' и f'' — два элемента $\succ f_1$ множества F, A' и A'' — определяемые ими отрезки множества F, α' и α'' — их порядковые типы, и если, например, $f' \prec f''$, то (§ 13) $A' < A''$, а потому $\alpha' < \alpha''$.

Поэтому если мы положим $F = (f_1, F')$, то получим некоторое отображение этих двух множеств, ставя элементу f' из F' в соответствие элемент α' из $\{\alpha'\}$. Тем самым

$$\overline{\{\alpha'\}} = \overline{F'}.$$

Но $\overline{F'} = \alpha - 1$ и (по теореме E) $\alpha - 1 = \alpha$, поэтому

$$\overline{\{\alpha'\}} = \alpha.$$

А так как $\overline{\overline{\alpha}} = \aleph_0$, то и $\overline{\overline{\{\alpha'\}}} = \aleph_0$. Следовательно, справедлива:

J. «*Множество $\{\alpha'\}$ всех чисел α' первого и второго числовых классов, меньших некоторого числа α второго числового класса. имеет кардинальное число $\aleph_0$*».

K. «*Всякое число α второго числового класса таково, что или оно получается из ближайшего меньшего числа α_1 путем прибавления* 1,

т. е.

$$\alpha = \underline{\alpha_1} + 1,$$

или можно задать фундаментальную последовательность $\{\alpha_\nu\}$ *чисел первого или второго числового класса так, что*

$$\alpha = \operatorname*{Lim}_{\nu} \alpha_\nu».$$

Доказательство. Пусть $\alpha = \overline{F}$. Если F имеет наивысший по рангу элемент g, то $F = (A, g)$, где A — отрезок множества F, определяемый при помощи g. Тогда имеем первый случай, т. е.

$$\alpha = \overline{A} + 1 = \underline{\alpha_1} + 1.$$

Следовательно, существует *ближайшее меньшее* число, которое и будет обозначаться через $\underline{\alpha_1}$.

Если же F не имеет наивысшего элемента, то рассматриваем совокупность $\{\alpha'\}$ всех чисел первого и второго числовых классов, меньших α. По теореме H множество чисел $\{\alpha'\}$ при их расположении по величине подобно множеству F; поэтому среди чисел α' нет наибольшего. По теореме J множество $\{\alpha'\}$ можно представить в форме $\{\alpha_\nu'\}$ просто бесконечной последовательности. Если мы начинаем с α_1', то в этом упорядочении, вообще отличном от расположения их по величине, непосредственно следующие числа α_2', α_3', ... будут меньше, чем α_1'; однако при продолжении встретятся члены, которые $> \alpha_1'$, ибо α_1' не может быть больше всех остальных членов, так как среди чисел $\{\alpha_\nu'\}$ нет наибольшего. Пусть α'_{ρ_2} — число с наименьшим индексом из тех чисел α_ν', которые больше α_1'. Аналогично пусть α'_{ρ_3} — число с наименьшим индексом из тех чисел последовательности $\{\alpha_\nu'\}$, которые больше α'_{ρ_2}. Продолжая таким образом, получим бесконечную последовательность возрастающих чисел, т. е. фундаментальную последовательность

$$\alpha_1', \alpha_{\rho_2}', \alpha_{\rho_3}', \ldots, \alpha_{\rho_\nu}', \ldots$$

Имеем

$$1 < \rho_2 < \rho_3 < \ldots < \rho_\nu < \rho_{\nu+1} < \ldots,$$

$$\alpha_1' < \alpha_{\rho_2}' < \alpha_{\rho_3}' < \ldots < \alpha_{\rho_\nu}' < \alpha_{\rho_{\nu+1}}' < \ldots,$$

причем всегда $\alpha_\mu' < \alpha'_{\rho_\nu}$, если $\mu < \rho_\nu$, а так как $\nu \leqslant \rho_\nu$, то и

$$\alpha_\nu' \leqslant \alpha_{\rho_\nu}'.$$

Отсюда видно, что всякое число α_ν', а потому и всякое число $\alpha' < \alpha$ при достаточно большом ν будет превзойдено числами α'_{ρ_ν}.

Но α является числом, непосредственно следующим по величине за всеми числами α', а значит, оно является и непосредственно бо́льшим числом по отношению ко всем числам α'_{ρ_ν}. Поэтому если мы положим $\alpha_1' = \alpha_1$, $\alpha_{\rho_{\nu+1}} = \alpha_{\nu+1}$, то

$$\alpha = \operatorname*{Lim}_{\nu} \alpha_\nu.$$

Из теорем B, C, ..., K вытекает, что числа второго числового класса получаются из меньших чисел двояко. Одни из них, которые мы назовем *числами первого рода*, получаются из ближайшего меньшего числа $\underline{\alpha}_1$ путем прибавления 1 по формуле

$$\alpha=\underline{\alpha}_1+1;$$

другие, которые мы назовем *числами второго рода*, обладают тем свойством, что для них *ближайшего меньшего* $\underline{\alpha}_1$ не существует; они, однако, задаются фундаментальными последовательностями $\{\alpha_\nu\}$ как их *предельные числа* по формуле

$$\alpha = \operatorname*{Lim}_{\nu} \alpha_\nu.$$

Эти два способа получения бо́льших чисел из меньших мы называем *первым и вторым принципами порождения* чисел второго числового класса.

§ 16. Мощность второго числового класса равна второму наименьшему трансфинитному кардинальному числу алеф-один

Перед тем как в последующих параграфах более глубоко рассматривать числа второго числового класса и применять закономерности, которым они подчиняются, мы намереваемся ответить на вопрос о кардинальном числе, соответствующем множеству $Z(\aleph_0)=\{\alpha\}$ всех этих чисел.

A. «*Совокупность* $\{\alpha\}$ *всех чисел* α *второго числового класса, упорядоченных по величине, образует вполне упорядоченное множество*».

Доказательство [21]. Если под A_α мы будем понимать совокупность всех упорядоченных по величине чисел *второго* числового класса, которые меньше заданного числа α, то A_α является вполне упорядоченным множеством типа $\alpha-\omega$. Это вытекает из теоремы H § 15. Действительно, обозначенное там через $\{\alpha'\}$ множество всех чисел *первого* и *второго* числовых классов состоит из $\{\nu\}$ и A_α, так что

$$\{\alpha'\}=(\{\nu\}, A_\alpha).$$

Поэтому

$$\overline{\{\alpha'\}}=\overline{\{\nu\}}+\bar{A}_\alpha,$$

а так как

$$\overline{\{\alpha'\}}=\alpha, \qquad \overline{\{\nu\}}=\omega,$$

то

$$\bar{A}_\alpha=\alpha-\omega.$$

Пусть J — любое такое подмножество множества $\{\alpha\}$, что в $\{\alpha\}$ имеются числа, которые больше всех чисел множества J. Пусть, например, α_0 — одно из этих чисел. Тогда J является и подмножеством множества A_{α_0+1}, причем таким, что по крайней мере число α_0 из A_{α_0+1} больше всех чисел из J. Так как A_{α_0+1} является вполне упорядоченным множеством,

то некоторое число α' из A_{α_0+1}, являющееся вместе с тем и числом из $\{\alpha\}$, должно непосредственно следовать за всеми числами из J (§ 12). Тем самым для $\{\alpha\}$ выполняется условие II из § 12; условие I из § 12 тоже выполняется, так как $\{\alpha\}$ имеет наименьшее число ω.

Если теперь ко вполне упорядоченному множеству $\{\alpha\}$ мы применим теоремы А и С из §12, то получим следующие теоремы:

В. «*Всякая совокупность различных чисел первого и второго числовых классов имеет наименьшее число, некий минимум*».

С. «*Всякая совокупность различных чисел первого и второго числовых классов, расположенных по величине, образует вполне упорядоченное множество*».

Теперь нам нужно прежде всего показать, что мощность второго числового класса отлична от мощности первого класса, равной $\aleph_0$.

D. «*Мощность совокупности* $\{\alpha\}$ *всех чисел* α *второго числового класса не равна* $\aleph_0$».

Доказательство [22]. Если бы было $\overline{\overline{\{\alpha\}}}=\aleph_0$, то совокупность $\{\alpha\}$ можно было бы представить в форме просто бесконечной последовательности

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\nu, \ldots,$$

так что $\{\gamma_\nu\}$ представляла бы собой совокупность *всех* чисел второго числового класса, расположенных в некотором порядке, отличном от упорядочения по величине, и $\{\gamma_\nu\}$ не содержала бы, как и $\{\alpha\}$, наибольшего числа.

Пусть после γ_1 число γ_{ρ_2} будет членом этой последовательности с наименьшим индексом из тех, которые $>\gamma_1$, γ_{ρ_3} — член с наименьшим индексом из тех, которые $>\gamma_{\rho_2}$, и т. д. Мы получаем такую бесконечную последовательность возрастающих чисел

$$\gamma_1, \gamma_{\rho_2}, \ldots, \gamma_{\rho_\nu}, \ldots,$$

что

$$1<\rho_2<\rho_3<\ldots<\rho_\nu<\rho_{\nu+1}<\ldots,$$
$$\gamma_1<\gamma_{\rho_2}<\gamma_{\rho_3}<\ldots<\gamma_{\rho_\nu}<\gamma_{\rho_{\nu+1}}<\ldots,$$
$$\gamma_\nu\leqslant\gamma_{\rho_\nu}.$$

Тогда по теореме С из § 15 было бы задано определенное число δ второго числового класса, а именно

$$\delta=\operatorname*{Lim}_{\nu}\gamma_{\rho_\nu},$$

которое было бы больше всех γ_{ρ_ν}, а значит, для всякого ν также было бы

$$\delta>\gamma_\nu.$$

Но $\{\gamma_\nu\}$ содержит *все* числа второго числового класса, а значит, и число δ; поэтому для некоторого определенного ν_0 было бы

$$\delta=\gamma_{\nu_0},$$

что несовместимо с отношением $\delta > \gamma_{\nu_0}$. Следовательно, предположение $\overline{\overline{\{\alpha\}}} = \aleph_0$ приводит к противоречию.

E. *«Произвольная совокупность $\{\beta\}$ различных чисел β второго числового класса, когда она бесконечна, имеет или кардинальное число $\aleph_0$, или кардинальное число $\overline{\overline{\{\alpha\}}}$ второго числового класса».*

Доказательство. По теореме O из § 13 множество $\{\beta\}$ в его упорядочении по величине, будучи подмножеством вполне упорядоченного множества $\{\alpha\}$, подобно или некоторому отрезку A_{α_0} последнего (т. е. совокупности всех расположенных по величине чисел второго числового класса, которые $<\alpha_0$), или самой совокупности $\{\alpha\}$. Как было показано при доказательстве теоремы A, справедливо равенство $\overline{A}_{\alpha_0} = \alpha_0 - \omega$.

Поэтому имеем: или $\overline{\{\beta\}} = \alpha_0 - \omega$, или $\overline{\{\beta\}} = \overline{\{\alpha\}}$. Поэтому и $\overline{\overline{\{\beta\}}}$ или $= \overline{\alpha_0 - \omega}$, или $= \overline{\overline{\{\alpha\}}}$. Но $\overline{\alpha_0 - \omega}$ или является конечным кардинальным числом, или $= \aleph_0$ (теорема J, § 15). Здесь первый случай исключен, поскольку $\{\beta\}$ предположено бесконечным множеством. Тем самым кардинальное число $\overline{\overline{\{\beta\}}}$ или $= \aleph_0$, или $= \overline{\overline{\{\alpha\}}}$.

F. *«Мощность второго числового класса $\{\alpha\}$ является вторым наименьшим трансфинитным числом алеф-один».*

Доказательство. Не существует кардинального числа $\mathfrak{a}$, которое было бы $> \aleph_0$ и $< \overline{\overline{\{\alpha\}}}$. Действительно, в противном случае, согласно § 2 существовало бы такое подмножество $\{\beta\}$ множества $\{\alpha\}$, что $\overline{\overline{\{\beta\}}} = \mathfrak{a}$.

Но по только что доказанной теореме E подмножество $\{\beta\}$ имеет или кардинальное число $\aleph_0$, или кардинальное число $\overline{\overline{\{\alpha\}}}$. Значит, кардинальное число $\overline{\overline{\{\alpha\}}}$ необходимо является непосредственно следующим по величине за кардинальным числом $\aleph_0$; мы обозначаем его через $\aleph_1$. Поэтому во втором числовом классе $Z(\aleph_0)$ мы имеем естественного представителя второго наименьшего трансфинитного кардинального числа алеф-один.

§ 17. Числа вида $\omega^\mu \nu_0 + \omega^{\mu-1}\nu_1 + \ldots + \nu_\mu$ [23]

Целесообразно сначала ознакомиться с теми числами из $Z(\aleph_0)$, которые являются целыми (рациональными) функциями конечной степени от ω. Каждое такое число можно и притом единственным образом привести к виду

$$\varphi = \omega^\mu \nu_0 + \omega^{\mu-1}\nu_1 + \ldots + \nu_\mu, \qquad (1)$$

где μ, ν_0 конечны и отличны от нуля, а $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\mu$ могут быть и нулями. Это основывается на том, что

$$\omega^{\mu'}\nu' + \omega^\mu \nu = \omega^\mu \nu, \qquad (2)$$

если $\mu' < \mu$ и $\nu > 0$.

Действительно, по (8) из § 14 имеем

$$\omega^{\mu'}\nu'+\omega^{\mu}\nu=\omega^{\mu'}(\nu'+\omega^{\mu-\mu'}\nu),$$

а по теореме E из § 15

$$\nu'+\omega^{\mu-\mu'}\nu=\omega^{\mu-\mu'}\nu.$$

Поэтому в совокупности вида

$$\ldots\omega^{\mu'}\nu'+\omega^{\mu}\nu+\ldots$$

можно будет удалить все члены, за которыми справа следуют члены, содержащие бо́льшую степень ω. Этот процесс можно продолжать до тех пор, пока не получится форма, данная в (1). Подчеркнем еще, что

$$\omega^{\mu}\nu+\omega^{\mu}\nu'=\omega^{\mu}(\nu+\nu'). \tag{3}$$

Сравним теперь число φ с числом ψ такого же вида

$$\psi=\omega^{\lambda}\rho_0+\omega^{\lambda-1}\rho_1+\ldots+\rho_{\lambda}. \tag{4}$$

Если μ и λ различны и, например, $\mu<\lambda$, то по (2) имеем

$$\varphi+\psi=\psi,$$

поэтому

$$\varphi<\psi.$$

Если $\mu=\lambda$, ν_0 и ρ_0 различны и, например, $\nu_0<\rho_0$, то по (2)

$$\varphi+(\omega^{\lambda}(\rho_0-\nu_0)+\omega^{\lambda-1}\rho_1+\ldots\rho_{\mu})=\psi,$$

поэтому тоже

$$\varphi<\psi.$$

Наконец, если

$$\mu=\lambda,\ \nu_0=\rho_0,\ \nu_1=\rho_1,\ \ldots,\ \nu_{\sigma-1}=\rho_{\sigma-1},\ \sigma\leqslant\mu,$$

но, напротив, ν_{σ} отлично от ρ_{σ} и, например, $\nu_{\sigma}<\rho_{\sigma}$, то по (2)

$$\varphi+(\omega^{\lambda-\sigma}(\rho_{\sigma}-\nu_{\sigma})+\omega^{\lambda-\sigma-1}\rho_{\sigma+1}+\ldots+\rho_{\mu})=\psi,$$

поэтому опять

$$\varphi<\psi.$$

Мы видим, следовательно, что лишь при полной идентичности выражений φ и ψ могут быть равными представимые ими числа.

Сложение φ и ψ приводит к следующему результату:

1) если $\mu<\lambda$, то, как уже замечено,

$$\varphi+\psi=\psi;$$

2) если $\mu=\lambda$, то имеем

$$\varphi+\psi=\omega^{\lambda}(\nu_0+\rho_0)+\omega^{\lambda-1}\rho_1+\ldots+\rho_{\lambda};$$

3) если $\mu>\lambda$, то имеем

$$\varphi+\psi=\omega^{\mu}\nu_0+\omega^{\mu-1}\nu_1+\ \ldots\ +\omega^{\lambda+1}\nu_{\mu-\lambda-1}+\omega^{\lambda}(\nu_{\mu-\lambda}+\rho_0)+\omega^{\lambda-1}\rho_1+\ \ldots\ +\rho_{\lambda}.$$

Чтобы осуществить *умножение* φ и ψ, заметим, что когда ρ является конечным отличным от нуля числом, то имеем формулу

$$\varphi\rho=\omega^{\mu}\nu_0\rho+\omega^{\mu-1}\nu_1+\ \ldots\ +\nu_{\mu}. \tag{5}$$

Она легко получается вычислением суммы $\varphi+\varphi+\ldots+\varphi$, состоящей из ρ членов.

Далее, применяя повторно теорему G из § 15 и принимая во внимание теорему F из § 15, получаем

$$\varphi\omega=\omega^{\mu+1}, \qquad (6)$$

а потому и

$$\varphi\omega^{\lambda}=\omega^{\mu+\lambda}. \qquad (7)$$

В соответствии с дистрибутивным законом [(8) из § 14].

$$\varphi\psi=\varphi\omega^{\lambda}\rho_0+\varphi\omega^{\lambda-1}\rho_1+\ldots+\varphi\omega\rho_{\lambda-1}+\varphi\rho_{\lambda}.$$

Поэтому формулы (4), (5) и (7) приводят к следующему результату:

1) если $\rho_{\lambda}=0$, то

$$\varphi\psi=\omega^{\mu+\lambda}\rho_0+\omega^{\mu+\lambda-1}\rho_1+\ldots+\omega^{\mu+1}\rho_{\lambda-1}=\omega^{\mu}\psi;$$

2) если $\rho_{\lambda}\neq 0$, то

$$\varphi\psi=\omega^{\mu+\lambda}\rho_0+\omega^{\mu+\lambda-1}\rho_1+\ldots+\omega^{\mu+1}\rho_{\lambda-1}+\omega^{\mu}\nu_0\rho_{\lambda}+\omega^{\mu-1}\nu_1+\ldots+\nu_{\mu}.$$

К одному замечательному разложению чисел φ мы приходим следующим образом. Пусть

$$\varphi=\omega^{\mu}\varkappa_0+\omega^{\mu_1}\varkappa_1+\ldots+\omega^{\mu_\tau}\varkappa_\tau, \qquad (8)$$

где

$$\mu>\mu_1>\mu_2>\ldots>\mu_\tau\geqslant 0,$$

а $\varkappa_0, \varkappa_1, \ldots, \varkappa_\tau$ — отличные от нуля конечные числа. Тогда имеем

$$\varphi=(\omega^{\mu_1}\varkappa_1+\omega^{\mu_2}\varkappa_2+\ldots+\omega^{\mu_\tau}\varkappa_\tau)(\omega^{\mu-\mu_1}\varkappa_0+1).$$

Применяя эту формулу повторно, получаем

$$\varphi=\omega^{\mu_\tau}\varkappa_\tau(\omega^{\mu_{\tau-1}-\mu_\tau}\varkappa_{\tau-1}+1)(\omega^{\mu_{\tau-2}-\mu_{\tau-1}}\varkappa_{\tau-2}+1)\ldots(\omega^{\mu-\mu_1}\varkappa_0+1).$$

Но [по (5)]

$$\omega^{\lambda}\varkappa+1=(\omega^{\lambda}+1)\varkappa,$$

если $\varkappa$ — отличное от нуля конечное число. Поэтому

$$\varphi=\omega^{\mu_\tau}\varkappa_\tau(\omega^{\mu_{\tau-1}-\mu_\tau}+1)\varkappa_{\tau-1}(\omega^{\mu_{\tau-2}-\mu_{\tau-1}}+1)\varkappa_{\tau-2}\ldots(\omega^{\mu-\mu_1}+1)\varkappa_0. \qquad (9)$$

Все входящие сюда множители $\omega^{\lambda}+1$ *неразложимы*, и число φ можно представить в форме такого произведения лишь единственным способом. Если $\mu_\tau=0$, то φ является числом *первого рода*, а во всех остальных случаях оно *второго рода*.

Кажущееся отклонение формул этого параграфа от уже данных в «Основах общего учения о многообразиях», § 14 [I.5.5, § 14] связано лишь с изменением способа записи произведения двух чисел, так как теперь мы помещаем множимое слева, а множитель справа, а тогда следовали обратному правилу.

§ 18. Степень γ^α в области второго числового класса [24]

Пусть ξ — переменная, область изменения которой состоит из чисел первого и второго числовых классов, включая 0. Пусть γ и δ — две принадлежащие той же области константы, причем

$$\delta>0, \quad \gamma>1.$$

Тогда мы можем доказать следующую теорему:

А. «*Существует единственная вполне определенная однозначная функция* $f(\xi)$ *переменной* ξ, *удовлетворяющая следующим условиям*:

1) $f(0)=\delta$;

2) *если* ξ' *и* ξ'' — *два любых значения* ξ *и*

$$\xi'<\xi'',$$

то

$$f(\xi')<f(\xi'');$$

3) *для всякого значения* ξ

$$f(\xi+1)=f(\xi)\gamma;$$

4) *если* $\{\xi_\nu\}$ — *произвольная фундаментальная последовательность, то и* $\{f(\xi_\nu)\}$ *является фундаментальной последовательностью, и если*

$$\xi=\operatorname*{Lim}_\nu \xi_\nu,$$

то

$$f(\xi)=\operatorname*{Lim}_\nu f(\xi_\nu)\text{».}$$

Доказательство. По 1) и 3) имеем

$$f(1)=\delta\gamma, \quad f(2)=\delta\gamma\gamma, \quad f(3)=\delta\gamma\gamma\gamma, \ \ldots,$$

а ввиду $\delta>0$, $\gamma>1$ получаем

$$f(1)<f(2)<f(3)<\ldots<f(\nu)<f(\nu+1)<\ldots$$

Тем самым функция $f(\xi)$ для области $\xi<\omega$ полностью определена.

Предположим теперь, что теорема установлена для всех значений ξ, которые $<\alpha$, где α — произвольное число второго числового класса. Тогда она справедлива и для $\xi\leqslant\alpha$. Действительно, если α *первого* рода, то из 3) следует

$$f(\alpha)=f(\underline{\alpha_1})\gamma>f(\underline{\alpha_1}),$$

следовательно, для $\xi\leqslant\alpha$ выполняются условия 2), 3), 4). Если же α *второго* рода и $\{\alpha_\nu\}$ — такая фундаментальная последовательность, что $\operatorname*{Lim}_\nu \alpha_\nu=\alpha$, то из 2) следует, что и $\{f(\alpha_\nu)\}$ является фундаментальной последовательностью, а из 4) вытекает, что $f(\alpha)=\operatorname*{Lim}_\nu f(\alpha_\nu)$. Если взять другую такую фундаментальную последовательность $\{\alpha_\nu'\}$, что $\operatorname*{Lim}_\nu \alpha_\nu'=$ $=\alpha$, то вследствие 2) фундаментальные последовательности $\{f(\alpha_\nu)\}$ и

$\{f(\alpha_\nu')\}$ будут *перемежающимися* [(9) из § 15]; следовательно, $f(\alpha)=\operatorname*{Lim}_\nu f(\alpha_\nu')$. Значит, выражение $f(\alpha)$ однозначно определяется и в этом случае.

Если α' — какое-либо число $<\alpha$, то легко убедиться, что $f(\alpha')<f(\alpha)$. Поэтому условия 2)—4) выполнены и для $\xi\leqslant\alpha$. Отсюда следует справедливость теоремы *для всех значений* ξ.

Действительно, если бы существовали исключительные значения ξ, для которых она не имела места, то по теореме B из § 16 одно из них, которое мы обозначим через α, было бы *наименьшим*. Тогда теорема была бы верной для $\xi<\alpha$, но неверной для $\xi\leqslant\alpha$, что противоречило бы только что доказанному.

Поэтому для всей области изменения ξ существует *одна* и только одна функция $f(\xi)$, удовлетворяющая услвиям 1) — 4).

Если константе δ придать значение 1 и обозначить тогда функцию $f(\xi)$ через

$$\gamma^\xi,$$

то можно сформулировать следующую теорему:

B. «*Если* γ *является произвольной константой* >1, *принадлежащей первому или второму числовому классу, то существует вполне определенная функция* γ^ξ *переменной* ξ *такая, что*

1) $\gamma^0=1$;

2) *если* $\xi'<\xi''$, *то* $\gamma^{\xi'}<\gamma^{\xi''}$;

3) *для всякого значения* ξ *выполняется равенство* $\gamma^{\xi+1}=\gamma^\xi\gamma$;

4) *если* $\{\xi_\nu\}$ — *фундаментальная последовательность, то и* $\{\gamma^{\xi_\nu}\}$ *является фундаментальной последовательностью, а если* $\xi=\operatorname*{Lim}_\nu \xi_\nu$, *то и*

$$\gamma^\xi=\operatorname*{Lim}_\nu \gamma^{\xi_\nu}».$$

Однако мы можем высказать и теорему:

C. «*Если* $f(\xi)$ *есть функция, охарактеризованная в теореме* A, *то*

$$f(\xi)=\delta\gamma^\xi».$$

Доказательство. Принимая во внимание (24) из § 14, легко убедиться, что функция $\delta\gamma^\xi$ удовлетворяет не только условиям 1) — 3) теоремы A, но и условию 4). Ввиду единственности функции $f(\xi)$ она поэтому должна совпадать с функцией $\delta\gamma^\xi$.

D. «*Если* α *и* β — *два любых числа первого или второго числового класса, включая* 0, *то*

$$\gamma^{\alpha+\beta}=\gamma^\alpha\gamma^\beta.$$

Доказательство. Рассматриваем функцию $\varphi(\xi)=\gamma^{\alpha+\xi}$. Принимая во внимание то, что по формуле (23) из § 14

$$\operatorname*{Lim}_\nu(\alpha+\xi_\nu)=\alpha+\operatorname*{Lim}_\nu \xi_\nu,$$

мы видим, что

1) $\varphi(0)=\gamma^\alpha$;
2) если $\xi'<\xi''$, то $\varphi(\xi')<\varphi(\xi'')$;
3) для всякого значения ξ выполняется равенство

$$\rho(\xi+1)=\varphi(\xi)\gamma;$$

4) если $\{\xi_\nu\}$ — такая фундаментальная последовательность, что $\operatorname{Lim}_\nu \xi_\nu=\xi$, то

$$\varphi(\xi)=\operatorname{Lim}_\nu \varphi(\xi_\nu).$$

Поэтому по теореме C, полагая $\delta=\gamma^\alpha$, имеем

$$\varphi(\xi)=\gamma^\alpha\gamma^\xi.$$

Если положить здесь $\xi=\beta$, то получаем

$$\gamma^{\alpha+\beta}=\gamma^\alpha\gamma^\beta.$$

E. «*Если* α *и* β *— два любых числа первого или второго числового класса, включая* 0, *то*

$$\gamma^{\alpha\beta}=(\gamma^\alpha)^\beta.$$

Доказательство. Рассматривая функцию $\psi(\xi)=\gamma^{\alpha\xi}$, мы замечаем, что по (24) из § 14 всегда $\operatorname{Lim}_\nu \alpha\xi_\nu=\alpha \operatorname{Lim}_\nu \xi_\nu$. Поэтому на основании теоремы D мы можем утверждать следующее:
1) $\psi(0)=1$;
2) если $\xi'<\xi''$, то $\psi(\xi')<\psi(\xi'')$;
3) для каждого значения ξ выполняется равенство

$$\psi(\xi+1)=\psi(\xi)\gamma^\alpha;$$

4) если $\{\xi_\nu\}$ — фундаментальная последовательность, то и $\{\psi(\xi_\nu)\}$ — тоже, и если $\xi=\operatorname{Lim}_\nu \xi_\nu$, то и $\psi(\xi)=\operatorname{Lim}_\nu \psi(\xi_\nu)$.

Поэтому по теореме C, полагая в ней $\delta=1$ и заменяя γ на γ^α, имеем

$$\psi(\xi)=(\gamma^\alpha)^\xi.$$

Относительно *величины* функции γ^ξ в сравнении с ξ можно высказать следующую теорему:

F. «*Если* $\gamma>1$, *то для всякого значения* ξ

$$\gamma^\xi\geqslant\xi\text{».}$$

Доказательство. В случаях $\xi=0$ и $\xi=1$ теорема очевидна. Покажем теперь, что если она справедлива для всех значений ξ, которые меньше заданного числа $\alpha>1$, то она справедлива и для $\xi=\alpha$.

Если α *первого* рода, то по предположению

$$\underline{\alpha}_1\leqslant\gamma^{\underline{\alpha}_1},$$

а потому и

$$\underline{\alpha}_1\gamma\leqslant\gamma^{\underline{\alpha}_1}\gamma=\gamma^\alpha,$$

следовательно,

$$\gamma^{\alpha} \geqslant \underline{\alpha}_1 + \underline{\alpha}_1(\gamma-1) = \underline{\alpha}_1\gamma.$$

Поскольку как $\underline{\alpha}_1$, так и $\gamma-1$ самое меньшее $=1$, а $\underline{\alpha}_1+1=\alpha$, то получаем

$$\gamma^{\alpha} \geqslant \alpha$$

Если же α *второго* рода и притом

$$\alpha = \operatorname*{Lim}_{\nu} \alpha_{\nu},$$

то вследствие $\alpha_{\nu}<\alpha$ имеем по предположению

$$\alpha_{\nu} \leqslant \gamma^{\alpha_{\nu}},$$

а потому и

$$\operatorname*{Lim}_{\nu} \alpha_{\nu} \leqslant \operatorname*{Lim}_{\nu} \gamma^{\alpha_{\nu}},$$

т. е.

$$\alpha \leqslant \gamma^{\alpha}.$$

Если бы теперь можно было задать значения ξ, для которых

$$\xi > \gamma^{\xi},$$

то по теореме B из § 16 среди них должно было бы быть *наименьшее*. Если последнее обозначить через α, то для $\xi<\alpha$ мы имели бы

$$\xi \leqslant \gamma^{\xi},$$

но, напротив,

$$\alpha > \gamma^{\alpha},$$

что противоречит только что доказанному. Тем самым для всех значений ξ имеем

$$\gamma^{\xi} \geqslant \xi.$$

§ 19. Нормальная форма чисел второго числового класса

Пусть α — какое-либо число второго числового класса. Степень ω^{ξ} для достаточно большого ξ будет больше α. По теореме F из § 18 это всегда будет иметь место при $\alpha>\xi$, но вообще может случиться и для меньших значений ξ.

По теореме B из § 16 среди значений ξ, для которых

$$\omega^{\xi} > \alpha,$$

должно быть *наименьшее*; мы обозначаем его через β и легко убеждаемся, что оно *не может* быть числом *второго* рода. Действительно, если бы было

$$\beta = \operatorname*{Lim}_{\nu} \beta_{\nu},$$

то ввиду $\beta_\nu < \beta$ мы имели бы

$$\omega^{\beta_\nu} \leqslant \alpha,$$

а потому и

$$\operatorname*{Lim}_{\nu} \omega^{\beta_\nu} \leqslant \alpha.$$

Следовательно, было бы

$$\omega^{\beta} \leqslant \alpha,$$

тогда как должно быть

$$\omega^{\beta} > \alpha.$$

Значит, β является числом *первого* рода. Обозначим β_1 через α_0, так что $\beta = \alpha_0 + 1$. Поэтому мы можем утверждать, что *существует вполне определенное число α_0 первого или второго числового класса, удовлетворяющее двум условиям:*

$$\omega^{\alpha_0} \leqslant \alpha, \qquad \omega^{\alpha_0}\omega > \alpha. \tag{1}$$

Из второго условия заключаем, что неравенство

$$\omega^{\alpha_0}\nu \leqslant \alpha$$

не может выполняться для всех конечных значений ν, так как в противном случае было бы и $\operatorname*{Lim}_{\nu} \omega^{\alpha_0}\nu = \omega^{\alpha_0}\omega \leqslant \alpha$.

Наименьшее конечное число ν, для которого

$$\omega^{\alpha_0}\nu > \alpha,$$

мы обозначаем через $\varkappa_0 + 1$. Ввиду (1) $\varkappa_0 > 0$.

Следовательно, существует и вполне определенное число $\varkappa_0$ первого числового класса такое, что

$$\omega^{\alpha_0}\varkappa_0 \leqslant \alpha, \qquad \omega^{\alpha_0}(\varkappa_0 + 1) > \alpha. \tag{2}$$

Если мы положим $\alpha - \omega^{\alpha_0}\varkappa_0 = \alpha'$, то имеем

$$\alpha = \omega^{\alpha_0}\varkappa_0 + \alpha' \tag{3}$$

и

$$0 \leqslant \alpha' < \omega^{\alpha_0}, \qquad 0 < \varkappa_0 < \omega. \tag{4}$$

Но число α при соблюдении условия (4) можно представить в форме (3) лишь *единственным* образом. Действительно, из (3) и (4) прежде всего следуют условия (2), а отсюда — условия (1).

Условиям же (1) удовлетворяет лишь число $\alpha_0 = \beta_1$, а условиями (2) конечное число $\varkappa_0$ определяется однозначно.

Принимая во внимание теорему F из § 18, из (1) и (4) получаем, что

$$\alpha' < \alpha, \qquad \alpha_0 \leqslant \alpha.$$

Поэтому мы можем утверждать справедливость следующей теоремы:

A. «*Всякое число α второго числового класса можно представить и притом единственным образом в форме*

$$\alpha = \omega^{\alpha_0}\varkappa_0 + \alpha',$$

где

$$0 \leqslant \alpha' < \omega^{\alpha_0}, \quad 0 < \varkappa_0 < \omega;$$

α' всегда меньше α, напротив, α_0 меньше или равно α».

Если α' — число *второго* числового класса, то и к нему можно применить теорему А и получить

$$\alpha' = \omega^{\alpha_1}\varkappa_1 + \alpha'', \tag{5}$$

$$0 \leqslant \alpha'' < \omega^{\alpha_1}, \quad 0 < \varkappa_1 < \omega,$$

и

$$\alpha_1 < \alpha_0, \quad \alpha'' < \alpha' \text{ [25]}.$$

Вообще получаем последовательность аналогичных равенств

$$\alpha'' = \omega^{\alpha_2}\varkappa_2 + \alpha''' \tag{6}$$

$$\alpha''' = \omega^{\alpha_3}\varkappa_3 + \alpha^{\mathrm{IV}}, \tag{7}$$

. . . .

Однако эта последовательность не может быть бесконечной; она должна необходимо оборваться.

Действительно, если мы расположим числа α, α', α'' ... по их величине, то

$$\alpha > \alpha' > \alpha'' > \alpha''' > \ldots$$

Если бы последовательность убывающих трансфинитных чисел была бесконечной, то никакой член ее не был бы наименьшим; а это невозможно по теореме В из § 16. Поэтому для некоторого *конечного* численного значения τ должно быть

$$\alpha^{(\tau+1)} = 0.$$

Объединяя теперь равенства (3), (5)—(7) друг с другом, получаем теорему

В. «*Всякое число α второго числового класса можно, и притом единственным образом, представить в виде*

$$\alpha = \omega^{\alpha_0}\varkappa_0 + \omega^{\alpha_1}\varkappa_1 + \ldots + \omega^{\alpha_\tau}\varkappa_\tau,$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\tau$ — числа первого или второго числового класса, удовлетворяющие условиям

$$\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_\tau \geqslant 0,$$

тогда как $\varkappa_0, \varkappa_1, \ldots, \varkappa_\tau$ представляют собой $\tau+1$ отличных от нуля чисел первого числового класса».

Установленную здесь форму чисел второго числового класса мы будем называть их *нормальной формой*; α_0 называется «*высшей степенью*», α_τ — «*низшей степенью*» числа α; при $\tau=0$ эти степени равны друг другу.

В зависимости от того, равен ли низший показатель α_τ 0 или больше нуля, α является числом первого или второго рода.

Возьмем некоторое другое число β в нормальной форме

$$\beta = \omega^{\beta_0}\lambda_0 + \omega^{\beta_1}\lambda_1 + \ldots + \omega^{\beta_\sigma}\lambda_\sigma. \tag{8}$$

Как для сравнения α с β, так и для нахождения их суммы и разности служат формулы

$$\omega^{\alpha'}\varkappa' + \omega^{\alpha'}\varkappa = \omega^{\alpha'}(\varkappa' + \varkappa), \tag{9}$$

$$\omega^{\alpha'}\varkappa' + \omega^{\alpha''}\varkappa'' = \omega^{\alpha''}\varkappa'' \text{ при } \alpha' < \alpha''. \tag{10}$$

Здесь $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$ имеют значения конечных чисел.

Это суть обобщения формул (3) и (2) из § 17.

Для образования произведения $\alpha\beta$ принимаются во внимание следующие формулы:

$$\alpha\lambda = \omega^{\alpha_0}\varkappa_0\lambda + \omega^{\alpha_1}\varkappa_1 + \ldots + \omega^{\alpha_\tau}\varkappa_\tau, \qquad 0 < \lambda < \omega, \tag{11}$$

$$\alpha\omega = \omega^{\alpha_0+1}, \tag{12}$$

$$\alpha\omega^{\beta'} = \omega^{\alpha_0+\beta'}, \ \beta' > 0. \tag{13}$$

Возведение в степень α^β легко осуществляется на основании таких формул:

$$\alpha^\lambda = \omega^{\alpha_0\lambda}\varkappa_0 + \ldots, \qquad 0 < \lambda < \omega. \tag{14}$$

Члены, добавляемые справа, имеют меньшую степень, чем высшая. Отсюда легко получается, что фундаментальные последовательности $\{\alpha^\lambda\}$ и $\{\omega^{\alpha_0\lambda}\}$ являются перемежающимися, так что

$$\alpha^\omega = \omega^{\alpha_0\omega}, \qquad \alpha_0 > 0. \tag{15}$$

Поэтому вследствие теоремы E из § 18 имеем

$$\alpha^{\omega^{\beta'}} = \omega^{\alpha_0\omega^{\beta'}}, \qquad \alpha > 0, \qquad \beta' > 0. \qquad (16$$

С помощью этих формул можно доказать такие теоремы:

C. «*Если первые члены $\omega^{\alpha_0}\varkappa_0$, $\omega^{\beta_0}\lambda_0$ нормальных форм двух чисел α и β не равны, то α меньше или больше β в зависимости от того, меньше или больше $\omega^{\alpha_0}\varkappa_0$, чем $\omega^{\beta_0}\lambda_0$. Если же*

$$\omega^{\alpha_0}\varkappa_0 = \omega^{\beta_0}\lambda_0, \qquad \omega^{\alpha_1}\varkappa_1 = \omega^{\beta_1}\lambda_1, \ \ldots, \ \omega^{\alpha_\rho}\varkappa_\rho = \omega^{\beta_\rho}\lambda_\rho = \omega^{\beta_\rho}\lambda_\rho,$$

а $\omega^{\alpha_{\rho+1}}\varkappa_{\rho+1}$ меньше или больше, чем $\omega^{\beta_{\rho+1}}\lambda_{\rho+1}$, то α соответственно меньше или больше, чем β».

D. «*Если высшая степень α_0 числа α меньше высшей степени β_0 числа β, то*

$$\alpha + \beta = \beta.$$

Если $\alpha_0 = \beta_0$, то

$$\alpha + \beta = \omega^{\beta_0}(\varkappa_0 + \lambda_0) + \omega^{\beta_1}\lambda_1 + \ldots + \omega^{\beta_\sigma}\lambda_\sigma.$$

Если же

$$\alpha_0 > \beta_0, \ \alpha_1 > \beta_0, \ \ldots, \ \alpha_\rho \geqslant \beta_0, \ \alpha_{\rho+1} < \beta_0,$$

то

$$\alpha + \beta = \omega^{\alpha_0}\varkappa_0 + \ldots + \omega^{\alpha_\rho}\varkappa_\rho + \omega^{\beta_0}\lambda_0 + \omega^{\beta_1}\lambda_1 + \ldots + \omega^{\beta_\sigma}\lambda_\sigma\text{»}.$$

E. «*Если β второго рода ($\beta_\sigma > 0$), то*

$$\alpha\beta = \omega^{\alpha_0+\beta_0}\lambda_0 + \omega^{\alpha_0+\beta_1}\lambda_1 + \ldots + \omega^{\alpha_0+\beta_\sigma}\lambda_\sigma = \omega^{\alpha_0}\beta;$$

если же β первого рода ($\beta_\sigma=0$), *то*

$$\alpha\beta = \omega^{\alpha_0+\beta_0}\lambda_0 + \omega^{\alpha_0+\beta_1}\lambda_1 + \ldots + \omega^{\alpha_0+\beta_{\sigma-1}}\lambda_{\sigma-1} + \omega^{\alpha_0}\varkappa_0\lambda_0 + \omega^{\alpha_1}\varkappa_1 + \ldots + \omega^{\alpha_\tau}\varkappa_\tau».$$

F. «*Если β второго рода* ($\beta_\sigma>0$), *то*

$$\alpha^\beta = \omega^{\alpha_0\beta};$$

если же β первого рода ($\beta_\sigma=0$) *и притом* $\beta=\beta'+\lambda_\sigma$, *где* β' *второго рода, то*

$$\alpha^\beta = \omega^{\alpha_0\beta'}\alpha^{\lambda_\sigma}».$$

G. «*Всякое число α второго числового класса можно представить и притом единственным образом в форме произведения*

$$\alpha = \omega^{\gamma_0}\varkappa_\tau(\omega^{\gamma_1}+1)\varkappa_{\tau-1}(\omega^{\gamma_2}+1)\varkappa_{\tau-2}\ldots(\omega^{\gamma_\tau}+1)\varkappa_0,$$

и выполняются равенства

$$\gamma_0=\alpha_\tau, \quad \gamma_1=\alpha_{\tau-1}-\alpha_\tau, \quad \gamma_2=\alpha_{\tau-2}-\alpha_{\tau-1}, \ldots, \quad \gamma_\tau=\alpha_0-\alpha_1,$$

причем $\varkappa_0, \varkappa_1, \ldots, \varkappa_\tau$ *имеют то же значение, что и в нормальной форме. Множители* $\omega^\gamma+1$ *неразложимы*».

H. «*Всякое принадлежащее второму числовому классу число α второго рода можно представить и притом единственным образом в форме*

$$\alpha=\omega^{\gamma_0}\alpha',$$

где $\gamma_0>0$, *а* α' — *некоторое число первого рода, принадлежащее первому или второму числовому классу*».

J. «*Для того чтобы два числа α и β второго числового класса удовлетворяли соотношению*

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha,$$

необходимо и достаточно, чтобы они имели вид

$$\alpha=\gamma\mu, \qquad \beta=\gamma\nu,$$

где μ и ν — *числа первого числового класса*».

K. «*Для того чтобы два числа α и β второго числового класса и первого рода удовлетворяли соотношению*

$$\alpha\beta=\beta\alpha,$$

необходимо и достаточно, чтобы они имели вид

$$\alpha=\gamma^\mu, \qquad \beta=\gamma^\nu,$$

где μ и ν — числа первого числового класса».

Для иллюстрации значения указанной выше *нормальной формы* и непосредственно связанной с нею *формы произведения* чисел второго числового класса, можно дать основанные на них доказательства теорем J и K.

Из посылки

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha$$

мы прежде всего заключаем, что высшая степень α_0 числа α должна быть равна высшей степени β_0 числа β. Действительно, если бы, например, было $\alpha_0<\beta_0$, то мы имели бы (по теореме D)

$$\alpha+\beta=\beta,$$

а потому и

$$\beta+\alpha=\beta,$$

что невозможно, поскольку по (2) из § 14

$$\beta+\alpha>\beta.$$

Поэтому мы можем положить

$$\alpha=\omega^{\alpha_0}\mu+\alpha', \qquad \beta=\omega^{\alpha_0}\nu+\beta',$$

где высшие степени чисел α' и β' меньше α_0, а μ и ν — отличные от 0 конечные числа.

Теперь по теореме D имеем

$$\alpha+\beta=\omega^{\alpha_0}(\mu+\nu)+\beta', \qquad \beta+\alpha=\omega^{\alpha_0}(\mu+\nu)+\alpha',$$

а значит,

$$\omega^{\alpha_0}(\mu+\nu)+\beta'=\omega^{\alpha_0}(\mu+\nu)+\alpha'.$$

Поэтому по теореме D из § 14 имеем

$$\beta'=\alpha'.$$

Тем самым

$$\alpha=\omega^{\alpha_0}\mu+\alpha', \qquad \beta=\omega^{\alpha_0}\nu+\alpha',$$

и если положить

$$\omega^{\alpha_0}+\alpha'=\gamma,$$

то по (11) получаем

$$\alpha=\gamma\mu, \qquad \beta=\gamma\nu.$$

С другой стороны, предположим [26], что два числа α и β второго числового класса являются числами первого рода и удовлетворяют условию

$$\alpha\beta=\beta\alpha,$$

а также примем, что

$$\alpha>\beta.$$

По теореме G представляем оба числа в виде произведения

$$\alpha=\delta\alpha', \qquad \beta=\delta\beta',$$

где α' и β' не имеют левого общего множителя на конце (кроме 1).

Тогда имеем

$$\alpha'>\beta'$$

и

$$\alpha'\delta\beta'=\beta'\delta\alpha'.$$

Все числа, рассматриваемые здесь и далее, являются числами *первого рода*, ибо это предположено об α и β.

Последнее равенство можно прежде всего рассматривать с той точки зрения (принимая во внимание теорему G), что α' и β' *не могут быть оба трансфинитными*, поскольку в последнем случае у них был бы левый общий множитель на конце. Но они и *не могут быть оба конечными*; действительно, тогда δ было бы трансфинитным, и если $\varkappa$ — конечный левый концевой множитель числа δ, то должно было бы быть

$$\alpha'\varkappa=\beta'\varkappa,$$

а потому и

$$\alpha'=\beta'.$$

Следовательно, остается лишь возможность, что

$$\alpha'>\omega, \qquad \beta'<\omega.$$

Но конечное число β' должно быть 1, т. е.

$$\beta'=1,$$

так как в противном случае оно содержалось бы как часть в конечном левом концевом множителе числа α'.

Таким образом, мы приходим к тому результату, что $\beta=\delta$, а значит,

$$\alpha=\beta\alpha',$$

где α' — число первого рода, принадлежащее второму числовому классу, которое должно быть меньше α:

$$\alpha'<\alpha \ [\text{так как } \beta\alpha=\alpha\beta>\alpha].$$

Между α' и β' имеет место соотношение

$$\alpha'\beta=\beta\alpha'.$$

Поэтому если и $\alpha'>\beta$, то мы аналогично заключаем о существовании трансфинитного числа *первого рода* $\alpha''<\alpha'$ такого, что

$$\alpha'=\beta\alpha'', \qquad \alpha''\beta=\beta\alpha''.$$

Если и $\alpha''>\beta$, то существует подобное же число $\alpha'''<\alpha''$ такое, что

$$\alpha''=\beta\alpha''', \qquad \alpha'''\beta=\beta\alpha''',$$

и т. д.

По теореме B из § 16 последовательность убывающих чисел $\alpha, \alpha', \alpha''$, α''', ... должна *обрываться*. Поэтому для определенного конечного индекса ρ_0 будет

$$\alpha^{(\rho_0)}\leqslant\beta.$$

Если

$$\alpha^{(\rho_0)}=\beta,$$

то имеем

$$\alpha=\alpha^{\rho_0+1}, \qquad \beta=\beta.$$

Тогда теорема K была бы доказана, и мы имели бы

$$\gamma=\beta, \qquad \mu=\rho_0+1, \qquad \nu=1.$$

Если же

$$\alpha^{(\rho_0)}<\beta,$$

то, полагая

$$\alpha^{(\rho_0)}=\beta_1,$$

получаем

$$\alpha=\beta^{\rho_0}\beta_1, \qquad \beta\beta_1=\beta_1\beta, \qquad \beta_1<\beta.$$

Поэтому существует также такое конечное число ρ_1, что

$$\beta=\beta_1{}^{\rho_1}\beta_2, \qquad \beta_1\beta_2=\beta_2\beta_1, \qquad \beta_2<\beta_1.$$

Аналогично имеем вообще

$$\beta_1=\beta_2{}^{\rho_2}\beta_3, \qquad \beta_2\beta_3=\beta_3\beta_2, \qquad \beta_3<\beta_2$$

и т. д.

По теореме D из § 16 последовательность убывающих чисел β_1, β_2, β_3, ... тоже должна *обрываться*.

Значит, существует такое конечное число $\varkappa$, что

$$\beta_{\varkappa-1}=\beta_\varkappa^{\rho_\varkappa}.$$

Если мы положим

$$\beta_\varkappa=\gamma,$$

то

$$\alpha=\gamma^\mu, \qquad \beta=\gamma^\nu,$$

где μ и ν — числитель и знаменатель цепной дроби

$$\frac{\mu}{\nu}=\rho_0+\cfrac{1}{\rho_1+\cfrac{\ddots}{+\cfrac{1}{\rho_\varkappa}}}.$$

§ 20. ε-числа второго числового класса [27]

Как легко видеть из нормальной формы

$$\alpha=\omega^{\alpha_0}\varkappa_0+\omega^{\alpha_1}\varkappa_1+\ \dots,\ \alpha_0>\alpha_1>\ \dots,\ 0<\varkappa_\nu<\omega, \tag{1}$$

высший показатель α_0 числа α на основании теоремы F из § 18 никогда не больше α. Возникает, однако, вопрос о том, не существуют ли числа α, для которых $\alpha_0=\alpha$?

Тогда, во всяком случае, нормальная форма числа α должна сводиться к первому члену и им будет ω^α [так как в противном случае было бы $\alpha=\omega^\alpha\varkappa_0+\omega^{\alpha_1}\varkappa_1+\dots>\omega^\alpha$], т. е. α должно быть корнем уравнения

$$\omega^\xi=\xi. \tag{2}$$

С другой стороны, всякий корень этого уравнения имеет в качестве нормальной формы вид ω^α; его высшая степень была бы равна ему самому.

Следовательно, числа второго числового класса, равные своей высшей степени, всегда совпадают с корнями уравнения (2). Нашей задачей является определение этих корней в их совокупности. Чтобы отличить их от всех остальных чисел, мы назовем их «*ε-числами второго числового класса*».

Что такие ε-числа существуют, вытекает из следующей теоремы:

A. «*Если* γ — *какое-либо число первого или второго числового класса, не удовлетворяющее уравнению* (2), *то равенствами*

$$\gamma_1 = \omega^{\gamma},\ \gamma_2 = \omega^{\gamma_1}, \ldots,\ \gamma_\nu = \omega^{\gamma_{\nu-1}}, \ldots$$

оно определяет фундаментальную последовательность $\{\gamma_\nu\}$. *Предел* $\operatorname{Lim}_\nu \gamma_\nu = E(\gamma)$ *этой фундаментальной последовательности является ε-числом*».

Доказательство. Так как γ не является ε-числом, то $\omega^\gamma > \gamma$, т. е. $\gamma_1 > \gamma$. Поэтому по теореме B из § 18 и $\omega^{\gamma_1} > \omega^\gamma$, т. е. $\gamma_2 > \gamma_1$, и аналогично $\gamma_3 > \gamma_2$ и т. д. Последовательность $\{\gamma_\nu\}$ тем самым является фундаментальной. Ее предел, являющийся функцией от γ, мы обозначаем через $E(\gamma)$ и имеем

$$\omega^{E(\gamma)} = \operatorname{Lim}_\nu \omega^{\gamma_\nu} = \operatorname{Lim}_\nu \gamma_{\nu+1} = E(\gamma).$$

B. «*Число* $\varepsilon_0 = E(1) = \operatorname{Lim} \omega_\nu$, *где*

$$\omega_1 = \omega,\ \omega_2 = \omega^{\omega_1},\ \omega_3 = \omega^{\omega_2},\ \ldots,\ \omega_\nu = \omega^{\omega_{\nu-1}}, \ldots,$$

является наименьшим из всех ε-чисел».

Доказательство. Пусть ε' — какое-либо ε-число, так что

$$\omega^{\varepsilon'} = \varepsilon'.$$

Так как $\varepsilon' > \omega$, то $\omega^{\varepsilon'} < \omega^\omega$, т. е. $\varepsilon' > \omega_2$. Отсюда также вытекает, что $\omega^{\varepsilon'} > \omega^{\omega_2}$, т. е. $\varepsilon' > \omega_3$ и т. д.

Вообще имеем

$$\varepsilon' > \omega_\nu,$$

а потому

$$\varepsilon' \geqslant \operatorname{Lim}_\nu \omega_\nu,$$

т. е.

$$\varepsilon' \geqslant \varepsilon_0.$$

Следовательно, $\varepsilon_0 = E(1)$ является наименьшим из всех ε-чисел.

C. «*Если* ε' — *какое-либо ε-число,* ε'' — *непосредственно следующее за ним по величине ε-число, а* γ — *какое-либо число, расположенное между ними, т. е.*

$$\varepsilon' < \gamma < \varepsilon'',$$

то $E(\gamma) = \varepsilon''$».

Доказательство. Из

$$\varepsilon' < \gamma < \varepsilon''$$

следует
$$\omega^{\varepsilon'} < \omega^{\gamma} < \omega^{\varepsilon''},$$
т. е.
$$\varepsilon' < \gamma_1 < \varepsilon''.$$

Отсюда также заключаем, что
$$\varepsilon' < \gamma_2 < \varepsilon'',$$
и т. д. Вообще имеем
$$\varepsilon' < \gamma_\nu < \varepsilon'',$$
а потому
$$\varepsilon' < E(\gamma) \leqslant \varepsilon''.$$

По теореме A $E(\gamma)$ является ε-числом. Поскольку ε'' является непосредственно следующим по величине за ε' ε-числом, то не может быть $E(\gamma) < \varepsilon''$, а потому должно быть
$$E(\gamma) = \varepsilon''.$$

Так как $\varepsilon'+1$ не является ε-числом, поскольку все ε-числа, как это следует из определяющего их равенства $\xi = \omega^{\xi}$, являются числами *второго* рода, то $\varepsilon'+1$ меньше ε'', а потому имеем теорему

D. «*Если ε' — произвольное ε-число, то $E(\varepsilon'+1)$ является непосредственно следующим по величине ε-числом*».

Итак, за наименьшим ε-числом ε_0 идет непосредственно следующее по величине, которое мы обозначим через ε_1,
$$\varepsilon_1 = E(\varepsilon_0 + 1),$$
за ним — непосредственно следующее по величине
$$\varepsilon_2 = E(\varepsilon_1 + 1)$$
и т. д.

Вообще для следующего по величине $(\gamma+1)$-го ε-числа имеем рекуррентную формулу
$$\varepsilon_\nu = E(\varepsilon_{\nu-1} + 1). \qquad (3)$$

А то, что бесконечная последовательность
$$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\nu, \ldots$$
не охватывает совокупность всех ε-чисел, вытекает из такой теоремы:

E. «*Если $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \ldots$ — такая бесконечная последовательность ε-чисел, что*
$$\varepsilon < \varepsilon' < \varepsilon'' < \ldots < \varepsilon^{(\nu)} < \varepsilon^{(\nu+1)} < \ldots,$$
то и $\operatorname*{Lim}_{\nu} \varepsilon^{(\nu)}$ является ε-числом и притом непосредственно следующим по величине за всеми $\varepsilon^{(\nu)}$».

Доказательство.
$$\omega^{\operatorname*{Lim}_{\nu} \varepsilon^{(\nu)}} = \operatorname*{Lim}_{\nu} \omega^{\varepsilon^{(\nu)}} = \operatorname*{Lim}_{\nu} \varepsilon^{(\nu)}.$$

А то, что $\operatorname*{Lim}_{\nu} \varepsilon^{(\nu)}$ является непосредственно следующим по величине за всеми $\varepsilon^{(\nu)}$ ε-числом, вытекает из того, что $\operatorname*{Lim}_{\nu} \varepsilon^{(\nu)}$ есть число *второго числового класса, непосредственно следующее по величине за всеми* $\varepsilon^{(\nu)}$.

F. «*Совокупность всех ε-чисел второго числового класса, расположенных по величине, образует вполне упорядоченное множество типа Ω второго числового класса в его упорядочении по величине, а потому имеет мощность алеф-один*».

Доказательство. По теореме C из § 16 совокупность всех ε-чисел второго числового класса при их расположении по величине образует вполне упорядоченное множество

$$\varepsilon_0, \ \varepsilon_1, \ \ldots, \ \varepsilon_\nu, \ \ldots, \ \varepsilon_\omega, \ \varepsilon_{\omega+1}, \ \ldots, \ \varepsilon_{\alpha'}, \ \ldots, \qquad (4)$$

закон образования которого высказан в теоремах D и E.

Если бы теперь индекс α' не пробегал всех чисел второго числового класса, то можно было бы задать наименьшее число α, которого он не достигал бы. А это противоречит теореме D если α первого рода, и теореме E, если α второго рода. Поэтому α пробегает все числовые значения второго числового класса.

Если мы обозначим через Ω тип второго числового класса, то тип множества (4) будет

$$\omega+\Omega=\omega+\omega^2+(\Omega-\omega^2).$$

Но так как $\omega+\omega^2=\omega^2$, то отсюда следует, что

$$\omega+\Omega=\Omega.$$

А потому и

$$\overline{\overline{\omega+\Omega}}=\overline{\overline{\Omega}}=\aleph_1.$$

G. «*Если ε — какое-либо ε-число, а α — произвольное число первого или второго числового класса, которое меньше чем ε,*

$$\alpha<\varepsilon,$$

то ε удовлетворяет трем уравнениям:

$$\alpha+\varepsilon=\varepsilon, \ \alpha\varepsilon=\varepsilon, \ \alpha^\varepsilon=\varepsilon.$$

Доказательство. Если α_0 есть высшая степень числа α, то $\alpha_0 \leqslant \alpha$, поэтому ввиду $\alpha<\varepsilon$ имеем и $\alpha_0<\varepsilon$. Но высшая степень числа $\varepsilon=\omega^\varepsilon$ равна ε; поэтому α имеет меньшую высшую степень, чем ε, а значит, по теореме D из § 19

$$\alpha+\varepsilon=\varepsilon,$$

а потому и

$$\alpha_0+\varepsilon=\varepsilon.$$

С другой стороны, по формуле (13) из § 19 имеем

$$\alpha\varepsilon=\alpha\omega^\varepsilon=\omega^{\alpha_0+\varepsilon}=\omega^\varepsilon=\varepsilon,$$

а потому и

$$\alpha\varepsilon=\varepsilon.$$

Наконец, принимая во внимание формулу (16) из § 19, имеем

$$\alpha^{\varepsilon}=\alpha^{\omega^{\vartheta}}=\omega^{\alpha_0\vartheta}=\omega^{\varepsilon}=\varepsilon.$$

H. «*Если* α — *какое-либо число второго числового класса, то уравнение*

$$\alpha^{\xi}=\xi$$

не имеет других корней, кроме ε-*чисел, бо́льших* α».

Доказательство. Пусть β — корень уравнения

$$\alpha^{\xi}=\xi,$$

а значит,

$$\alpha^{\beta}=\beta.$$

Непосредственно из последней формулы вытекает, что

$$\beta>\alpha.$$

С другой стороны, β должно быть числом второго рода, так как в противном случае было бы

$$[\alpha^{\beta}=\alpha^{\beta'+1}=\alpha^{\beta'}\alpha>\alpha^{\beta'}2\geqslant\beta'2\geqslant\beta'+1=\beta, \text{ т. е.}]$$

$$\alpha^{\beta}>\beta.$$

Поэтому по теореме F из § 19 имеем

$$\alpha^{\beta}=\omega^{\alpha_0\beta},$$

а значит,

$$\omega^{\alpha_0\beta}=\beta.$$

По теореме F из § 18 имеет место

$$\omega^{\alpha_0\beta}\geqslant\alpha_0\beta,$$

поэтому

$$\beta\geqslant\alpha_0\beta.$$

Но не может быть $\beta>\alpha_0\beta$; потому

$$\alpha_0\beta=\beta,$$

а значит,

$$\omega^{\beta}=\beta.$$

Следовательно, β является ε-числом, которое больше α.

[Примечания]

Настоящая работа, появившаяся в двух частях на протяжении двух лет,— последняя публикация Кантора по теории множеств,— является подлинным завершением труда его жизни. Те основные понятия и идеи, которые он постепенно развивал в течение десятилетий, получили здесь их окончательную формулировку, а многие фундаментальные теоремы «общей» теории множеств впервые нашли свое классическое обоснование. Отвлекаясь от некоторых несовершенств и неясностей в обосновании, отдельные из которых будут указаны, приходится лишь очень пожалеть, что вследствие наруше-

ний здоровья и реальных трудностей предмета Кантору не удалось представить этот труд в задуманном виде, так что и эта последняя публикация, подобно работе 1.5 о точечных множествах, осталась в некотором смысле незаконченной. Как там оказалась недостигнутой конечная цель — доказательство того, что континуум имеет вторую мощность, так и здесь отсутствует венчающее учение о мощностях доказательство утверждения, что всякое множество можно вполне упорядочить, а значит, что всякая мощность является алефом [7].

[1] (к § 1). Под «подмножеством» Кантор понимает здесь лишь собственное подмножество, отличное от самого множества. Да и определение «суммы множеств» ограничено (напрасно) случаем множеств без общих элементов (непересекающихся) в противоположность введенному ранее (I.5.2) «наименьшему общему кратному».

Попытка внешне объяснить процесс абстракции, приводящей к «кардинальному числу», тем, что кардинальное число рассматривается как «множество, образованное исключительно из единиц», была неудачной. Действительно, если все единицы, как это все же должно быть, *отличаются* друг от друга, то они уже не являются элементами некоторого вновь введенного и эквивалентного с первым множества, и в нужной далее абстракции мы не можем сделать никакого очередного шага.

[2] (к § 2, теорема B). Здесь перед нами так называемая теорема эквивалентности в более четкой формулировке, которая теперь, после доказательства ее Ф. Бернштейном и другими, является одной из важнейших и элементарнейших основных теорем общей теории множеств. См.: *Hausdorff F.* Grundzüge der Mengenlehre. Kap. 3, § 2 [8]. Здесь эта основополагающая теорема появляется как следствие общей теоремы A, в которой утверждается «сравнимость» произвольных множеств; однако последняя, как мы знаем теперь, значительно менее элементарна и может быть доказана только с помощью вполне упорядочения. Из остальных приведенных здесь «следствий» теорема C равнозначна теореме B и часто доказывается *до* нее, тогда как D и E нуждаются в общей «сравнимости».

[3] (к § 4, абзац 1). Следовательно, под «покрытием» множества N элементами множества M Кантор понимает функцию $m=f(n)$, «область изменения» которой образована множеством N, а «область значений»—множеством M, или, выражаясь иначе, однозначное (не обязательно взаимно однозначное) отображение множества N на некоторую часть (собственную или нет) множества M.

[4] (к § 5). Развитая здесь теория *конечных* кардинальных чисел (как и следующая за ней в § 6 теория кардинального числа алеф-нуль), если мерить ее современными мерками, довольно уязвима, так как еще отсутствует необходимая основа такой теории — четкое понятийное *определение* конечных множеств, которое вообще можно получить лишь на высокой ступени общей теории, например, с помощью вполне упорядочения. Так, например, на с. 182 употребляется закон «полной индукции» без того, чтобы сначала была обоснована его справедливость. Этот закон другие авторы, например Д. Пеано, правильнее применили для *определения* последовательности чисел.

[5] (к § 6). Так как здесь «наименьшее трансфинитное число» определяется при помощи «совокупности всех конечных чисел» без того, чтобы последние были определены (в § 5) удовлетворительно, то и теперь отсутствует надлежащее понятийное основание теории. Тем не менее требующееся кардинальное число достаточно определить через *наименьший отрезок вполне упорядоченного* (трансфинитного) *множества, не имеющего последнего элемента*. Разумеется, для этого нужно было бы исходить из предварительно развитой *общей теории вполне упорядоченных* множеств. Характер этого (как

и предыдущего) параграфа обусловлен избранным порядком, в соответствии с которым самое элементарное (внешне) должно и излагаться раньше, в то время как для его безупречного обоснования требуется как раз *общая* теория.

[6] (к § 6). «Доказательство» теоремы A, являющееся чисто наглядным и логически уязвимым, напоминает известную примитивную попытку установить *вполне упорядочение* предложенного множества путем последовательного удаления произвольных элементов. Корректное ее доказательство мы получаем лишь тогда, когда исходим из предварительно *вполне упорядоченного* множества, и в этом случае его наименьший трансфинитный отрезок действительно обладает требуемым кардинальным числом $\aleph_0$ [9].

[7] (к § 6). Для доказательства формулы (8) см. соответствующую конструкцию в доказательстве теоремы C′ в работе I.3 и примечание издателя.

[8] (к § 6). Теоремы C и D, «доказанные» здесь (чисто наглядно, а потому неудовлетворительно), служат у Дедекинда («Was sind und was sollen die Zahlen?») [10] и других авторов просто для понятийного определения «конечных» и «бесконечных» множеств.

[9] (к § 6). Данное здесь обещание, относящееся *к полной системе* всех трансфинитных чисел в их естественном построении, Кантор не сдержал. Его собственные исследования (во второй части настоящей работы) не выходят за пределы «второго числового класса», а значит, простираются лишь до алеф-один, хотя примененные им методы можно распространить значительно дальше. Причина этого упущения заключается, по-видимому, с одной стороны, в еще отсутствовавшем доказательстве того, что всякая мощность является алефом, а с другой — в том, что у Кантора уже возникли скептические соображения против понятия «всех» порядковых или кардинальных чисел на основании ставшей известной ему «антиномии Бурали-Форти» и это могло побудить его к неоправданному ограничению своих исследований. Об этом см. также письменное объяснение в «Приложении», с. 433 и след. [11].

[10] (к § 7). Здесь впервые с полной ясностью развито фундаментальное понятие «порядкового типа» (просто упорядоченных множеств), хотя его попытка сделать это понятие наглядным при помощи множества, состоящего «исключительно из единиц», не достигает цели, как и в случае кардинального числа в § 1 данной работы. Корректное определение должно опираться на понятие «подобного отображения», а порядковый тип следует определять как тот «инвариант» этой группы отображений, какой упорядоченное множество имеет общим со всеми «подобно» упорядоченными множествами, аналогично тому, как «кардинальное число» есть то, что множество имеет общим со всеми «эквивалентными» ему множествами. Фреге, Рассел и другие хотят определить кардинальное, соответственно порядковое, число как «класс» или «объем понятия» всех множеств, эквивалентных, соответственно подобных, заданному множеству. Однако поскольку «класс», как известно (см. «Приложение», с. 433 и след.) [12], не является настоящим «непротиворечивым» *множеством*, то при таком определении уже с самого начала возникает необходимость (всегда отклонявшаяся Расселом) проводить различие между «множествами» и «классами».

[11] (к § 7). Здесь указывается на возможность «автоморфизмов», т. е. подобных отображений упорядоченного множества на себя, отличных от тождества.

[12] (к § 7, предпосл. абзц.) [13]. То, что порядковый тип охватывает вообще *всё* «числоподобное» и не допускает «никакого дальнейшего обобщения», кажется все же несколько произвольным утверждением. Приходится учитывать, что́ понимается под

«числоподобным», а это является чисто субъективным представлением. Кантор под этим понимает как раз порядковый тип, но под этим можно было бы с тем же правом понимать и кардинальное число или что-либо другое.

[13] (к § 9, с. 194). В этом параграфе наряду с однозначной характеристикой типа η содержится очень красивый и, пожалуй, неожиданный результат. Доказательство ясно и корректно. Лишь на с. 306, строка 6 сверху, где говорится «как легко убедиться» [14], читатель встретит некоторое затруднение. По этому поводу можно заметить следующее. Элементы $r_{\lambda+1}$, $r_{\lambda+2}$, ..., $r_{\lambda+\sigma-1}$ расположены вне частичного интервала, определяемого элементами r_1, r_2, ..., r_λ, в котором должен располагаться $r_{\lambda+\sigma}$, т. е. частью перед, а частью после этого интервала. Но тогда и соответствующие элементы $m_{\iota_{\lambda+1}}$, $m_{\iota_{\lambda+2}}$, ..., $m_{\iota_{\lambda+\sigma-1}}$ расположены частью перед, а частью после соответствующего интервала, определяемого элементами m_{ι_1}, m_{ι_2}, ..., m_{ι_λ}, в котором расположен элемент $m_{\nu+1}$, а значит, они находятся к последнему в таком же отношении, в каком $r_{\lambda+1}$, ..., $r_{\lambda+\sigma-1}$ находятся к $r_{\lambda+\sigma}$.

[14] (к § 10). Понятия «плотный в себе», «замкнутый» и «совершенный» в применении к порядковым типам не совсем совпадают с соответствующими понятиями теории точечных множеств, в которой они имеют лишь *относительное* значение, связаны с заранее данным континуумом, в который вложены рассматриваемые точечные множества. Точечное множество называется «замкнутым», если оно содержит все те точки *континуума*, которые являются «предельными точками» или «точками сгущения» этого точечного множества. Напротив, здесь речь идет о некотором *внутреннем* свойстве порядкового типа: он называется «замкнутым», если всякая «фундаментальная последовательность», образованная в нем, имеет «предельный элемент». Замкнутое точечное множество в ограниченном (конечном) интервале линейного континуума (включая концы) обязательно имеет и «замкнутый» порядковый тип, так как всякой его «фундаментальной последовательности» соответствует «точка сгущения» в континууме, а тем самым и предельная точка в нем. Обратное же не обязательно: точечное множество M «замкнутого» порядкового типа может оказаться «незамкнутым». Таково, например, множество точек с координатами $1-1/\nu$ ($\nu=1, 2, \ldots$) вместе с точкой 2 в интервале (0, 2), которое хотя и обладает «замкнутым» порядковым типом $\omega+1$, но не содержит свою точку сгущения 1. См. здесь с. 193, 226, 228 [15].

[15] (к § 11). Из двух свойств, при помощи которых Кантор характеризует порядковый тип линейного континуума, основополагающим является свойство, обозначенное им через 2) и представляющее собой подлинное открытие Кантора: существование в M «всюду плотного» счетного подмножества S. Менее удачной нам кажется его формулировка свойства 1), посредством которого множество выделяется как «совершенное», ибо было бы уже достаточно «замкнутости». В самом деле, оно «плотно в себе» вследствие свойства 2), так как каждый элемент множества M одновременно является и «предельным элементом» множества S, а тем самым и M. Но, главное, канторовское определение «предельного элемента» при помощи «фундаментальных последовательностей», которое, очевидно, связано с его теорией иррациональных чисел (см. 1.5.5, § 9), приводит к ненужным усложнениям. Было бы много проще охарактеризовать множество как «непрерывное» или лучше как «не имеющее щелей» по Дедекинду (*Hausdorff F.* Grundzüge... Kap. 4, § 5) [16] через такое свойство: при всяком «сечении», т. е. при всяком разложении (простого упорядоченного) множества M на «отрезок» A и «остаток» B (см. § 13), *или* отрезок A имеет наивысший элемент, *или* остаток B — наиниз-

ший. Одновременное наличие того и другого исключается в случае линейного континуума свойством 2). При помощи такой модификации свойства 1) упрощается и доказательство однозначности. После того как подмножество S отображено, как это сделано у Кантора, на множество R рациональных чисел типа η, всякий другой элемент m множества M характеризуется некоторым «сечением» множества S и взаимно однозначно отображается на элемент x множества X, определяемый посредством соответствующего «сечения» множества R. Следовательно, теперь оказывается ненужным применение «перемежающихся фундаментальных последовательностей».

[16] (к § 12). «Вполне упорядоченное» множество проще всего, видимо, охарактеризовать как такое «просто упорядоченное» множество, у которого всякий остаток имеет наинизший элемент, тогда как (кажущееся более простым) свойство А (§ 12), а именно: *всякое подмножество* обладает наинизшим элементом, лучше, вместе с Кантором, получать как *доказуемое* следствие, так как оно повторяет «транзитивность», уже содержащуюся в «простом упорядочении».

[17] (к § 13). Теоремы А—М этого параграфа большей частью лишь леммы к доказательству «теоремы о подобии» N, являющейся вершиной элементарной теории вполне упорядоченных множеств. Однако теоремы В—F можно доказать проще, чем у Кантора, если предварительно установить одну общую (восходящую к издателю) *лемму*: «*ни при каком* подобном отображении вполне упорядоченного множества на свою часть элемент a не отображается на предшествующий ему элемент $a'<a$» (см.: *Hessenberg G.* Grundbegriffe der Mengenlehre, § 33, теорема XX, а также: *Hausdorff F.*— Ibid., Kap. 5, § 2) [17].

[18] Формулы (12) и (13) из § 14 получаются из определения разности (10), поскольку $(\gamma+\alpha)+(\beta-\alpha)=\gamma+(\alpha+\beta-\alpha)=\gamma+\beta$ и $\gamma\alpha+\gamma(\beta-\alpha)=\gamma(\alpha+\beta-\alpha)=\gamma\beta$.

[19] (к § 14, с. 215). Здесь опять сказывается отсутствие четкого определения понятия «конечного» множества. В этой связи следовало бы определить «конечное» множество как вполне упорядоченное множество, у которого как оно само, так и каждый его отрезок имеют последний элемент, или же как упорядоченное множество, у которого всякое подмножество содержит как первый, так и последний элементы. Затем нужно было бы показать, что это свойство не зависит от выбранного упорядочения и всякое такое множество может быть упорядочено только по одному типу, определяемому через его кардинальное число. Ср. здесь § 5 (с. 289) и примеч. [4] [18].

[20] (к § 15, с. 217). Множество G счетно как сумма счетного множества счетных, соответственно конечных, множеств.

[21] (к § 16). Ввиду теоремы В из § 12 для доказательства теоремы А достаточно показать, что всякое подмножество J множества $\{\alpha\}$ содержит наименьшее число α'. Пусть α_0 — число из J, не являющееся наименьшим. Тогда все числа $\alpha<\alpha_0$ из J принадлежат отрезку A_{α_0}, определяемому числом α_0, который по теореме Н из § 15 является вполне упорядоченным множеством типа α_0, а потому сам является вполне упорядоченным множеством с наименьшим элементом α', который вследствие $\alpha'<\alpha_0<\beta$ предшествует и каждому, например, не принадлежащему A_α, элементу β из J, а значит, во всяком случае не может быть наименьшим элементом множества J вообще.

[22] (к § 16). Доказательство теоремы D тоже проще свести к теореме Н из § 15. Если бы вполне упорядоченное по теореме А множество $\{\alpha\}$ было счетным, то оно оставалось бы таковым и после добавления всех чисел первого числового класса, а получающееся при этом вполне упорядоченное множество S имело бы в качестве порядкового типа некоторое число σ второго числового класса, так что соответствующий

отрезок A_σ имел бы по теореме H из § 15 порядковый тип, равный σ. Следовательно, все множество S было бы подобно своему отрезку, вопреки теореме B из § 13.

[23] (к § 17). В этом параграфе речь идет об одном частном случае развитой затем в § 19 общей «нормальной формы» чисел второго числового класса. Различие состоит лишь в том, что все показатели степени α_0, α_1, ... в теореме B из § 19 здесь берутся *конечными*. Представление в виде произведения (9) из § 17 тоже получается из теоремы G в § 19 соответствующей специализацией. Очевидно, что для Кантора изучение частного случая для нахождения общей формы представления было правилом.

[24] (к § 18). Введение нового *понятия степени*, которое существенно отличается от введенного ранее для кардинальных чисел, впервые позволяет развить формально арифметическую теорию трансфинитных порядковых чисел, и притом не только для второго числового класса. Примененный здесь для его введения метод «определения при помощи трансфинитной индукции» (*Hausdorff.*— Ibid., Kap. 5, § 3) стал с тех пор обиходным для всех подобных трансфинитных конструкций. В частности, введенная здесь функция $f(\xi)$ имеет характер «нормальной функции» (*Hausdorff.*— Ibid., S. 114) — понятия, оказавшегося позднее одним из важнейших во всей теории трансфинитных порядковых чисел [19].

[25] (к § 19). Здесь $\alpha_1 < \alpha_0$, так как в противном случае было бы

$$\alpha = \omega^{\alpha_0}\varkappa_0 + \omega^{\alpha_1}\varkappa_1 + \alpha'' \geqslant \omega^{\alpha_0}(\varkappa_0 + \varkappa_1) + \alpha'' \geqslant \omega^{\alpha_0}(\varkappa_0 + 1),$$

вопреки предположению (2).

[26] (к § 19). Доказательство теоремы K существенно опирается на *однозначность представления в форме произведения* (теорема G) и вытекающее из нее существование (левого) «наименьшего общего делителя» двух трансфинитных чисел α, β в форме $\alpha = \delta\alpha'$, $\beta = \delta\beta'$. Если для двух таких чисел α, β первого рода было бы $\alpha\beta = \beta\alpha$, то прежде всего получается, что большее из них должно делиться на меньшее, т. е. $\alpha = \beta\alpha'$. Но тогда и α' «перестановочно» с β и $\alpha' < \alpha$, так как из-за $\beta > 1$ здесь имеет место соотношение $\beta\alpha = \alpha\beta > \alpha$. Следовательно, всякой числовой паре α, β, обладающей рассматриваемым свойством, соответствует некая «меньшая» пара $\alpha'\beta$ (в которой *большее* из двух чисел меньше, чем в первой паре) с таким же свойством, и если меньшая пара имеет искомое представление γ^μ, γ^ν, то это же самое верно и для самой пары α, β. Теперь если бы не существовала пара трансфинитных чисел α, β с указанным свойством, непредставимая таким образом, то среди подобных пар существовала бы наименьшая (пара с наименьшим $\alpha > \beta$), а это противоречило бы только что доказанному. Следовательно, это простое соображение позволяет существенно упростить канторовское доказательство.

[27] (к § 20). Канторовские ε-числа в современной терминологии суть не что иное, как «критические числа» специальной «нормальной функции» $f(\xi) = \omega^\xi$ (см.: *Hausdorff.*— Ibid., Kap. 5, § 3) [20], и их теория тем самым стала существенной для всей современной теории нормальных функций, благодаря чему они получили значение, выходящее далеко за пределы их первоначальной роли. Весь ход мыслей этого параграфа, включая теорему F, можно без труда перенести на «критические числа» любой нормальной функции.

II
РАБОТЫ ПО ФИЛОСОФСКИМ ВОПРОСАМ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1. ПРИНЦИПЫ ТЕОРИИ ПОРЯДКОВЫХ ТИПОВ. ПЕРВОЕ СООБЩЕНИЕ * [1]

...Позвольте сообщить отдельные замечания, которые пришли мне на ум при чтении реферата г-на Жюля Таннери (Bull. sci. math. et astron., 1884, vol. 8_2; Revue, p. 136—171) [2] части моих работ, а также осмелиться — после того, что я уже сказал об относящихся к этому вопросу вещах в моем письме от 20 октября с. г., — осуществить до конца мой замысел в данном письме, ибо вчера я получил окончание рецензии в только что вышедшем октябрьском выпуске журнала. Если, как Вы намереваетесь, во время Вашего пребывания в Париже встретитесь с г-ном Жюлем Таннери, то прошу Вас передать ему мою самую искреннюю благодарность за то, что он написал этот реферат, а также за расположение, высказанное в нем ко мне и моим работам.

§ 1

Я чувствую себя обязанным г-ну Таннери за то, что в различных местах его критического обзора он придает моим исследованиям *философское* и даже *метафизическое* значение; я рассматриваю это как похвалу и честь.

Действительно, я не принадлежу к числу тех, кто из-за различных неудач, постигших *метафизику* вследствие ошибок некоторых ее представителей, особенно в нынешнем и прошлом столетиях, невысоко ценит эту науку. Я считаю, что *метафизика* и *математика* по праву должны находиться во взаимосвязи и что в периоды их решающих успехов они находятся в братском единении.

Затем, как показывала история до сих пор, к несчастью, между ними, обычно очень скоро, начинается ссора, которая длится в течение ряда поколений и которая может разрастись до того, что враждующие братья уже не знают, да и не хотят знать, что они всем обязаны друг другу.

Однако не случится ли по этой причине, что явно доброжелательное подчеркивание *философской* стороны моих исследований, отчетливо выступающее в критике г-на Таннери, хотя оно и не рассчитано на это, приведет к тому, что те из современных математиков, которые первона-

---

* Principien einer Theorie der Ordnungstypen. Erste Mitteilung: Auszug eines Schreibens an den Herausgeber (6. Nov. 1884).— Acta math., 1970, vol. 124, p. 83—101. Перевод Ф. А. Медведева.

чально относились к моим работам враждебно, не пожалеют труда, чтобы по возможности все же разобраться в их *математическом* содержании?

Поэтому я полагаю, что г-н Таннери не будет в претензии на меня, если в нижеследующем я попытаюсь пояснить мои исследования с целью предупредить ошибочное их понимание, появления которого он, разумеется, не хотел.

§ 2

Действительные целые числа 1, 2. 3, ... образуют относительно *очень малую разновидность объектов мысли*, которые я называю *порядковыми типами* или просто *типами* (от δ τὺποζ); {они родственны платоновским ὰριθμοὶ νοητοὶ или εἰδηιχοἰ, с которыми они, возможно, даже полностью совпадают)} [3]. Поэтому та дисциплина, которую сегодня называют «высшей арифметикой» (Théorie des nombres), является *сравнительно малой составной частью*, или, если угодно, только *началом, введением* в чрезвычайно обширное и богатое приложениями учение, которое я называю «теорией порядковых типов» (theoria typorum ordinalium) или, короче, «теорией типов». {Это та теория, которую, как Вы знаете, я подготовил два года тому назад для «Acta mathematica» и о которой до сих пор я сообщал Вам *лишь мимоходом* и под не совсем точным наименованием «теории трансфинитных чисел».}

Те же объекты мысли, которые я называю трансфинитными или сверхконечными числами, являются лишь частными случаями порядковых типов. А именно они являются типами вполне упорядоченных множеств. (Ср.: Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, S. 4 und ff.) [4].

Мне кажется, что общая *теория типов* многообещающая во всех отношениях.

Она образует большую и важную часть общей теории множеств (Théorie des ensembles), а значит и *чистой математики*, ибо последняя, по моему разумению, есть не что иное, как *общая теория множеств.*

Она далее находится в тесной связи с остальными частями как *общей*, так и *прикладной теории множеств*, вроде, например, *теории точечных множеств, теории функций* и *математической физики.*

Под *прикладной теорией множеств* я понимаю то, что обычно называют *учением о природе* или *космогонией*, а значит, к ней относятся все так называемые естественные науки, связанные с *неорганическим* и *органическим* мирами.

Что касается *теории функций*, то с помощью *теории типов* в ней можно ответить на возникающие вопросы, к которым вообще нельзя подступить с известными до сих пор вспомогательными средствами.

Математическая физика тоже соприкасается с теорией типов, ибо последняя оказывается сильным и радикальным инструментом для проникновения в суть так называемой материи и ее понятийного построения.

С этим же связана и применимость *теории типов* в *химии*. Однако здесь указанную теорию типов не следует смешивать с одноименной теорией Жерара, которому химия обязана ее современным обликом, хотя последняя уже давно признается не в ее первоначальной форме, а должна была подвергнуться значительным преобразованиям, в чем, по-моему, она разделяет судьбу всех предшествующих и будущих теорий, построенных на *химической атомистике* [5]. *Моя* теория имеет с нею общим лишь наименование.

Но особенно интересными мне кажутся применения *математической теории типов* к изучению и исследованию области *органического*.

Поэтому я и хочу, по возможности короче, рассмотреть в последующих параграфах *принципы теории порядковых типов*.

§ 3

Всякому хорошо определенному *множеству элементов*, какова бы ни была природа последних (однородные они или неоднородные, простые или составные), соответствует определенная *мощность*, которую я называю и *валентностью*.

Чтобы определить *мощность* некоторого множества, *заданного при помощи определения*, обращаются к *понятию отношения эквивалентности*. А именно *два* множества называют *эквивалентными*, если их можно поставить во *взаимно однозначное поэлементное соответствие друг с другом*.

Под *мощностью* или *валентностью* заданного множества M я понимаю то *общее понятие* (родовое понятие, категорию), *под которое подпадают все множества, эквивалентные* M, *и только они* (а потому и само M).

Об эквивалентных множествах я говорю также, что они принадлежат *одному и тому же классу мощностей*. Следовательно, *класс* множества M есть не что иное, как *объем* (это слово берется в смысле школьной логики как «ambitus») того соответствующего множеству M общего понятия, которое я назвал *мощностью множества* M.

В соответствии с этим *мощность* множества M определяется как то *общее*, что присуще всем множествам, *эквивалентным* M, и только им, а потому и самому M. Она есть representatio generalis, τὸ ἐν παρὰ τὰ πολλά [6] для всех множеств *того класса, к которому принадлежит* M. Она поэтому кажется мне *самым изначальным, простейшим основным понятием* как в *психологическом*, так и *методологическом* планах, возникающим путем *абстрагирования* от всех особенностей, которые может представить множество *определенного класса* как по отношению к свойствам его элементов, так и относительно связей и расположения, которые могут иметь *эти элементы друг к другу* внутри множества или же к вещам, *расположенным вне этого множества*. Тем, что мы мыслим только о том, *что является общим для всех множеств, принадлежащих одному и тому же классу*, мы получаем понятие *мощности* или *валентности*.

Слово «мощность», возможно, лучше всего передать на греческом языке словами «τὸ χράτος», на латыни — «potestas» или «plenitudo», на французском — «puissance» или новообразованием «valence», на английском — «power» или «mightiness», на итальянском — «podesta» [7].

В «Основах» я доказал (или, скорее, полностью указал путь и средство для доказательства), что *различные мощности бесконечных множеств* образуют возрастающую *абсолютно бесконечную последовательность*, строящуюся *по тому же самому типу*, как и сами *реальные, конечные и бесконечные, целые числа.* Чем больше вникаешь в смысл и содержание этого утверждения, тем больше приходится удивляться *природе* в ее *непостижимом величии.* (Ср. «Основания», с. 37 и примеч. 2 на с. 43 и 44.) [8].

§ 4

Под *просто упорядоченным множеством* я понимаю множество, *все* элементы которого или *вследствие их природы*, или в силу некоторого *условного закономерного отношения* размещены относительно друг друга в *определенное расположение по рангу*, благодаря чему из *любых двух* элементов множества один имеет *более низкий*, или *предшествующий*, ранг, а другой — *более высокий*, или *последующий*, и, далее, для *любых трех произвольно взятых* элементов e, e', e'' выполняется условие, что если e имеет более низкий ранг, чем e', а e' — более низкий ранг, чем e'', то ранг у e всегда ниже ранга элемента e''.

Два просто упорядоченных множества я называю *подобными друг другу*, если их можно сопоставить друг с другом *взаимно однозначно* и *полно* таким образом, что расположение в отношении ранга *любых двух* элементов *одного* упорядоченного множества является тем же самым, как и расположение двух *соответствующих им* элементов другого упорядоченного множества. Такое отношение двух упорядоченных множеств мы будем выражать и словами: *их можно отобразить друг на друга* [9].

Теперь всякое *просто упорядоченное множество* имеет определенный *порядковый тип* или, как я буду говорить короче, определенный *тип.* Под этим я понимаю то *общее понятие, под которое попадают все упорядоченные множества, подобные заданному упорядоченному множеству, и только они* (*значит, и само заданное множество*). *Типы конечных просто упорядоченных множеств* суть не что иное, как *конечные целые числа* 1, 2, 3, ...

Тот порядковый тип, которому принадлежит, например, множество рациональных чисел вида $1-1/\nu$ (упорядоченных по величине), я обозначаю, как известно, буквой ω.

Для *порядкового типа*, который задается, например, рациональными числами >0 и <1 в их *естественном упорядочении* (так что *меньшему* приписывается *более низкий* ранг, чем *большему*), я в моем сочинении «Théorie des Types d'Ordre», предназначенном для «Acta mathematica», ввел знак η [10].

Тот порядковый тип, который представляется, например, совокупностью всех действительных, т. е. рациональных и иррациональных, чисел >0 и <1 в их естественной последовательности, я обозначаю буквой θ.

Для пояснения всего этого хочу сказать следующее.

Можно доказать и притом с помощью тех же самых соображений, которыми я пользовался в «Acta math.», т. 4, с. 383 [здесь с. 147] и в «Math. Ann.», т. 23, с. 482 и далее [здесь с. 133—135] при рассмотрении одного родственного вопроса, что всякое линейное точечное множество P, *всюду плотное* на всем интервале $(a \dots b)$ и *первой* мощности, которому *не* принадлежат концы интервала a и b, можно получить как *монотонно возрастающую* однозначную функцию того точечного множества, порядковый тип которого мы только что обозначили через η. Поэтому оба эти упорядоченные множества подобны друг другу, и мы можем, следовательно, высказать теорему, что *всякое точечное множество* P указанного вида имеет тип η.

Так, в соответствии с этой теоремой совокупность, например, всех действительных *алгебраических чисел* в их *естественном* порядке имеет тип η. {Можно даже доказать, идя тем же путем, следующую теорему, в которой не делается предположения *о характере элементов*, образующих множество: если $\mathfrak{M}$ — *просто упорядоченное* множество *первой мощности*, не имеющее ни самого низкого, ни самого высокого по рангу элементов и обладающее тем свойством, что между *любыми двумя* его элементами e и e' всегда имеется *бесконечное* число расположенных по рангу других элементов, то $\mathfrak{M}$ имеет порядковый тип η.} Напротив, как легко доказать, множество всех *рациональных* чисел, которые $\geqslant 0$ и <1, имеет *другой* тип, который (по даваемому определению суммы двух типов) следует обозначать через $1+\eta$. Равным образом множество всех рациональных чисел, которые >0 и $\leqslant 1$, имеет тип $\eta+1$. Наконец, множество всех рациональных чисел, которые $\geqslant 0$ и $\leqslant 1$, имеет тип $1+\eta+1$.

Из наших определений следует, что два *упорядоченных* множества *одного и того же* типа eo ipso [11] имеют *одинаковую мощность*, а значит, принадлежат *одному и тому же классу мощностей*. Напротив, два *просто упорядоченных* множества одного и того же класса мощностей вообще имеют различные типы. {Типы *конечных* просто упорядоченных множеств, совпадающие с целыми конечными числами 1, 2, 3, ..., образуют *первый класс типов*; типы просто упорядоченных множеств *первой* мощности образуют то, что я называю *вторым классом типов*, типы *второй* мощности — то, что я называю *третьим классом типов* и т. д.}

Для типов просто упорядоченных множеств, которые я называю *линейными типами*, многое вытекает из того, что *всякий тип вообще* определяет некий отличный от него *другой* тип, который я называю *обратным* первому, — это тип *того* упорядоченного множества, которое получается из *заданного* упорядоченного множества тем, что *расположение по рангу всех его элементов всюду обращено*. Если α — знак какого-либо типа, то *обратный ему* тип я обозначаю через

$$\alpha_*.$$

Очевидно, что

$$\alpha_{**}=\alpha.$$

Так, например,

$$(\eta+1)=(1+\eta)_*; \quad (1+\eta)=(\eta+1)_*.$$

Очевидно, что множество рациональных чисел вида $1+1/\nu$, если их рассматривать расположенными по величине, имеет тип ω_*.

Что *обратные типы* могут и *совпадать*, видно из типа каждого *конечного* упорядоченного множества, а также из типов $\eta=\eta_*$; $(1+\eta+1)=(1+\eta+1)_*$; равным образом

$$\theta=\theta_*; \quad (\theta+1)=(1+\theta)_*; \quad (1+\theta)=(\theta+1)_*; \quad (1+\theta+1)=(1+\theta+1)_*.$$

§ 5

Из *просто упорядоченных* множеств особыми свойствами выделяются те, которые в «*Основах*» § 2, с. 4 [здесь с. 67] я назвал *вполне упорядоченными* множествами. Их *порядковые типы* я вообще называю реальными целыми числами (ἀριθμοί); при этом *порядковые типы конечных вполне упорядоченных* множеств я называю *конечными* или *финитными* числами, а *порядковые типы бесконечных вполне упорядоченных* множеств — *бесконечными, сверхконечными* или *трансфинитными числами.*

Те *трансфинитные числа*, которые являются *порядковыми типами вполне упорядоченных* множеств *первой* мощности, образуют *вместе совокупность чисел*, которую я называю *вторым числовым классом. Мощность этой* системы трансфинитных чисел, как я показал в § 12 и 13 «Основ», есть в точности *вторая мощность.*

Равным образом те *трансфинитные числа*, которые являются *порядковыми типами вполне упорядоченных* множеств *второй* мощности, образуют вместе *третий числовой класс*, который, как легко показать при помощи тех же средств, имеет *в точности третью мощность.* Так продолжается и далее.

Применимость трансфинитных чисел в *теории множеств* и в *теории функций достаточно* подтверждается как *Вашей содержательной работой* «Sur la représentation analytiques des fonctions monogènes uniformes d'une variable indépendente» в «Acta math.», т. 4, с. 1, так и моими предшествующими работами о точечных множествах в «Acta math.», т. 2 и 4, и в «Math. Ann.», т. 15, 17, 20, 21, 23 [12]. Если возникает вопрос о *решающем критерии* того, является ли некоторое *реальное целое число* α *конечным* или же оно *трансфинитно*, то таковой состоит в том, что для *конечных чисел обратные* им типы *совпадают* с ними, так что

$$\alpha=\alpha_*,$$

тогда как для *трансфинитных чисел* это равенство *никогда* **не имеет места.**

Что это равенство может случиться для типов бесконечных упорядоченных, но не вполне упорядоченных множеств, мы видели на нескольких примерах из § 4.

Отображение двух *подобных друг другу упорядоченных* множеств (как мы определили его в § 4) *вообще* возможно *многими* и даже *бесконечно многими способами,* и относительно *всякого порядкового типа* возникает вопрос: *сколькими способами* он может рассматриваться как *подобный самому себе* и *как эти* вообще *многие способы связаны* друг с другом?

{Для *чисел*, будь то *конечные* или же трансфинитные (следовательно, для порядковых типов *вполне упорядоченных* множеств), справедлива легко доказуемая теорема, что каждое из них *подобно самому себе* лишь *единственным образом.* Она справедлива и для типов, обратных числам, например для ω_*, $(\omega+1)_*$, ...; она, далее, верна и для типов вида

$$\alpha+\beta_*,$$

где α и β — *два числа.* Напротив, для типов вида

$$\beta_*+\alpha,$$

где α и β — два трансфинитных числа, эта теорема несправедлива.}

§ 6

Среди *всех типов просто упорядоченных множеств* (а следовательно, *не только* среди типов *вполне упорядоченных* множеств — так называемых *чисел*) господствуют, если можно так выразиться, *строгие арифметические закономерности.*

Прежде всего здесь тоже самым общим образом выполнимы *операции сложения* и *умножения.* Если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — два каких-либо просто упорядоченных множества *типов* α и β, то *объединение* $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ при условии *сохранения* порядковых отношений элементов *в самих* $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ и принятия того, что в этом объединении ранг *всех* элементов множества $\mathfrak{A}$ *ниже* ранга *всех* элементов множества $\mathfrak{B}$, дает просто упорядоченное множество $\mathfrak{C}$, *тип* которого *определяется* как *сумма* двух типов α и β, символически $\alpha+\beta$. Здесь α называется *первым*, а β — *вторым* членами суммы.

Типы $\alpha+\beta$ и $\beta+\alpha$ *вообще* будут означать *разные типы.*

Но *два типа* α и β определяют некий *третий* тип и следующим образом. Пусть $\mathfrak{B}$ — просто упорядоченное множество типа β; вместо *каждого* элемента из $\mathfrak{B}$ подставляем некоторое просто упорядоченное множество типа α; *объединение всех* этих множеств $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$, ... (все они имеют тип α) дает новое *просто упорядоченное* множество $\mathfrak{D}$, если принять, что элементы каждого *отдельного* из них сохраняют *взаимное* расположение и в *объединении*, а *два любых* элемента, принадлежащих *различным* множествам $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$, ..., сохраняют в *объединении* то же порядковое отношение, какое внутри типа β имеет место между двумя соответствующими множествами, которым они принадлежат. *Тип* мно-

жества $\mathfrak{D}$ мы называем *произведением* двух типов α и β, причем α называется *множимым*, а β — *множителем*. Это произведение будет обозначаться через $\alpha\cdot\beta$ или $\alpha\beta$. Такой подход, отличающийся от моего прежнего, например в «Основах» (тем, что *там* я множитель писал *слева*, а множимое *справа*, а теперь буду поступать *наоборот*), по определенным причинам является *более целесообразным*.

И для *умножения типов* $\alpha\beta$ вообще *отлично* от $\beta\alpha$.

Напротив, как легко доказать, всегда

$$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma),$$
$$\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma,$$

т. е. для *сложения* и *умножения линейных типов* всегда выполняется *ассоциативный закон*.

{Столь же легко убедиться, что при умножении, в котором α, β и $\alpha+\beta$ выступают как *множители*, для *всех* типов общезначим *дистрибутивный закон*

$$\gamma(\alpha+\beta)=\gamma\alpha+\gamma\beta.\}$$

{*Для пояснения введенных операций полезны следующие теоремы, доказательства которых легко получаются из теоремы, приведенной в* § 4.

Если η — тип, обозначенный этим символом в § 4, а α,α' — два различных числа *первого* или *второго* числовых классов, то

$$\eta\alpha=\eta\alpha'=\eta; \qquad \eta^2=\eta,$$

а потому и всякая степень η^ν равна η, где ν — любое конечное целое число; напротив, $\alpha\eta$ и $\alpha'\eta$ всегда представляют собой различные типы.}

Если π — порядковый тип, обладающий тем свойством, что его представление в виде произведения двух множителей возможно только тогда, когда по крайней мере один из множителей равен π, то мы называем π *простым* типом, а если, в частности, π является *числом*, то оно называется *простым числом*. В соответствии с этим легко убедиться, что, например, η, $1+\eta$, $\eta+1$, $1+\eta+1$, θ, $1+\theta$, $\theta+1$, $1+\theta+1$ являются *простыми типами*, а ω, $\omega^\nu+1$, ω^ω, ω^{ω^ω} — *простыми числами*, а также что все так называемые простые числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... сохраняют это обозначение и в нашем общем смысле.

Как и для *конечных чисел*, для которых разложение на простые множители является вполне определенным, если отвлечься от порядка множителей, то же самое справедливо при некоторых предположениях для *трансфинитных чисел*, причем даже порядок множителей здесь является в известном смысле определенным. Для *остальных порядковых типов* (не являющихся числами) этот закон однозначного разложения претерпевает некоторые модификации, установлением которых нам придется заняться позднее.

§ 7

В § 6 мы обсудили те операции над линейными типами, которые для *конечных чисел* известны с древности и относительно которых теперь установлено, что их *во всей общности* можно распространить и на бесконечные *типы* и *числа*. Однако, помимо *сложения* и *умножения*, существуют столь же *первичные* и *общие другие операции*, которые для конечных типов или чисел не выделялись по той простой причине, что в них *актуальная бесконечность* не играет никакой роли. Для бесконечных типов и чисел эти новые операции существенны.

Вообразим какое-либо *бесконечное* просто упорядоченное множество $\mathfrak{A}$ типа α.

Если e — некий элемент из $\mathfrak{A}$, то может произойти следующее: когда через $'e$ обозначен *какой-либо* элемент из $\mathfrak{A}$, *предшествующий* по рангу e, и положено $'e=e$ в случае отсутствия в $\mathfrak{A}$ предшествующего e элемента и когда, далее, через e' мы обозначим *какой-либо следующий* за e по рангу элемент из $\mathfrak{A}$, но положим $e'=e$ в случае отсутствия в $\mathfrak{A}$ более высокого по рангу элемента, чем e, тогда между $'e$ и e' всегда попадает бесконечно много элементов множества $\mathfrak{A}$ (расположенных по рангу). Если e *удовлетворяет* этому условию, то мы будем называть *e главным элементом* множества $\mathfrak{A}$. Все принадлежащие $\mathfrak{A}$ *главные элементы* образуют новое *просто упорядоченное* и содержащееся в $\mathfrak{A}$ множество, если между ними сохраняется то же самое расположение, какое они имели в $\mathfrak{A}$. Это множество мы называем *кохеренцией множества* $\mathfrak{A}$ и обозначаем через $\mathfrak{A}c$; тип множества $\mathfrak{A}c$ будем обозначать через αc и называть *кохеренцией типа* α. Если к $\mathfrak{A}c$ и αc мы вновь применим операцию c, то ее результат будем обозначать соответственно через $\mathfrak{A}c^2$ и αc^2; надлежащий смысл имеют и знаки $\mathfrak{A}c^\nu$ и αc^ν.

В бесконечной последовательности упорядоченных множеств

$$\mathfrak{A}, \mathfrak{A}c, \mathfrak{A}c^2, \ldots, \mathfrak{A}c^\nu, \ldots$$

каждое является *составной частью* предыдущего. *Общая составная часть всех их*, вообще отличная от нуля, или, что то же самое, *упорядоченное* множество

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}c, \ldots, \mathfrak{A}c^\nu, \ldots)$$

будет обозначаться через $\mathfrak{A}c^\omega$, а его тип — через αc^ω. Общее определение для $\mathfrak{A}c^\rho$ и его типа αc^ρ, где ρ означает произвольное трансфинитное число, будет основываться на *полной индукции* таким образом. Если ρ — трансфинитное число *первого рода*, т. е. имеется непосредственно предшествующее ему число $\rho-1$, то

$$\mathfrak{A}c^\rho \equiv (\mathfrak{A}c^{\rho-1})\,c;$$

если же ρ — трансфинитное число *второго рода*, то

$$\mathfrak{A}c^\rho \equiv \mathfrak{D}(\ldots, \mathfrak{A}c^{\rho'}, \ldots),$$

где ρ' должно пробегать *все числа*, меньшие ρ.

В соответствии с этим легко убеждаемся, что если ρ и σ — два каких-либо конечных или трансфинитных числа, то всегда

$$(\mathfrak{A}c^{\rho})c^{\sigma} \equiv \mathfrak{A}c^{\rho+\sigma} \text{ и } (\alpha c^{\rho})^{\sigma} = \alpha c^{\rho+\sigma}.$$

$\mathfrak{A}c^{\rho}$ называется ρ-й *когеренцией множества* $\mathfrak{A}$, а αc^{ρ} — ρ-й *когеренцией* порядкового типа α.

Если окажется, что

$$\mathfrak{A}c = \mathfrak{A},$$

то мы называем $\mathfrak{A}$ *плотным в себе* упорядоченным множеством, а его тип α — *плотным в себе* типом.

Так, например, типы η, $1+\eta$, $\eta+1$, $1+\eta+1$, θ, $1+\theta$, $\theta+1$, $1+\theta+1$ являются *плотными в себе типами.*

Напротив, имеем, например,

$$\omega c = 0, \quad (\omega+\nu)c = 1, \quad (\omega 2)c = 1, \quad (\omega 2+\nu)c = 2, \quad (\omega\mu)c = \mu - 1,$$

$$(\omega\mu+\nu)c = \mu, \quad \omega^2 c = \omega, \quad (\omega^2+1)c = \omega+1, \quad \omega^{\omega}c = \omega^{\omega}.$$

Здесь ν и μ имеют смысл *конечных* положительных целых чисел.

Последний пример, в котором $\omega^{\omega}c = \omega^{\omega}$, поучителен и тем, что из него видно, что из равенства $\alpha c = \alpha$ нельзя будет заключить, будто α является плотным в себе типом; для этого, скорее, требуется, чтобы было $\mathfrak{A}c \equiv \mathfrak{A}$.

Те элементы упорядоченного множества $\mathfrak{A}$, которые *не являются* главными элементами из $\mathfrak{A}$, мы называем *изолированными* элементами множества $\mathfrak{A}$. В расположении, в котором они находятся друг к другу в $\mathfrak{A}$, все они образуют содержащееся в $\mathfrak{A}$ *просто упорядоченное* множество, которое мы называем *адхеренцией* множества $\mathfrak{A}$ и обозначаем через $\mathfrak{A}a$. Равным образом тип множества $\mathfrak{A}a$ мы называем *адхеренцией* типа α и сопоставляем ему знак αa.

Упорядоченное множество $\mathfrak{A}a$ состоит исключительно из *изолированных* элементов, а потому будет называться *изолированным множеством*; ввиду этого и αa мы называем *изолированным* типом.

Соотношение, имеющее место между тремя упорядоченными множествами $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}a$, $\mathfrak{A}c$, мы можем выразить формулой

$$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}a + \mathfrak{A}c;$$

следует, однако, заметить, что здесь сложение элементов из $\mathfrak{A}a$ и $\mathfrak{A}c$ справа *производится в том порядке, в котором они находились в* $\mathfrak{A}$ *первоначально*, так что, например, эта формула не равнозначна с формулой $\alpha = \alpha a + \alpha c$; последняя, как легко убедиться, *вообще неверна.*

В том же смысле имеем следующую очень общую формулу:

$$\mathfrak{A} \equiv \sum_{\rho'=0,1,\ldots<\rho} \mathfrak{A}c^{\rho'}a + \mathfrak{A}c^{\rho},$$

в которой ρ означает любое заданное конечное или бесконечное число.

Всякая *плотная в себе* составная часть множества $\mathfrak{A}$ всегда является

составной частью множества $\mathfrak{A}c^\rho$ при любом ρ. Отсюда следует, что упорядоченное множество $\sum\limits_{\rho'=0,1,\ldots<\rho} \mathfrak{A}c^{\rho'}a$ *никогда* не может иметь плотной в себе составной части — такие множества мы называем *разрозненными*, а их типы — *разрозненными* типами.

Рассмотрим просто упорядоченное множество $\mathfrak{A}$, удовлетворяющее следующим условиям: *если $e, e', e'', \ldots, e^{(\nu)}, \ldots$ — любая просто бесконечная последовательность элементов этого множества, которые вместе с ν или возрастают, или убывают по рангу при возрастании ν, то существует определенный элемент $\mathfrak{f}$ множества $\mathfrak{A}$, который в первом случае имеет более высокий ранг, чем все $e^{(\nu)}$, причем каждый элемент $'\mathfrak{f}$ из $\mathfrak{A}$, имеющий по сравнению с $\mathfrak{f}$ более низкий ранг, будет превзойден неким $e^{(\nu)}$ при достаточно большом значении ν, и который во втором случае имеет более низкий ранг, чем все $e^{(\nu)}$, причем каждый следующий за $\mathfrak{f}$ элемент $\mathfrak{f}'$, начиная с некоторого ν, имеет более высокий ранг, чем $e^{(\nu)}$. Очевидно, что $\mathfrak{f}$ является здесь главным элементом множества $\mathfrak{A}$.*

Если просто упорядоченное множество $\mathfrak{A}$ отвечает предположениям, содержащимся в этом условии, то мы называем его *замкнутым*, а его тип α — *замкнутым* типом.

В соответствии с этим, например, $\omega+1$, $\omega^\nu+1$, $1+\theta+1$ являются замкнутыми типами; напротив, не так обстоит дело для типов ω, ω^ν, η, $1+\eta$, $\eta+1$, $1+\eta+1$.

Если $\mathfrak{A}$ — замкнутое множество, то замкнута и каждая его *когеренция* $\mathfrak{A}c^\rho$, а потому мы можем сказать, что если α является *замкнутым типом*, то то же самое верно и для αc^ρ.

Если просто упорядоченное множество *плотно в себе* и *замкнуто*, то мы называем его *совершенным*, а его тип — *совершенным* типом.

Так, например, $1+\theta+1$ является *совершенным типом*. Замечу, наконец, что всякое *незамкнутое* множество может быть дополнено до некоторого *замкнутого* множества при помощи надлежащего *пополнения* новыми элементами.

§ 8

Перейдем теперь к рассмотрению *n-кратно упорядоченных множеств* и их *порядковых типов*. Здесь мы под n понимаем пока *конечное* целое число, хотя позднее станет возможным и необходимым переход к типам бесконечнократно упорядоченных множеств.

Под n-кратно упорядоченным множеством мы понимаем такое множество, все элементы которого упорядочены в *n отношениях* (измерениях). Эти n отношений тоже должны мыслиться в некоторой определенной последовательности, так что их можно различать как *первое, второе, ..., n-е отношение.*

Это понятие n-кратно упорядоченного множества может быть уточнено так.

Если a и a' — любые два элемента n-кратно упорядоченного множества $\mathfrak{A}$, то *для каждого из n отношений* между этими элементами имеет

место определенное соотношение между рангами, так что a имеет или *более низкий*, или *одинаковый*, или *более высокий* ранг, нежели a'. Расположение по рангу элементов a и a' для одного из отношений вообще не зависит от их расположения в остальных отношениях; нужно только исключить один случай, а именно когда из n отношений для $(n—1)$-го из них элементы a и a' имеют один и тот же ранг, ибо тогда для оставшегося отношения этот самый ранг не может иметь места, поскольку в противном случае в предложенном упорядочении нарушилось бы различие элементов и пришлось бы добавлять новые отношения.

Далее, для n-кратно упорядоченного множества $\mathfrak{A}$ будет предполагаться, что когда *для одного и того же* из n отношений a имеет более низкий ранг, чем a', или равный ему, a' — более низкий ранг, чем a'', или равный ему, то и a имеет ранг, более низкий или равный по сравнению с рангом элемента a'', причем равенство рангов в последнем случае имеет место только в предположении их равенства в двух первых случаях. Два n-кратно упорядоченных множества $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ называются *подобными* друг другу, если их можно *взаимно однозначно и полно* так *поэлементно* сопоставить друг с другом, что когда a и a' — *любые два* элемента первого, b и b' — соответствующие им элементы второго множества, то расположение a и a' *для каждого из n отношений* в $\mathfrak{A}$ является таким же, как и расположение элементов b и b' для *соответствующего* отношения в $\mathfrak{B}$; при этом ν-е отношение в $\mathfrak{A}$ предполагается соответствующим ν-му отношению в $\mathfrak{B}$.

Здесь мы тоже пользуемся прежним термином, говоря о двух подобных n-кратно упорядоченных множествах, что их можно *отобразить друг на друга*, а элемент b из $\mathfrak{B}$ называем *образом* элемента a из $\mathfrak{A}$ [13].

Под *порядковым типом* n-кратно упорядоченного множества $\mathfrak{A}$ мы понимаем то общее понятие, под которое подпадают все n-кратно упорядоченные множества, подобные $\mathfrak{A}$, и только они (а тем самым и само $\mathfrak{A}$); такой тип мы называем *n-кратным* или *n-мерным порядковым типом.*

Если речь идет об n-кратно упорядоченных множествах с конечным числом m элементов, то соответствующие типы мы называем *конечными порядковыми типами.* Очевидно, что число различных порядковых типов n-кратно упорядоченных множеств из m элементов *конечно* и их нахождение как функции от n и m небезынтересно. Все *конечные* порядковые типы образуют *первый* класс типов; типы n-кратно упорядоченных множеств *первой* мощности мы причисляем ко *второму* классу типов, типы n-кратно упорядоченных множеств *второй* мощности принадлежат *третьему* классу типов и т. д.

С каждым n-кратным типом α связано $2^n—1$ *других* типов, вообще отличающихся друг от друга и от α, которые мы назовем типами, *сопряженными* α и друг другу.

А именно если $\mathfrak{A}$ — множество типа α, то из него получается новое n-кратно упорядоченное множество $\mathfrak{A}'$, если принять, что расположение всех элементов *обращено* в ν-м направлении, причем равенство рангов, если оно имеется, сохраняется, а все остальные расположения (для

других направлений) остаются без изменений. Порядковый тип множества $\mathfrak{A}'$ будет обозначаться через $\alpha_{*\nu}$.

Следовательно, $^*\nu$ играет здесь роль *символа операции*, и мы поэтому имеем n таких символов операций ^{*1}, ^{*2}, ..., $^*n$, которые, последовательно примененные к α (причем, очевидно, порядок следования друг за другом этих операций не оказывает никакого влияния на результат), дают вообще 2^n-1 отличных от α и друг от друга сопряженных типов. Как легко видеть, $\alpha_{*\nu*\nu}=\alpha$.

Может случиться, что все сопряженные типы или некоторые из них равны α; в последнем случае число неравных сопряженных типов является частью числа 2^n, а значит, будет степенью двух. Если, например, это число равно 2^k, то любые 2^{n-k} сопряженных типа равны друг другу 2^k раз.

Отображение двух подобных друг другу n-кратно упорядоченных множеств вообще возможно многими способами, но в некоторых случаях оно единственно. Как несложно доказывается, последнее всегда имеет место, например, для *конечных* типов.

Следовательно, относительно каждого бесконечного n-кратного порядкового типа возникает вопрос: сколькими способами он может рассматриваться как подобный самому себе и как эти вообще многие способы связаны друг с другом.

Перейду теперь к *операциям*, которые можно производить над n-кратными порядковыми типами.

Обозначениями *первое*, *второе*, ..., n-е мы выделили во всяком n-кратно упорядоченном множестве *n отношений* (измерений), в соответствии с которыми упорядочиваются его элементы. Если теперь рассматривается несколько n-кратных порядковых типов, то ν-е отношение во всех них выступает для нас *как одно и то же*. Если не все эти типы имеют одинаковое число измерений, ограничимся пока случаем, когда числа измерений всех типов не превосходят определенного конечного числа n; тогда мы можем — и будем это делать — каждый из типов с меньшим числом измерений, например, с числом измерений $m<n$, рассматривать как n-мерный тип, в котором при $\nu>m$ все элементы имеют *один и тот же* ранг для ν-го отношения.

Если теперь $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — два n-кратно упорядоченных множества с типами α и β, то через объединение $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ возникает новое n-кратно упорядоченное множество $\mathfrak{C}$, если принять, что *для каждого из n отношений* элементы множеств $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ сохраняют свое прежнее расположение и что ранг *всех* элементов из $\mathfrak{A}$ будет ниже ранга *всех* элементов из $\mathfrak{B}$. Очевидно, что тип множества $\mathfrak{C}$ останется тем же самым, если заменить $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ подобными им множествами; мы называем его суммой типов α и β и пишем $\alpha+\beta$, причем α называется *первым*, а β — *вторым* слагаемым.

Произведение двух n-мерных *типов* α и β определяется так.

Пусть $\mathfrak{B}$ — некоторое n-кратно упорядоченное множество типа β; *каждый элемент* в $\mathfrak{B}$ заменяем каким-либо n-кратно упорядоченным множеством типа α; если все эти подобные друг другу множества $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, ... мыслятся сопоставленными друг с другом при помощи произвольного,

но определенного *отображения*, то их *объединение* образует новое n-кратно упорядоченное множество $\mathfrak{D}$ при следующих предположениях: в *каждом* из n отношений (скажем, ν-м) расположение элементов, принадлежащих одному и тому же подмножеству, например $\mathfrak{A}$, берется тем же, каким оно было в $\mathfrak{A}$ для ν-го отношения; напротив, если берутся два элемента a и a', принадлежащих различным подмножествам $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$, то в случае, если ранг множества $\mathfrak{A}'$, рассматриваемого как элемент множества $\mathfrak{B}$, *отличен по ν-му отношению* от ранга множества $\mathfrak{A}$, рассматриваемого как элемент множества $\mathfrak{B}$, то между a и a' в $\mathfrak{D}$ устанавливается *такое же* расположение, какое имелось между $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$, рассматриваемыми как элементы множества $\mathfrak{B}$; в случае же, если ранг множеств $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ по ν-му отношению является тем же самым, то расположение a и a' в $\mathfrak{D}$ берется таким же, каким оно задано *положенным в основу отображением* этих подобных множеств $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$, так что, если a_1 является образом элемента a' в $\mathfrak{A}$, то расположение a и a' в $\mathfrak{D}$ должно быть тем же самым, что и расположение a и a_1 в $\mathfrak{A}$. Можно показать, что тип так определенного n-кратно упорядоченного множества $\mathfrak{D}$ зависит *только от типов α и β*, т. е. не зависит от того, какие отображения друг на друга подобных множеств $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, ... кладутся в основу, лишь бы все они имели тип α и лишь бы их *совокупность*, обозначенная нами через $\mathfrak{B}$, имела тип β.

Этот тип множества $\mathfrak{D}$ мы называем *произведением* типов α и β и обозначаем его через $\alpha\beta$; α называется *множимым*, а β — *множителем* этого произведения.

Сумма $\alpha+\beta$ вообще отлична от $\beta+\alpha$, как и произведение $\alpha\beta$ от $\beta\alpha$. Напротив, и здесь выполняются *ассоциативные* законы:

$$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma); \qquad (\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma);$$

дистрибутивный же закон справедлив только в виде

$$\gamma(\alpha+\beta)=\gamma\alpha+\gamma\beta.$$

n-Мерный порядковый тип π мы называем *простым типом*, если равенство

$$\pi=\alpha\beta$$

возможно только тогда, когда *по крайней мере один* из двух множителей α и β равен π.

Если теперь мы рассматриваем *бесконечное n*-кратно упорядоченное множество $\mathfrak{A}$ типа α, то *может случиться*, что элемент e из $\mathfrak{A}$ удовлетворяет следующему условию. Пусть $'e_\nu$ — *какой-либо* элемент из $\mathfrak{A}$, который в ν-м отношении имеет более низкий ранг, чем e, а в случае, если не существует элемента более низкого ранга, отличного от e, $'e_\nu$ полагается равным e. Пусть, далее, e_ν' — *какой-либо* элемент из $\mathfrak{A}$, который в ν-м отношении имеет более высокий ранг, чем e, а в случае, если не существует элемента более высокого ранга, принимается, что e_ν' равен e. Тогда, если для $\nu=1, 2, 3, \ldots, n$ всегда существует бесконечно много элементов множества $\mathfrak{A}$, имеющих по ν-му отношению ранг, не более

низкий чем у $'e_\nu$ и не более высокий чем у e_ν', то мы называем e *главным элементом* множества $\mathfrak{A}$.

Все главные элементы множества $\mathfrak{A}$, если между ними во всех n отношениях устанавливаются те же самые расположения, какими они были в $\mathfrak{A}$, образуют новое n-кратно упорядоченное множество, которое мы называем *кохеренцией множества* $\mathfrak{A}$ и обозначаем через $\mathfrak{A}c$. Если вместо $\mathfrak{A}$ взять *подобное* ему множество $\mathfrak{A}'$, то легко убедиться, что $\mathfrak{A}c$ и $\mathfrak{A}'c$ тоже подобны друг другу. *Порядковый тип* множества $\mathfrak{A}c$ мы поэтому тоже называем *кохеренцией типа* α и также записываем его в виде αc.

Определение для $\mathfrak{A}c^\rho$ и αc^ρ можно передать *теми же* словами, как и в § 7 при соответствующих определениях для просто упорядоченных множеств.

Те элементы из $\mathfrak{A}$, которые не являются главными, мы и здесь называем *изолированными* элементами множества $\mathfrak{A}$, а их совокупность — в том же порядке, в каком они находятся в $\mathfrak{A}$, — образует n-кратно упорядоченное множество, которое будет называться *адхеренцией множества* $\mathfrak{A}$ и обозначаться через $\mathfrak{A}a$; порядковый тип множества $\mathfrak{A}a$ мы называем *адхеренцией типа* α и тоже записываем его в виде αa.

Здесь опять-таки, каково бы ни было конечное или сверхконечное число ρ, выполняется равенство

$$\mathfrak{A} \equiv \sum_{\rho'=0,1,\ldots<\rho} \mathfrak{A}c^{\rho'}a + \mathfrak{A}c^{\rho},$$

и вновь нужно подчеркнуть, что это равенство по понятным причинам не переносится на соответствующие типы.

Если выполняется условие $\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{A}c$, то $\mathfrak{A}$ называется *плотным в себе* множеством, а α — *плотным в себе* типом. Если же $\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{A}a$, то $\mathfrak{A}$ называется *изолированным множеством*, а αa — *изолированным типом*.

Если, далее, $\mathfrak{A}$ обладает тем свойством, что никакое его подмножество (в котором все элементы сохраняют то же расположение, какое они имеют в $\mathfrak{A}$) не является плотным в себе, то $\mathfrak{A}$ называется *рассеянным множеством*, а α — *рассеянным типом*.

n-Кратно упорядоченное множество $\mathfrak{A}$ может обладать следующим свойством: если $a, a', a'', \ldots, a^{(\varkappa)}, \ldots$ — *какое-либо* просто бесконечное множество элементов из $\mathfrak{A}$, которые *по каждому из n отношений* при возрастании индекса $\varkappa$ постоянно возрастают или постоянно убывают по рангу (причем, однако, в одном отношении может быть возрастание, в другом — убывание), то всегда существует такой определенный элемент f из $\mathfrak{A}$, что когда $'f_\nu$ — какой-нибудь элемент, имеющий по отношению ν более низкий ранг, нежели f, а f_ν' — какой-нибудь элемент, имеющий по отношению ν более высокий ранг, нежели f, тогда в случае образования элементами $a^{(\varkappa)}$ возрастающей по ν-му отношению последовательности, эти $a^{(\varkappa)}$, начиная с некоторого $\varkappa$, постоянно имеют по ν-му отношению более высокий ранг, чем $'f_\nu$, в случае же образования элементами $a^{(\varkappa)}$ убывающей по ν-му отношению последовательности, эти $a^{(\varkappa)}$, начиная с некоторого $\varkappa$, постоянно имеют по ν-му отношению более низ-

кий ранг, чем f_ν', при $\nu=1, 2, 3, \ldots, n$. Такой элемент f множества $\mathfrak{A}$ всегда является, как легко видеть, *главным элементом* множества $\mathfrak{A}$.

Если $\mathfrak{A}$ удовлетворяет этому *условию* всегда, т. е. для *каждой последовательности* $a, a', a'', \ldots, a^{(\varkappa)}, \ldots$, то мы называем $\mathfrak{A}$ *замкнутым* n-кратно упорядоченным множеством, а его тип — *замкнутым* типом.

Если $\mathfrak{A}$ — *замкнутое множество,* то и все его кохеренции, когда они не исчезают, являются замкнутыми множествами; следовательно, если α — *замкнутый* тип, то замкнутым является и αc^ρ, если последний не равен нулю.

{Выше осуществлено обобщение понятий, которыми мы пользовались в исследованиях по теории точечных множеств и, в частности, впервые мы встретились с ними во «Втором сообщении о различных теоремах...» (Acta math., vol., 7, p. 105) [здесь I. 8]. Поэтому мне кажется не лишним указать на некоторое различие, связанное с *одноименными* представлениями в той специальной области и в нашей *общей* теперешней.

Здесь, где мы имеем дело с просто или кратно упорядоченными множествами, принимая во внимание только их *порядковые типы,* приходится, естественно, отвлекаться не только от *свойств элементов,* но и от всех отношений, которые могут иметь *элементы* упорядоченного множества друг к другу, за исключением тех, при помощи которых определяется их *взаимное расположение*; для *точечных же множеств* добавляется то отношение, в соответствии с которым два элемента или точки имеют определенное *расстояние* друг от друга.

Это обусловливает то, что понятие *главного элемента*, если мы применим его к точечному множеству $\mathfrak{B}$, не полностью совпадает с понятием *принадлежащей* $\mathfrak{B}$ *предельной точки*: всякая предельная точка множества $\mathfrak{B}$, принадлежащая $\mathfrak{B}$, всегда, разумеется, является главным элементом множества $\mathfrak{B}$; однако обратное, как легко убедиться, не всегда справедливо.

Мы вынуждены поэтому отличать тот *более узкий* смысл, который в теории точечных множеств имеют связанные с этим представления о кохеренции, адхеренции, инхеренции, плотного в себе множества, замкнутого множества и т. д., от *более широкого* смысла, который соответствует этим словам в теории типов. Этого напоминания достаточно, чтобы предупредить всякие ошибки и путаницу в данной связи.}

Галле-на-Заале, 6 ноября 1884 г.

2. О РАЗЛИЧНЫХ ТОЧКАХ ЗРЕНИЯ НА АКТУАЛЬНО БЕСКОНЕЧНОЕ * [1]

...Полученное мною сегодня от Вас письмо от 31 октября текущего года содержит следующий вопрос: «Avez vous vu et étudié l'écrit de l'Abbé Moigno intitulé: «Impossibilité du nombre actuellement infini; la science dans ses rapports avec la foi» (Paris: Gauthier-Villars, 1884)?» Да, вот уже несколько недель, как я достал себе это сочинение. То, что здесь говорит Муаньо о мнимой невозможности актуально бесконечных чисел, и употребление, сделанное им из этого ложного тезиса для обоснования некоторых религиозных вероучений, известно мне в существенном уже из лекций Коши: «Sept leçons de physique générale» (Paris: Gauthier-Villars, 1868) [2]. Коши, кажется, пришел к этим весьма необычным для математики спекуляциям под влиянием работ патера Жердиля. Последний (Гиацинт Зигмунд, 1718—1802) был весьма почтенной высокопоставленной личностью и уважаемым философом. Одно время он профессорствовал в Турине, затем был воспитателем будущего короля Пьемонта Карла Эмануила IV, потом, вызванный папой Пием VI в 1776 г. в Рим, он исполнял ряд обязанностей при престоле и, наконец, был возведен в сан епископа Остии, а также кардинала. Вам, быть может, он известен как автор некоторых работ по геометрии и вопросам истории. На с. 26 указанных лекций Коши упоминает о работе Жердиля, озаглавленной «Essai d'une démonstration mathématique contre l'existence éternelle de la matière et du mouvement, déduite de l'impossibilité démontrée d'une suite actuellement infinie de termes, soit permanents, soit successifs» (Opere edite et inedite del cardinale Giacinto Sigismondo Gerdil. Rome, 1806, vol. 4, p. 261). Тот же вопрос он рассматривает в «Mémoire de l'infini absolu considéré dans la grandeur» (Ibid. Rome, 1807, vol. 5, p. 1) [3]. Я отнюдь не нахожусь в принципиальном противоречии с этими авторами, поскольку они стремятся к гармонии между верой и знанием; но я считаю совершенно непригодными средства, которыми они пользуются для этого.

Если бы догматы веры нуждались для своего подтверждения в таком *кардинально ложном* тезисе, как положение о невозможности актуально бесконечных чисел (которое в известной формуле «numerus infinitus repugnat» очень и очень древнего происхождения; в новейшее время оно встречается, например, у Тонджорджи в «Instit. philos.», vol. 2, 1.3, a. 4, pr. 10, в форме «Multitudo actu repugnat»; его можно найти также, между прочим, у X. Зигварта (Logik. Tübingen, 1878, Bd. 2, S. 47) и у К. Фишера (System der Logik und Metaphysik oder Wissenschaftslehre. Heidelberg, 1865, S. 275)), то их дела обстояли бы очень плохо [4]. Мне кажется поэтому весьма замечательным то, что св. Фома Аквинский в I p, q. 2,

* Über die verschiedenen Standpunkte in bezug auf das actuelle Unendliche (Aus einem Schreiben des Verf. an Herrn G. Eneström in Stockholm vom 4. Nov. 1885).— Ztschr. Philos. und philos. Kritik, 1886, Bd. 88, S. 224—233. Перевод П. С. Юшкевича.

a. 3 своей «Summa theologica» [5], где он доказывает с помощью пяти аргументов существование бога, не пользуется *вовсе* этим ложным тезисом, хотя он вообще отнюдь не противник его; но во всяком случае для преследуемой им цели он показался ему мало надежным (ср.: *Gutberlet, Constantin.* Das Unendliche metaphysisch und mathematisch betrachtet. Mainz, 1878, S. 9) [6]. Сколь высоко я ни ценю Коши как математика и физика, сколь ни симпатична мне его религиозность и как, в частности, мне ни нравятся — помимо рассматриваемого заблуждения — его «Sept leçons de physique générale», я должен все же решительно протестовать против его авторитета там, где он ошибался.

Теперь прошло ровно два года с тех пор, как г-н Рудольф Липшиц из Бонна обратил мое внимание на одно место в переписке между Гауссом и Шумахером, где первый высказывается против *всякого* привлечения актуально бесконечного в математику (письмо от 12 июля 1831 г.) [7]. Я подробно ответил на это указание и отклонил *в этом пункте* авторитет Гаусса, который во всех прочих отношениях я ставлю так высоко, подобно тому как теперь я отклоняю свидетельство Коши и как в своем сочинении «Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre» (Leipzig, 1883) [здесь I.5.5] я среди прочих авторов отклонил и авторитет Лейбница, оказавшегося в этом вопросе удивительно непоследовательным.

Если бы Вы пожелали внимательнее просмотреть названное мною только что сочинение (а не перевод его в «Acta mathematica», т. 2, где приведена лишь часть его), то Вы увидели бы, что в § 4—8 я ответил по существу на все те возражения, которые могут быть выдвинуты против введения актуально бесконечных чисел. Если тогда мне и были еще неизвестны упомянутые сочинения Жердиля, Коши и Муаньо по рассматриваемому нами вопросу, то все же соответствующие мнимые доводы этих авторов опровергаются в такой же мере, как и petitiones principii [8] у столь многих приведенных мною там философов.

Все так называемые доказательства невозможности актуально бесконечных чисел являются,— как это можно показать в каждом отдельном случае и заключить из общих соображений,— ошибочными по существу и содержат πρῶτον ψεῦδος [9] *в том, что в них заранее приписывают или скорее навязывают рассматриваемым числам все свойства конечных чисел. Между тем, бесконечные числа, если только вообще их приходится мыслить в какой-нибудь форме, ввиду своей противоположности конечным числам, должны образовывать совершенно новый вид чисел, свойства которых зависят исключительно от природы вещей и образуют предмет исследования, а не нашего произвола и наших предрассудков.*

Паскаль, как я лишь недавно увидел, вполне осознал всю рискованность, если не нелепость подобных дедукций, с какими мы встречаемся у названных нами писателей. Поэтому он, равно как и его друг Антуан Арно, высказывается за актуально бесконечные числа. Но в силу некоторого другого шаткого соображения, на котором я не хочу здесь останавливаться, он слишком низко оценивал человеческий ум в отношении постижения им актуально бесконечного (см.: *Pascal.* Oeuvres complètes. Paris: Hachette et Co, 1877, vol. 1, p. 302—303; далее: Logique de Port-

Royal/Ed. C. Jourdain. Paris: Hachette et Co, 1877. Pt. 4. Chap. 1.) [10].

Если захотеть сгруппировать наглядным образом различные воззрения, высказывавшиеся на протяжении истории по занимающему нас вопросу об *актуально бесконечном* (которое в последующем обозначается для краткости через а. б.), то для этого представляется несколько точек зрения, из которых ныне я остановлюсь на одной.

А именно а. б. можно рассматривать *в трех главных отношениях*: *во-первых*, поскольку оно имеет место in Deo extramundano aeterno omnipotenti sive natura naturante и в этом случае оно называется *абсолютным*; *во-вторых*, поскольку оно имеет место *in concreto seu in natura naturata*, и в этом случае я называю его *transfinitum*; *в-третьих*, а. б. можно рассматривать *in abstracto*, т. е. поскольку оно может быть постигнуто человеческим познанием в форме *актуально бесконечного*, или, как я назвал это, в форме *трансфинитных чисел*, или в еще более общей форме *трансфинитных порядковых типов* (ἀριθμοὶ νοητοὶ или εἰδητικοί) [11].

Если, прежде всего, мы оставим в стороне *первую* из этих проблем и ограничимся двумя последними, то сами собой появляются *четыре различные точки зрения*, которые фактически имели и имеют место в прошлом и настоящем.

Можно, *во-первых*, отвергнуть а. б. как *in concreto*, так и *in abstracto*, подобно тому как это делают Жердиль, Коши, Муаньо в указанных выше сочинениях, Ш. Ренувье (ср. его «Esquisse d'une classification systématique des doctrines philosophiques». Paris: Au Bureau de la Critique philosophique, 1885, vol. 1, p. 100) [12] и все так называемые *позитивисты* и их родня.

Во-вторых, можно принимать а. б. *in concreto*, но отвергать его *in abstracto*. Эта точка зрения встречается, как я указал в своих «Основах», с. 16 [здесь I.5.5, § 5], у Декарта, Спинозы, Лейбница, Локка и многих других. А если бы потребовалось назвать современного автора, то я упомянул бы Германа Лотце, который в статье «L'Infini actuel est-il contradictoire? Réponse à Monsieur Renouvier» в «Revue philos.» de Ribot, 1880, vol. 9, защищает а. б. *in concreto*. Реплика Ренувье содержится в том же томе названного журнала [13].

В-третьих, можно утверждать а. б. *in abstracto*, но зато отрицать его *in concreto*. На этой точке зрения находится часть *неосхоластов*, тогда как другая, возможно более значительная часть этой школы, получившей мощный импульс к развитию благодаря энциклике Льва XIII от 4 августа 1879 г. «De philosophia Christiana ad mentem Sancti Thomae Aquinatis Doctoris Angelici in scholis catholicis instauranda», пытается еще защищать первую из вышеназванных четырех точек зрения [14].

В-четвертых, наконец, можно принимать а. б. как *in concreto*, так и *in abstracto*. Этой точки зрения, которую я считаю *единственно правильной*, придерживаются лишь немногие. Быть может, я по времени первый, защищающий ее с полной определенностью со всеми ее следствиями, но одно я знаю твердо: я не буду последним ее защитником!

Если принять во внимание и отношение философов к проблеме а. б. in Deo, то получается классификация школ по *восьми точкам зрения*,

которые удивительным образом, кажется, все представлены в истории мысли. Затруднение в отнесении в эти *восемь* классов могли бы представить только те авторы, которые не заняли определенной позиции по одному или более из *трех* относящихся к а. б. вопросов.

Так называемое потенциальное или синкатегорематическое бесконечное (Indefinitum) не дает повода ни к какому подобному разделению. Причина этого заключается в том, что оно имеет смысл лишь как *понятие отношения*, как *вспомогательное представление* нашего мышления, но не означает само по себе никакой *идеи*. В этой роли оно, разумеется, благодаря открытому Лейбницем и Ньютоном дифференциальному и интегральному исчислению обнаружило свое огромное значение как средство познания и инструмент нашего духа. Но само по себе оно не может претендовать на значительную роль.

Ваши вопросы вызваны, возможно, одним замечанием в моей статье «О различных теоремах из теории точечных множеств» в «Acta math.», т. 7, с. 123 [здесь I.8, с. 168], где я сослался, среди других, и на Коши в подтверждение моего взгляда на строение материи. Я при этом имел в виду главным образом ту сторону своей гипотезы, в которой я утверждаю *строгую* пространственную точечность или непротяженность последних элементов, как ее развивал вслед за Лейбницем и патер Бошкович в своем сочинении «Theoria philosophiae naturalis redacta ad unicam legem virium in natura existentium» (Venetiis, 1763). Это утверждение содержится у Коши в его «Sept leçons»; до него оно искусно защищалось Андре Мари Ампером (Cours du Collège de France, 1835—1836), а после него Сен-Венаном (ср. его «Mémoire sur la question de savoir s'il existe des masses continues et sur la nature probable des dernières particules des corps» в «Bulletin de la Société philomatique de Paris», 1844, 20 Janv.; см. также его более крупную работу в «Annales de la Société scientifique de Bruxelles». 2-e ann.), а у нас в Германии — особенно Г. Лотце (см. его «Mikrokosmos». Bd. 1) и Г. Т. Фехнером (см, его «Über die physikalische und philosophische Atomlehre. Leipzig, 1864) [[15]]. Но, конечно, я не могу отрицать, что Коши — по крайней мере в указанной небольшой книге (а также и другие только что названные авторы, за исключением Лейбница) — полемизирует против второй составной части моей гипотезы, против *актуально бесконечного числа последних элементов*. Насколько он прав — это показано мною выше. В другой раз, однако, я как-нибудь покажу, что *при других обстоятельствах* Коши не оставался верен этому своему взгляду на а. б., что, впрочем, и не могло быть иначе... [[16]].

Несмотря на существенное различие понятий *потенциальной* и *актуальной* бесконечности,— причем первая означает *переменную* конечную величину, *растущую* сверх всяких конечных границ, а последняя — некоторое *замкнутое в себе*, *постоянное*, но лежащее по ту сторону всех конечных величин количество,— к сожалению, слишком часто встречаются случаи смешения этих понятий. Так, например, нередко встречающийся взгляд на *дифференциалы* как на *определенные* бесконечно малые величины (тогда как они представляют собой лишь *переменные* произвольно малые вспомогательные величины, совершенно исчезающие из конеч-

ных результатов, а потому характеризовавшиеся уже Лейбницем как простые *фикции*,— см., например, в издании Эрдмана, с 436) [17] основывается на таком смешении. Но если из справедливой антипатии к подобному *незаконному* а. б. в широких научных кругах под влиянием современного эпикурейски материалистического духа времени образовался своего рода Horror Infiniti [18], нашедший свое классическое выражение в упомянутом письме Гаусса, то связанное с этим некритическое отвержение *законного* а. б. представляется мне немалым преступлением против природы вещей, которые следует брать такими, каковы они в действительности. Такое отношение можно рассматривать как своего рода *близорукость*, которая лишает возможности видеть а. б., хотя последнее в своем высшем, абсолютном носителе создало и сохраняет нас, а в своих вторичных трансфинитных формах окружает нас со всех сторон и даже присуще самому нашему духу.

Часто происходит смешение *другого* рода, а именно двух форм *актуально бесконечного*, причем смешивается *трансфинитное* с *абсолютным*. Между тем эти понятия явно различны в том отношении, что первое следует мыслить, конечно, *бесконечным*, но все же доступным дальнейшему увеличению, тогда как последнее приходится считать *недоступным увеличению*, а потому математически неопределимым. С этой ошибкой мы встречаемся, например, в случае *пантеизма*, и она образует *ахиллесову пяту этики* Спинозы, хотя Ф. Г. Якоби утверждал ее неопровержимость доводами разума. Можно также заметить, что со времен Канта среди философов укрепилось ложное представление, будто *абсолютное* является идеальным пределом *конечного*, между тем как в действительности этот предел можно мыслить лишь как некое *трансфинитное* и притом как *минимум всех трансфинитов* (соответствующий *наименьшему* сверхконечному числу, обозначаемому мною через ω). Кант в «Критике чистого разума» в главе об «Антиномиях чистого разума» оперирует без серьезной предварительной критической работы понятием бесконечности при рассмотрении *четырех* вопросов, стараясь доказать, что на них с одинаковым правом можно дать *утвердительные* и *отрицательные ответы* [19]. Вряд ли когда-либо — не исключая пирроновский и академический скепсис, с которым у Канта столь много общего,— что-нибудь так способствовало дискредитации человеческого разума, как этот раздел «критической трансцендентальной философии». При случае я покажу, что лишь благодаря *смутному неотчетливому* употреблению понятия бесконечности (если еще можно говорить о понятиях при подобных обстоятельствах) этому автору удалось вызвать серьезное отношение к его антиномиям и к тому же только у тех лиц, которые, подобно ему, предпочитают уклоняться от основательного математического рассмотрения подобных вопросов [1].

Здесь я хотел бы ответить и на *два* возражения, выдвинутые против моих работ.

Как известно, Гербарт дает такое определение бесконечного, что под него может подпасть лишь понятие *потенциальной бесконечности*, и на этом он основывает свое так называемое доказательство того, что а. б.

внутренне противоречиво. *С тем же правом* он мог бы определить коническое сечение как кривую, точки которой отстоят от центра на равном расстоянии, чтобы, опираясь на это, выставить против Аполлония Пергского положение: «Не существует никаких других конических сечений, кроме *окружности*, а то, что называют *эллипсом, гиперболой* и *параболой*,— внутренне противоречивые понятия». Такого же достоинства и возражения, выставленные против моих «Основ», господами *гербартианцами* (ср.: Ztschr. für exakte Philosophie von Th. Allin und A. Flügel., Bd. 12, S. 389) [20].

Г-н В. Вундт в *двух* своих работах —в его «Логике» (т. 2) и в статье «Kants kosmologische Antinomien und das Problem des Unendlichkeit» (Philos. Stud., Bd. 2) — касается, хотя и своеобразно, моих исследований и у него довольно часто встречаются *введенные мною* слова «трансфинитный=сверхконечный». Но я не могу признать, что он правильно понял меня [21].

В первом сочинении, например, вся фраза в конце с. 127, начинающаяся словами «Wenn wir eine...», прямо *противоположна правильному* пониманию дела. Он также совершенно ошибочно определяет понятия *потенциальной* и *актуальной бесконечностей* (которые я в моих «Основах» назвал *несобственной бесконечностью* и *собственной бесконечностью*). Точно так же я должен отклонить, как неудачное, сопоставление с Гегелем. *Пантеист* Гегель не знает никаких существенных различий в а. б. Для моих же воззрений характерны именно подобные различия, которые я нашел, резко подчеркнул и строго математически развил благодаря открытию *коренной* противоположности между «*мощностью*» и «*порядковым числом*» множеств, что, по-видимому, совершенно проглядел г-н Вундт, хотя она встречается почти на каждой странице моих работ. Столь же мало сходства имеют мои исследования с «метаматематическими» исследованиями, с которыми их все же ставит на одну доску г-н Вундт. Неустойчивость в определении понятий и связанная с нею путаница, занесенная впервые около *века* тому назад с далекого востока Германии в философию, нигде не обнаруживается столь ясно, как в вопросах, относящихся к *бесконечности*: это ясно видно из бесчисленных как *критицистических*, так и *позитивистских*, как *психологических*, так и *филологистических* работ теперешней философской литературы. Нельзя поэтому не упомянуть, что г-н Вундт желает употреблять слово «Infinitum» исключительно в значении потенциально бесконечного. Но ведь это слово издревле и *вполне общим образом* было относимо к положительнейшему из всех понятий, к понятию бога. Приходится удивляться странной идее употреблять отныне слово «Infinitum» только в самом ограниченном синкатегорематическом смысле.

[Примечания]

С данной статьи начинается ряд публикаций, в которых Кантор защищается от *философских* и *теологических* возражений против того понятия бесконечности, которое он положил в основу своих *математических* исследований. Полемически защитная

направленность и форма переписки, в которой появились эти статьи (первоначально в журнале Фихте, а позднее перепечатанные и собранные воедино в «Избранных произведениях») [22], а также желание (не всегда достигаемое) быть понятым нематематиками обусловили некоторую несистематичность и недостаточную математическую строгость. В созданное ранее математическое содержание его теоретико-множественных работ они вряд ли вносили что-либо новое. Однако, с другой стороны, они дают возможность понять и оценить его специфически философский труд. Для современного читателя эти статьи могут представлять разве лишь психолого-биографический интерес.

[1] Здесь Кантор, по-видимому, не совсем правильно представил кантовское учение об «антиномиях чистого разума». У Канта речь идет не об опровержении или отвержении *понятия* бесконечности, а о его применимости к *миру в целом,* о том факте, что человеческий разум по самой своей природе одинаково недостаточен в восприятии мира, будь он как ограниченным, так и неограниченным,— факте, который не может быть устранен из мира ни математической теорией, вроде канторовской теории множеств, ни его не слишком глубокой полемикой. Даже тот, кто, как издатель, принципиально *отвергает* кантовскую теорию математики, согласно которой все математические предложения должны основываться на «чистом созерцании», будет вынужден все же согласиться, что в этом учении об «антиномиях» нашло свое выражение более углубленное проникновение в «диалектическую» природу человеческого мышления. А к этому добавляется то своеобразное обстоятельство, что как раз «антиномии теории множеств», по крайней мере *формальную* аналогию которых с кантовскими вряд ли можно оспаривать, в течение жизни целого поколения преграждали путь к распространению и признанию творения Кантора.

3. К УЧЕНИЮ О ТРАНСФИНИТНОМ* [1]

В предшествующей статье я под влиянием некоторых старых и новых работ, направленных против возможности бесконечных чисел, сделал попытку охарактеризовать с самой общей точки зрения вопросы, связанные с актуально бесконечным, по их высшим различиям с тем, чтобы на этом пути получить обозрение главнейших позиций, которые можно занять по отношению к этому предмету. Я различил а. б. в *трех* отношениях: *во-первых*, поскольку оно осуществляется в высочайшем совершенстве, в совершенно независимом, внемировом бытии, *in Deo*, где я называю его *абсолютно бесконечным* или просто *абсолютным*; *во-вторых*, поскольку оно обнаруживается в зависимом сотворенном мире; *в-третьих*, поскольку мышление может постигнуть его *in abstracto* как математическую величину, число или порядковый тип. В двух последних отношениях, где оно, очевидно, представляется как ограниченное и еще доступное увеличению, а *тем самым родственное конечному* а. б., я называю его *трансфинитным* и самым строгим образом противопоставляю *абсолютному*.

* Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten.— Ztschr. Philos. und philos. Kritik, 1887, Bd. 91, S. 81—125; 1888, Bd. 92, S. 240—265. Перевод П. С. Юшкевича.

В каждом из трех отношений возможность актуально бесконечного можно утверждать или отрицать. Отсюда вытекают в целом *восемь* различных точек зрения, которые все были представлены в философии и из которых я принимаю ту, которая *безусловно утвердительна во всех трех отношениях.*

Если исследование *абсолютно бесконечного* и определение того, что можно сказать о нем человеческому уму, принадлежит *спекулятивной теологии*, то вопросы, связанные с *трансфинитным*, относятся главным образом к области *метафизики* и *математики*. Ими-то я и занимаюсь преимущественно в течение ряда лет.

Так как мне посчастливилось переписываться со многими учеными, обнаружившими дружеский интерес к моим работам, и так как благодаря этому мне представился случай истолковать и разъяснить общепринятым образом опубликованное до сих пор, то я думаю, что этот возникший из живого обмена мыслей материал представляет благодатную почву для изложения ряда соображений, могущих заинтересовать и широкую публику. Поэтому в дальнейшем я наметил опубликовать некоторые из написанных мною писем, не производя в них никаких существенных изменений. Там же, где я сочту необходимым, соответствующие пояснения я дам в подстрочных примечаниях.

К письмам I, III, IV и VIII я хотел бы в качестве введения предпослать следующее.

К I и VIII. Здесь содержится защищаемая мною вот уже около четырех лет и развивавшаяся мною многократно в лекциях концепция, согласно которой я рассматриваю *целые числа* и *порядковые типы* как *универсалии*, которые относятся к *множествам* и получаются из них, когда *абстрагируются от свойств элементов*. Каждое множество четко отличающихся друг от друга вещей можно рассматривать как *некую единую вещь саму по себе*, в которой рассматриваемые вещи являются составными частями или конститутивными элементами. Если абстрагироваться *как* от свойств элементов, *так и* от порядка их задания, то получается *кардинальное число* или *мощность* множества — общее понятие, элементы в котором в виде так называемых единиц срастаются известным образом в такое органическое единое целое, что ни один из них не имеет привилегированного положения в отношении других. При внимательном обдумывании отсюда получается, что двум различным множествам соответствует одно и то же кардинальное число тогда и только тогда, когда они, как я выражаюсь, *эквивалентны* друг другу. Поэтому *нет никакого противоречия* в том, что — как это часто встречается в случае *бесконечных* множеств — два множества, из которых одно является *частью* или *составной частью* другого, имеют *совершенно одинаковое* кардинальное число. В *игнорировании этого обстоятельства* я вижу главное препятствие, искони мешавшее введению бесконечных чисел.

Если вышеуказанный акт абстракции совершается над некоторым данным, упорядоченным в одном или нескольких отношениях (измерениях) множеством лишь в отношении *свойств* элементов, так что их взаимное *расположение* сохраняется, и в том общем понятии, которое, та-

ким образом, становится неким органическим целым, состоящим из различных единиц, сохраняющих между собой — в одном или нескольких отношениях — определенное взаимное расположение, то благодаря этому мы получаем такое universale, которое я называю вообще *порядковым типом* или *идеальным числом*, а в частном случае вполне упорядоченных множеств — *порядковым числом* [1]; это последнее совпадает с тем, что я раньше (Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre) [I.5. 5, § 2] назвал «количеством вполне упорядоченного множества». Двум упорядоченным множествам *один и тот же порядковый тип* соответствует тогда и только тогда, когда они *подобны* или *конформны* друг другу (причем отношение подобия подлежит точному определению).

Здесь вскрыты *корни*, из которых с логической необходимостью развивается *организм* трансфинитной *теории типов*, или теории *идеальных чисел* и, в частности, теории трансфинитных порядковых чисел, которую, надеюсь, я вскоре смогу опубликовать в систематизированном виде.

В рецензии, которую я подготовил для «Deutsche Literaturzeitung» [здесь II.4], я сформулировал следующим образом определения кардинального и порядкового чисел: «Мощностью некоторой совокупности или множества элементов (причем последние могут быть однородными или неоднородными, простыми или сложными) я называю то общее понятие, под которое подпадают все множества, эквивалентные данному множеству, и только они. При этом два множества называются эквивалентными, если их можно сопоставить друг с другом взаимно однозначно и поэлементно. Нечто иное представляет собой то, что я называю «количеством или порядковым числом»; я приписываю его лишь «вполне упорядоченным множествам». Именно «количеством или порядковым числом заданного вполне упорядоченного множества» я называю то общее понятие, под которое попадают все вполне упорядоченные множества, подобные заданному, и только они. «Подобными» же я называю два вполне упорядоченных множества, если их можно отобразить друг на друга взаимно однозначно и полностью, сохраняя при этом данную последовательность элементов у обоих множеств. В случае *конечных* множеств оба момента — «мощность» и «количество» — до известной степени совпадают друг с другом, поскольку конечное множество, оставаясь «вполне упорядоченным» при любом порядке составляющих его элементов, имеет одно и то же порядковое число. Напротив, в случае бесконечных множеств различие между «мощностью» и «порядковым числом» выступает самым резким образом, как это показано в моем сочинении «Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre» (Leipzig, 1883).

Кардинальные числа, как и порядковые типы, представляют собой *простые* понятийные образования; каждое из них есть *истинное единство* (μονάς), потому что в нем *воедино* связаны множественность и многообразие *единиц*. Если нам дано множество M, то его элементы следует представлять себе раздельными. В его же умственном образе $\overline{\overline{M}}$ (см.

[1] Ср.: *Gutberlet C*. Das Problem des Unendlichen.— Ztschr. Philos. und philos. Kritik, 1886, Bd. 88, S. 183 [[2]].

раздел VIII, п. 9 этой статьи), который я называю его порядковым типом, эти единицы, напротив, соединены в один организм. Всякий порядковый тип можно в известном смысле рассматривать как композицию (Komposition) из *материи* и *формы*: содержащиеся в нем понятийно различимые единицы образуют *материю*, тогда как существующий между ними порядок соответствует *форме*.

Если мы присмотримся к определению конечного количественного числа у Евклида, то мы должны будем прежде всего *признать*, что он, как это делаем и мы, относит число — *согласно его истинному происхождению* — к *множеству* и не делает из числа чего-то вроде простого «знака», который прилагается к *отдельным вещам* при субъективном процессе счета. В его «Началах», кн. VII, мы читаем: «Μονάς ἐστιν, καθ'ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λεγέται» и «Ἀριθμός δέ τό ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος» [3].

Но далее мне кажется, что он ошибочно рассматривает *единицы* в числе столь же раздельными, как и элементы в том дискретном множестве, к которому оно относится. В евклидовом определении по крайней мере не хватает прямого указания на *единый характер* числа, между тем как это *безусловно существенно* для него [2].

Нелишне будет заметить, что понятие порядкового числа, как оно было определено выше, вовсе не совпадает в случае конечных порядковых чисел с тем, что обычно называют «порядковыми числительными»

[2] К подчеркиваемой здесь необходимости видеть органический, внутренне единый характер числа близко подошел Никомах, ибо читаем у него (Arith. intr. I, 7.1): «Ἀριθμός ἐστι πλῆθος ὡρισμένον ἤ μονάδων σύστημα ἤ ποσότηος χῦμα (от χέω, т. е. отливать) ἐκ μονάδων συγκείμενον [4]. И Боэций, «Inst. arithm.» I, 3, говорит: «Numerus est unitatum collectivo, vel quantitatis acervus ex unitatibus profusus» [5]. В «Prooemium» к сочинению «Dissertatio de arte combinatiria» Лейбниц в 1666 г., когда он еще ближе стоял в своем развитии к философии древности, так выражался по поводу понятия числа: «Omnis *relatio* aut est *unio* aut *convenientia*. In unione autem res, inter quas haec relatio est, dicuntur *partes*, sumtae cum unione, *totum*. Hoc contingit quoties plura simul tanquam *unum* supponimus. *Unum* autem esse intelligitur quicquid *uno actu intellectus*, s. simul, cogitamus, v. g. quemadmodum numerum aliquem quantumlibet magnum, saepe caeca quadam cogitatione simul aprehendimus, cyphras nempe in charta legendo cui explicate intuendo ne Methusalae quidem aetas suffectura sit. Abstractum autem ab uno est unitas, *ipsumque totum abstractum* ex unitatibus, seu totalitas dictur numerus» [6]. А еще через три года у того же автора в письме Томасиусу (Ed. Erdmann, p. 53) содержится сомнительное пояснение: «numerum definio unum, et unum, et unum etc., seu unitates» [7]. Однако сложение единиц никогда не может служить для определения числа, так как здесь указание главного факта, а именно *как часто* должны складываться единицы, не может быть получено без самого определяемого числа. Это доказывает, что число, получаемое единым актом абстракции, должно задаваться как органическое единство единиц. Отсюда, далее, следует, насколько глубоко ошибочно желание сделать понятие числа зависящим от понятия времени или от так называемого созерцания времени. В новой философии это часто происходило после начинания Канта. Сэр Уильям Роуэн Гамильтон, например, определил арифметику как «The science of pure time» и это делали многие другие авторы [8]. *С тем же правом* они могли бы рассматривать и *всякую другую науку*, например геометрию, как «the science of pure time», ибо при образовании геометрических или прочих понятий мы *субъективно* прибегаем ко «времени» как к форме существования повседневной жизни не меньше, чем при овладении арифметическими понятиями.

(первый, второй и т. д.). Последние представляют собой не что иное, как *наименования* для порядкового ранга элементов вполне упорядоченного множества и *без труда* получаются из *наших порядковых чисел*, если обозначить *последний* элемент конечного вполне упорядоченного множества как n-й элемент рассматриваемой последовательности, когда n является порядковым числом; соответствующим этому самому вполне упорядоченному множеству.

В то время как, с моей точки зрения, «порядковые числительные» появляются как нечто *последнее* и *самое несущественное* в научной теории чисел, они в двух недавно опубликованных работах рассматриваются как исходный пункт для развития понятия числа. Я имею в виду статьи, помещенные фон Гельмгольцем и Л. Кронекером в сборнике «Philosophische Aufsätze. Eduard Zeller zu seinem fünfzigjährigen Doktor — Jubiläum gewidmet». Leipzig: Fues, 1887 [3] [9]. Они защищают крайнюю эмпирически-психологическую точку зрения с такой резкостью, какой нельзя было бы представить себе, если бы мы не видели ее перед собой здесь, дважды облеченной в плоть и кровь. Было бы ошибочно думать, что противоположность их и моих воззрений сводится к противоположности между *номинализмом* или *концептуализмом*, с одной стороны, и защищаемым мной умеренным *аристотелевским реализмом*, с другой. Наоборот, *весьма поучительно* убедиться в том, что для обоих этих мыслителей числа должны быть прежде всего *знаками*, но не знаками, скажем, для понятий, относящихся к множествам, а *знаками для единичных вещей, отсчитываемых при субъективном процессе счета*. Само собой разумеется, что с моей точки зрения ход мыслей в обеих этих работах представляет собой *Hysteron — Proteron* [11].

Столь же противоположны их представления взглядам на числа, которые мы находим не только у философов, но и у математиков древней Греции. Свидетельством этого является вышеприведенное определение Евклида. Что же касается Платона и Аристотеля, то об этом вряд ли приходится упоминать.

Но какую бы позицию ни занять относительно древних, каждому сразу же должно показаться в высшей степени невероятным, чтобы лучшие из них очень далеко уклонились от истины в столь простых, определенных и всем известных вещах и чтобы лишь в XIX столетии нашей эры было найдено правильное понимание этого предмета. Правда, в седую старину существовала одна *секта*, которая приходит на ум при чтении работ Гельмгольца и Кронекера,— *это античный скептицизм*, для ознакомления с которым, в особенности по вопросу о числе, я укажу на «Pyrrhoniarum Hypotyposeon», Lib. 3, cap. 18. Секста Эмпирика [12]. Но и в «веке просвещения», оказавшем такое огромное все еще длящееся влияние на знаменитые и ученые академии, можно отметить

---

[3] Оба автора называют «порядковым числом» то, что я называю «порядковым числительным», тогда как у меня термин «порядковое число» имеет другое значение. Свое «порядковое» число я перевел бы через «numeris ordinarius», а «порядковое числительное» через «nota ordinalis» [10]. Эти «notae ordinalis» и определяют, согласно обоим указанным авторам, сущность числа.

одну превосходную работу, к тому же написанную членом *Берлинской академии наук*: *Bertrand, Louis*. Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques (Génève: Aux dépens de l'Auteur, 1778).

На титульном листе этого двухтомного сочинения находится гравюра: на переднем плане изображен пастух, проверяющий свое возвращающееся домой стадо, на заднем — охотник, стрела которого проносится через пространство; все это снабжено эпиграфом «Tu Pastor numeros, extensi tu rationes Pandito Venator».

Первая же глава начинается так: «Dans les commencemens, les hommes furent chasseurs ou bergers. *Ces derniers eurent d'abord occasion de compter*: il leur importait de ne pas perdre leurs bestiaux; et pour cela il fallait s'assurer le soir si tous étaient revenus du pâturage: celui qui n'en aurait que quatre ou cinq, aurait pu voir d'un coup d'oeil si tous étaient rentrés; *mais un coup d'oeil n'aurait pas suffi à cetui qui en aurait eu vingt*. Considérant donc ces bestiaux revenant *les uns après les autres*, il aurait imaginé *une suite de mots* en pareil nombre, et *gardant ces mots dans sa mémoire* il les aurait répétées le lendemain à mesure que ses bestiaux seraient rentrés; afin d'être sûr, s'ils eussent cessé d'entrer avant qu'il eût achevé ses mots, qu'autant qu'il lui restait de mots à prononcer, autant il lui manquait des bestiaux etc.» [[13]]

Это, очевидно, mutatis mutandis [[14]] тот же числовой принцип, что и у г-д фон Гельмгольца и Кронекера; следовательно, речь здесь идет не о чем-то новом, а, как это часто случается, лишь опять-таки о «старой непризнанной истине» (Бен Акиба) [[15]].

Впрочем, у обоих ученых явно выступает наружу *мотив враждебного отношения* к актуально бесконечному, а так как, как известно, даже «*конечные*» иррациональные числа *нельзя* обосновать с научной строгостью без *решительного* привлечения к делу актуально бесконечных множеств [4], то усилия обоих, особенно Кронекера, направлены с неуклонной последовательностью на то, чтобы с помощью искусственных, кажущихся им подходящими вспомогательных теорий сделать совершенно «ненужными» и лишними иррациональные числа [5], общепринятые со времен Пифагора и Платона,— вместо того чтобы исследовать и объяснить их согласно их природе. Мы видим, таким образом, что господствующий теперь *академически позитивистский скептицизм*, появившийся в виде реакции против чрезмерного канто-фихте-гегеле-шеллинговского идеализма, захватил, наконец, и *арифметику*, где он старается сделать последние еще возможные для него выводы с крайней последовательностью, могущей стать роковой и для него. Ведь чего ему может не доставать после того, как в его распоряжении оказались *такое* остроумие и *такие* силы?

В мои планы не входит подробная оценка обеих этих работ. Можно предположить, что ввиду авторитета их авторов они будут рассмотрены

---

[4] Ср. мои «Основы», с. 21 [здесь I.5.5, § 9] и последний раздел моей работы в «Bih. Kgl. sven. vetenskapsakad. handl.», bd, 11 [[16]].

[5] Ср. *Kronecker* (J. reine und angew. Math., Bd. 99, S. 336) и статью Молька в «Acta math.», vol. 6 [[17]].

и разобраны *другими* критиками. Позволю себе сделать только несколько замечаний.

Работа Кронекера (Philos. Aufsätze, S. 263) [18] ограничивается элементами теории чисел, но она находится в тесной связи с его прежними алгебраическими и теоретико-числовыми исследованиями и поэтому может быть вполне оценена лишь в этой связи. Некоторые указания в статье дают повод к ожиданию, что теория впоследствии будет развита in extensio [19]. Относительно системы Кронекера окончательно можно будет высказаться лишь тогда, когда будет установлено отношение его чисел к геометрии и механике. Пока этого еще нет, всякий вправе усомниться в пригодности его теории. Я, не колеблясь, решаюсь предсказать заранее, что Кронекеру «с идеальным запасом» (с. 266) его «обозначений» не удастся «описать вполне и наипростейшим образом» (это выражение относится к Г. Кирхгофу, «Vorlesungen über mathematische Physik». 1. Vorl.; *Kronecker.*—J. reine und angew. Math., Bd. 92, S. 93 [20]) ***актуально бесконечный запас точек*** пространственного и временно́го континуума, и это мое убеждение тесно связано с доказанной мной в 1873 г. теоремой: мощность континуума выше, чем мощность совокупности всех конечных целых чисел (ср. J. reine und angew. Math., Bd. 77, S. 258 ff.) [здесь I.2].

Во введении к статье Кронекера (Philos. Aufs., S. 264) приводится небольшое юмористическое стихотворение Шиллера («Архимед и юноша»), посвященное «вечному числу» [21]. Если, как это имеет место у Кронекера и Гельмгольца, первоначальный смысл чисел сводится к роли простых числовых знаков, то я решительно не понимаю их связи с «вечностью», ибо, встречая это слово, я всегда вспоминаю непревзойденное определение Боэция (De Consolatione philosophicae. Lib. 5, prosa 6) [22].

В заключение подчеркну, что доказательство основной теоремы (с. 268) не кажется мне имеющим принудительный характер в рассуждении Кронекера. Там должно быть доказано, что «количество» не зависит от порядка счета. Если же внимательно проследить за доказательством, то оказывается, что в нем в другой форме уже предполагается и используется то самое положение, которое должно быть доказано. Следовательно, здесь налицо ошибка petitio principii [23].

В этой связи я пользуюсь случаем исправить другую ошибку, совершенную Кронекером по отношению к моему покойному другу и коллеге Эдуарду Гейне. В «J. reine und angew. Math.», 1886, Bd. 99, S. 336, главным образом на последнего возложена ответственность за развитую им в работе «Элементы теории функций» (J. reine und angew. Math., 1872, Bd. 74) теорию иррациональных чисел на основе понятия «фундаментальная последовательность» (которую Гейне называет «числовой последовательностью»), хотя во введении к своей работе Гейне прямо сказал, что основную идею он «заимствовал» у меня и что он мне «обязан за устные сообщения», которые оказали «значительное влияние» на оформление его работы. Одновременно с работой Гейне в том же 1872 г. в пятом томе «Mathematische Annalen» появилась моя работа под названием «Об обобщении одной теоремы из теории тригонометрических рядов»

[здесь I.1], в которой я вкратце развил существенные пункты своей теории иррациональных чисел. Позже я еще раз вернулся к этому вопросу в «Основах», с. 23 [здесь I.5.5, § 9]. Поэтому я должен взять целиком *на себя* ответственность за эту теорию, на которую так обрушивается г-н Кронекер, освободив г-на Гейне от мнимой, приписанной ему г-ном Кронекером, вины [24].

К III и IV. *Теологи* возразили мне, что то, что я назвал «Transfinitum in natura naturata» (см. этот «Ztschr.», Bd. 88, S. 227 [264]), «невозможно защищать и в известном смысле», которого, однако, я, «по-видимому, не придаю» этому понятию, ибо оно «содержит в себе заблуждение пантеизма» [25]. На эти сомнения я ответил письмом III, после которого я имел удовольствие получить подробный ответ, каковой позволю себе перепечатать здесь дословно, опустив некоторые лестные для меня эпитеты.

На письмо III мне ответили следующим образом:

«Из Вашей статьи «К проблеме актуально бесконечного» [26]я, к моему удовлетворению, вижу, что Вы совершенно четко различаете абсолютно бесконечное и то, что Вы называете *актуально бесконечным* в творении. Так как Вы прямо утверждаете, что последнее «*еще доступно увеличению*» (разумеется, ad infinitum, т. е. без того, чтобы оно не могло стать чем-то, уже недоступным увеличению), и противопоставляете его абсолютному как «существенно недоступному увеличению»,— что, разумеется, должно быть применимо и к возможности или невозможности уменьшения или убывания, — то оба понятия, понятия абсолютно бесконечного и актуально бесконечного в творении или трансфинитного, по существу различны, так что при сравнении их лишь одно следует называть *собственно бесконечным*, а другое — несобственно и aequivoce [27] бесконечным. При таком понимании дела в Вашем понятии трансфинитного нет, насколько я пока вижу, никакой опасности для религиозных истин. Но в одном пункте Вы, конечно, заблуждаетесь относительно несомненной истины; однако это заблуждение проистекает не из Вашего понятия трансфинитного, а из недостаточного разумения абсолютного. В Вашем любезном письме ко мне Вы говорите сначала правильно (предполагая, что Ваше понятие трансфинитного не только безукоризненно религиозно, но и *истинно*, о чем я не берусь судить), что одно доказательство вытекает из понятия бога и умозаключение делается прежде всего из высочайшего совершенства божеского существа к возможности сотворения обычного трансфинитного. В предположении, что Ваше *актуальное* трансфинитное не содержит в себе никакого противоречия, Ваше заключение о *возможности сотворения* трансфинитного из понятия всемогущества вполне правильно. Но, к сожалению, Вы делаете дальнейший шаг и умозаключаете «от его всеблагости и величия к *необходимости* фактически последовавшего сотворения трансфинитного». Именно потому, что бог есть сам по себе абсолютно бесконечное благо и абсолютное величие, которые не могут быть ни увеличены, ни уменьшены, *необходимость* сотворения чего бы то ни было представляет собой *противоречие*. *Свобода* сотворения есть такое же необходимое со-

вершенство бога, как и все прочие его совершенства, или лучше, бесконечное совершенство бога есть (согласно нашим необходимым различениям) в такой же мере *свобода*, как и могущество, мудрость, справедливость и т. д. С Вашим заключением о *необходимости* сотворения трансфинитного Вы были бы вынуждены пойти значительно дальше. Ваше актуальное трансфинитное доступно увеличению; но если бесконечная благость и величие бога требуют вообще с необходимостью сотворения трансфинитного, то отсюда следует — ввиду той же самой бесконечности его величия и благости — необходимость увеличения до тех пор, пока оно не стало бы недоступным дальнейшему увеличению, что противоречит Вашему собственному понятию о трансфинитном. Иными словами: тот, кто из бесконечной благости и величия бога заключает о необходимости сотворения, тот должен утверждать, что все доступное созданию в действительности создано изначально и что перед божьим оком нет ничего возможного, что могло бы привести в действие его всемогущество. Это Ваше несчастное мнение о необходимости сотворения создаст Вам большие препятствия в борьбе с пантеистами и во всяком случае ослабит силу Вашей аргументации. Я так подробно остановился на этом пункте потому, что самым сердечным образом желаю, чтобы Ваша проницательная мысль освободилась от столь рокового заблуждения, в которое, правда, впадают и многие другие, и даже те, которые считают себя правоверными».

Со всем тем, что сказано в этом письме, я вполне согласен, как это видно из тех немногих строк, которые приведены далее под рубрикой V. Так как для меня не подлежит никакому сомнению абсолютная свобода бога, то выражение «необходимость» в соответствующем месте письма VI понималось мною не так, как это предполагается здесь и справедливо отвергается. Но если тщательно вдуматься в правильный смысл моей аргументации, то — как я разъясню при случае впоследствии — данная мной в IV попытка априорного доказательства в пользу фактически *последовавшего* сотворения трансфинитного мира заслуживает, как мне кажется, дальнейшего обсуждения и проверки.

I [6]

Под *мощностью* или кардинальным числом множества M (которое состоит из строго различных, понятийно разделенных элементов m, m', ... и которое постольку определено и отграничено) я понимаю общее или родовое понятие (universale), получающееся, если абстрагиро-

---

[6] Это письмо написано три года тому назад, 15 февр. 1884 г. г-ну проф. д-ру Курду Лассвицу в Готе [28]. Оно передает в существенных чертах содержание доклада, прочитанного мной в сентябре 1883 г. в математической секции собрания естествоиспытателей в Фрайбурге (Баден). Вскоре после этого доклада я получил письмо от г-на Р. Липшица (о котором я упомянул в «Ztschr. Philos. und philos. Kritik», Bd. 88, S. 225 [здесь с. 263], в котором этот превосходный математик обратил мое внимание на переписку (от 12 июля 1831 г.) между Гауссом и Шумахером, где Гаусс высказывается против всякого привлечения актуально бесконечного в математику [29].

ваться как от свойств элементов множества, так и от всех отношений этих элементов друг к другу и к другим вещам, а в частности и от порядка, который может господствовать между этими элементами, и если иметь в виду лишь то, что является общим для всех множеств, *эквивалентных* M. При этом два множества M и N я называю *эквивалентными*, если между ними можно установить поэлементное взаимно однозначное соответствие (Ср.: J. reine und angew. Math., Bd. 84, S. 242) [I.3]. Поэтому вместо мощности или кардинального числа я пользуюсь также более коротким выражением *валентность* [30]. О множествах равной валентности я говорю, что они принадлежат одному и тому же классу мощностей. Следовательно, *валентность* множества M есть то общее понятие, под которое подпадают все множества того же класса, что и M, и только они.

Одной из важнейших задач учения о множествах, которую, как мне кажется, я по существу решил в работе «Основы общего учения о многообразиях» (Лейпциг, 1883) [I.5.5], является требование определить различные валентности или мощности встречающихся во всей природе — насколько она раскрывается нашему познанию — многообразий. Этого я достиг развитием общего *понятия числа для вполне упорядоченных множеств или, что означает то же самое, понятия порядкового числа*[7].

Определение того, что я понимаю под *вполне упорядоченным* множеством $\mathfrak{M}$, находится в «Основах», с. 4 [здесь I.5.5, § 2].

Два *вполне упорядоченных* множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ я называю принадлежащими к одинаковому *типу* или *подобными друг другу*, если между ними можно установить *такое* взаимно однозначное соответствие, что когда m и m' являются двумя любыми элементами первого множества, а n и n' — соответствующими им элементами другого, *тогда* отношение порядка между m и m' всегда то же самое, что и отношение порядка между n и n'. О двух таких *вполне упорядоченных* множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ я говорю, что они *перечислимы друг через друга.*

Так, например, вполне упорядоченные множества

$$(a, a', a'') \quad \text{и} \quad (b, b', b''),$$

равно как и вполне упорядоченные множества

$$(a, a', a'', \ldots, a^{(\nu)}, \ldots) \quad \text{и} \quad (b, b', b'', \ldots, b^{(\nu)}, \ldots),$$

а также

$$(a, a', a'', \ldots, a^{(\nu)}, \ldots, c, c', c'') \quad \text{и} \quad (b, b', b'', \ldots, b^{(\nu)}, \ldots, d, d', d'')$$

имеют одинаковый тип или, что то же самое, перечислимы друг через друга.

Под *количеством* или *порядковым числом* вполне упорядоченного множества $\mathfrak{M}$ я понимаю то *общее понятие* (родовое понятие, universa-

---

[7] Понятие *порядкового числа* является частным случаем понятия порядкового типа, которое относится ко всякому *просто* или *кратно упорядоченному* множеству так же, как порядковое число к *вполне упорядоченному* множеству. Г-н К. Гутберлет по моему желанию внес в свою статью (Ztschr. Philos. und philos. Kritik, Bd. 88, S. 183) [31] относящиеся к этому изменения по одной моей рукописи.

le), которое получается, если отвлечься от свойств и обозначения элементов этого множества и если иметь в виду лишь расположение элементов по отношению друг к другу. Следовательно, *количество* или *порядковое число* множества $\mathfrak{M}$ обще всем вполне упорядоченным множествам *того же самого типа*,— оно как бы то, что имманентно всем им. Здесь перед нами возникает задача определить встречающиеся в природе количества или порядковые числа вполне упорядоченных множеств и правильно отличить их друг от друга при помощи подходящих знаков. К этому нас приводят следующие определения и положения.

Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — два каких-нибудь *вполне упорядоченных* множества, α и β — соответствующие им порядковые числа; тогда $\mathfrak{M}$ в соединении со следующими за ним $\mathfrak{N}$ всегда является опять-таки *вполне упорядоченным множеством определенного типа* с соответствующим ему порядковым числом γ. Мы определяем γ как сумму α и β, т. е. $\gamma=\alpha+\beta$, и называем α первым, а β вторым слагаемыми этой суммы. Если α и β являются двумя различными, т. е. соответствующими двум различным типам, числами, то можно доказать, что *или* уравнение $\beta=\alpha+\xi$, *или* уравнение $\alpha=\beta+\xi$ разрешимо относительно ξ (т. е. относительно *второго слагаемого* суммы) и притом единственным образом. В первом случае мы говорим, что α меньше β, а во втором — что α больше β; ξ будет называться разностью этих двух чисел; в первом случае $\xi=\beta-\alpha$, а во втором $\xi=\alpha-\beta$.

Легко доказать, что если $\alpha<\beta$, $\beta<\gamma$, то $\alpha<\gamma$. Далее показывается, что всегда имеет место ассоциативный закон

$$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma).$$

Аналогично определяется произведение двух порядковых чисел, причем следует тщательно отличать *множитель* от *множимого*, ибо вообще $\alpha\cdot\beta$ отлично от $\beta\cdot\alpha$. Но и здесь доказывается — я мог бы сказать, почти непосредственно,— что

$$(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma) \quad \text{(ассоциативный закон)},$$

а также

$$\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma \quad \text{(дистрибутивный закон с множимым } \alpha\text{)}$$

всегда выполняются.

В «Основах» я писал множитель *слева*, а множимое *справа*. Но оказалось, что для дальнейшего развития учения о трансфинитных порядковых числах целесообразнее и даже почти необходимо поступать наоборот, т. е. *сначала множимое слева*, а *затем множитель справа*. Поэтому отныне я *навсегда* изменяю соответствующий способ записи «Основ», как только речь идет о *произведении*. Насколько важно это изменение, можем убедиться, как только станем рассматривать трансфинитные порядковые числа вида α^ρ, для которых в соответствии с *этим* способом записи справедлив общий закон: $\alpha^\beta\cdot\alpha^\gamma=\alpha^{\beta+\gamma}$. По способу же записи «Основ» тот же самый закон принял бы отталкивающий вид

$$\alpha^\beta\cdot\alpha^\gamma=\alpha^{\gamma+\beta}.$$

Обращаю внимание еще на следующее. Если во вполне упорядоченном множестве $\mathfrak{M}$ два каких-нибудь элемента m и m' меняются местами, то от этого тип множества, а значит, и его «количество» или «порядковое число» не изменяются. Отсюда следует, что *такие преобразования* вполне упорядоченного множества, которые можно свести к конечной или бесконечной последовательности *транспозиций* двух любых элементов, т. е. все такие изменения, которые получаются перестановками элементов, не меняют *количества* этого множества. Но так как в случае *конечных* множеств,— если совокупность его элементов остается тою же самой,— всякое преобразование можно свести к последовательности транспозиций, то в этом заключается причина того, почему у *конечных* множеств до известной степени совпадают порядковое и кардинальное числа; ведь здесь множества одной и той же валентности, рассматриваемые как вполне упорядоченные, в любой форме имеют всегда одно и то же порядковое число. Но в случае бесконечных множеств различие между *кардинальным* и *порядковым* числами сразу выступает самым резким образом. С этим же обстоятельством связана применимость к *конечным* множествам коммутативных законов сложения и умножения, ибо очень легко доказать, что если μ и ν суть два конечных порядковых числа, то всегда имеем $\mu+\nu=\nu+\mu$ и $\mu\cdot\nu=\nu\cdot\mu$.

Для наименьшего трансфинитного порядкового числа, т. е. числа, соответствующего вполне упорядоченным множествам типа

$$(a, a', a'', \ldots, a^{(\nu)}, \ldots),$$

нужно будет выбрать *новый* знак; я взял для этого последнюю букву греческого алфавита ω.

Под порядковыми числами *второго* числового класса я понимаю те числа, которые соответствуют вполне упорядоченным множествам мощности *первого* числового класса 1, 2, 3, ..., ν, ... Совокупность этих порядковых чисел дает *новую* валентность и притом *непосредственно следующую* за вышеуказанной валентностью, как это было строго доказано мной («Основы», с. 35—38 [здесь I.5.5, § 13]). Тот же самый ход мыслей приводит нас к более высоким числовым классам и соответствующим им более высоким валентностям. Это представляет собой чудесную, грандиозную гармонию, точное осуществление которой является предметом учения о трансфинитных числах.

Я счел необходимым предпослать все эти замечания, правда, в очень кратком виде, чтобы получить возможность заняться некоторыми замечаниями, содержащимися в Вашем письме. Прежде всего я обращаю внимание на *всеобщность, отчетливость* и *определенность* моих определений чисел; эти определения *одинаковы* независимо от того, относятся ли они к *конечным* или *бесконечным* множествам. Например, каждое трансфинитное число второго числового класса обладает согласно своему определению *той же самой определенностью, той же законченностью в себе, что и каждое конечное число.*

Понятие об ω, например, не содержит *ничего шаткого, ничего неопределенного, ничего изменчивого, ничего потенциального*, оно не

ἄπειρον, но ἀφωρισμένον [32], и то же самое верно для всех других трансфинитных чисел. Это понятие, как и любое конечное число, например 3 или 7, *противостоит* неопределенным знакам *x*, *a*, *b* буквенного исчисления, с которыми Вы в своем письме неудачно сравниваете трансфинитные числа. Делая это, Вы отклоняетесь от того смысла, который имеют у меня трансфинитные числа, отклоняетесь так же, как это сделал г-н Вундт в том толковании данного вопроса, которое содержится в его учении о методе (Logik, Bd. 2, S. 126—129) [33]. Изложение Вундта показывает, что он не представляет себе ясно и отчетливо основное различие между несобственно бесконечным=переменным конечным= synkategorematice infinitum (ἄπειρον), с одной стороны, и собственно бесконечным= *Transfinitum* =законченно бесконечным= *бесконечно сущим*= kategorematice infinitum (ἀφωρισμένον) — с другой. В противном случае он не обозначил бы как *первое*, так и *второе* словом *предел*. Предел есть всегда нечто *твердое, неизменное*; поэтому из этих обоих понятий бесконечности всегда можно мыслить *существующим* только Transfinitum, рассматривая его при известных обстоятельствах и в некотором смысле также и как *фиксированный предел*. Поэтому-то Вундт ошибается и тогда, когда он утверждает, что Transfinitum не имеет никакого физического смысла, а имеет его потенциально бесконечное. Строго говоря, верно как раз *обратное*, ибо потенциально бесконечное есть лишь вспомогательное понятие, понятие отношения, и оно всегда указывает на некоторое лежащее в основе трансфинитное, без которого оно не может ни существовать, ни быть мыслимым. Различие между несобственно бесконечным и собственно бесконечным было осознано философами очень давно, т. е. еще древними греками, хотя, правда, не всегда с одинаковой ясностью. Мы находим его ясно выраженным также и у новых философов, за исключением, разве, Канта, Гербарта и материалистов, эмпиристов, позитивистов и т. д. При этом Гегель не заслуживает, как это, по-видимому, думает Вундт, особого упоминания, тем более что у Гегеля все темно, туманно и противоречиво; ведь *противоречие* как своеобразный элемент его философии даже возводится им самим в характерную особенность его мышления, в чем я по крайней мере ему не завидую. Кроме того, то правильное, что сказал Гегель о рассматриваемом здесь различии заимствовано, как и столь многое другое у него, у Спинозы. Но у всех философов не хватает *принципа различия* в Transfinitum, приводящего к различным трансфинитным числам и к различным мощностям. Большинство из них даже смешивает трансфинитное с *лишенным различий* по самой его природе *высшим единством*, с абсолютным, с абсолютным максимумом, который, разумеется, вовсе недоступен определению, а потому не поддается математике.

Совсем неудачно в вундтовой критике сопоставление новейших так называемых метаматематических спекуляций с моими работами. У них ничего сходного, ни одной точки соприкосновения. Кроме того, трансфинитное *нельзя* называть «трансцендентным» (т. е. совсем превосходящим человеческое разумение).

В рецензии Баллауфа [8], в которой путаница особенно велика в сопровождающих ее редакционных примечаниях, неверно даже последнее, *претендующее на остроумие* соображение в конце ее. Оно основывается на очевидном заблуждении. Если мы имеем бесконечную прямую

[8] Ztschr. exakte Philos., Bd. 12, S. 375 [34]. От этой рецензии у меня осталось впечатление, что критик, во многих отношениях понявший мои соображения очень хорошо, был вынужден из-за терроризма руководителя своей школы занять более непримиримую позицию в отношении меня, чем та, которая, как кажется, согласуется с его убеждениями. Наиболее поразительным образом это выступает на с. 389, где редакторы (Теод. Аллин и Отто Флюгель) [35] на его свободное, непринужденное размышление внезапно набрасывают узду, чтобы возвратить в убогую и мрачную подземную тюрьму догматики Гербарта, куда не проникает луч света. На сказанное там в сноске под текстом неминуемы два ответа. Во-первых, они, по-видимому, не читали моей работы, так как не принимают во внимание то, что я в «Основах» самым строгим образом отличаю потенциально бесконечное, которое я называю несобственно бесконечным, от актуально бесконечного, названного там собственно бесконечным. Гербарт и его ученики признают лишь *первое*, только ему придают наименование бесконечного и ничего не знают о трансфинитном. Против этого нельзя было бы возразить, non cuivis homini contingit adire Corinthum и, разумеется, при их манере употребления слов налицо было бы contradictio in terminis [36], когда бесконечному сопоставляется предикат определенности. Но как можно формально оправдать упрек, сделанный мне, будто я захотел объединить предикаты определѐнности и неопределенности с тем, чтобы сделать из этого нечто «неопределенно-определенное», и это после того, как я, наоборот, столь четко отделил потенциально бесконечное от трансфинитного, что они всюду оказываются у меня toto genere [37] различными? Другой ответ содержателен и дается скорее учителю, нежели его неудачным ученикам. По Гербарту, IV, 88 ff. [38], понятие бесконечности должно относиться «к некоему *изменяющемуся пределу*, который всегда может, соответственно должен, быть отодвинут». «Отвлечение от этой *изменчивости* предела означает снятие понятия бесконечности, представляет собой мысль уже не о бесконечном, а о конечном. Однако от этой *изменчивости предела* или постоянной возможности продвижения вперед отказываются тогда, когда бесконечное рассматривают как завершенное, как реально существующее; но тогда рассматривается уже не бесконечное, а конечное множество. При этом речь идет совсем не о субъективной неспособности, невозможности завершить когда-либо счет или перебор, а о самом понятии бесконечности, существенным, неотъемлемым признаком которого является как раз *переменный предел, за которым всегда находится что-то еще*. По поводу счета только что сказанное можно выразить и так: для всякого конечного множества вещей, сколь бы большим оно ни было, всегда имеется возможность объективного перечисления (когда множество содержит, например, тысячу миллионов предметов, то я мог бы усомниться, что г-да редакторы в состоянии *тотчас же* осуществить объективный подсчет.— *Примеч. авт.*). Напротив, для *бесконечного* множества (значит, все же некое признание бесконечных множеств!) возможность перечисления полностью исключена (в чем в указанном здесь смысле никто не сомневался), *ибо подлинно бесконечное можно мыслить только как неопределенное, незавершенное* (значит, «подлинно бесконечное» должно быть *хуже*, чем конечное!?). И т. д.» Неужели эти господа, собираясь совершить поездку, выпестованную в грезах или фантазии, совершенно забыли, что для безопасного передвижения или странствования безусловно нужны *прочная почва* и *выровненный путь*, который не обрывается, а является и должен быть проходимым всюду, куда направлена эта поездка? Неужели только на господ гербартианцев не оказало никакого впечатления то предупреждение, которое всем нам сделал «Гансом Гуком — ротозеем» Генрих Гофман в его «Struwelpeter» (Frankfurt a. M.: Loenig)? [39]. То далекое путешествие, которое Гербарт предписывает своему «*изменяющемуся пределу*», определенно не ограничивается *конечным путем*; действительно, его *путь* бесконечен, а поскольку этот путь *не есть изменение*, а всюду фиксирован, то он должен быть *актуально бесконечным*. Следовательно, всякая *потенциальная бесконечность* (изменяющийся предел) требует нечто *трансфинитное* (путь, обеспечивающий изменение)

AO, начинающуюся в *A*, и если мы прибавим к ее началу *A* конечный отрезок *BA*, то мы снова получаем бесконечную и начинающуюся в *B* прямую *BO*, в которой прибавленный отрезок ровно ничего не изменяет в отношении «величины». Это видно из того, что новую прямую можно сделать вполне конгруэнтной прежней. Конечно, избыток, полученный ею благодаря присоединению *BA*, реально существует и бесспорен, но совершенно *исчезает*, если иметь в виду лишь присущую обеим линиям *AO* и *BO акциденцию* величины. Кто видит здесь — как и вообще в случае актуально бесконечных количеств — нарушение принципа противоречия, тот совершенно заблуждается, ибо он упускает из вида абстрактный характер «величины» и ошибочно отождествляет ее с субстанциональной сущностью рассматриваемого количества [9]. В ана-

и не может быть мыслимой без последнего (ср. в связи с этим разделы V и VII данной работы). А так как своими работами мы проложили широкую дорогу трансфинитного, она достаточно прочна и заботливо вымощена, то мы и предлагаем ее для движения как прочную основу, необходимую всем друзьям потенциальной бесконечности, и с особым удовольствием — гербартовскому изменчивому «пределу». Мы охотно и спокойно предоставляем ее для их нисколько не завидной участи утомительной монотонности; пусть под их ногами уже никогда не колеблется почва. Счастливого путешествия!

[9] На этом заблуждении многие основывают свои так называемые доказательства невозможности актуально бесконечных количеств или чисел. Ср., например: *Renouvier Ch.* Esquisse d'une classification systematique des doctrines philosophiques. Paris, 1885, vol. 1, p. 100; *Tongiorgi Salv.* Inst. phil. ed. 10, vol. 2, ont. § 350, 3; *Pesch T.* Inst. phil. nat., § 412, 1°—4° [40]. В этой связи позволю себе указать и на другие ошибки, имеющиеся у двух последних авторов, как и у многих других. Тонджорджи в ontol. § 349, prop. 9, утверждает: «Danturne in eadem linea puncta quae ab *X* actu infinite distent, an non? *Si non dantur haec puncta*, linea est finita» [41]. Пеш (§ 425, arg. 3, 1°) тоже говорит: «*Linea autem* cujus omnia puncta inter se distantiam habent finitam, ipsa finita est». В то время как в первом предложении конечность предполагается secundum partes [42] имеющей *дистрибутивный* смысл, в следующем предложении без какого-либо оправдания делается заключение о конечности в *коллективном* смысле quod totum [43], что по св. Фоме Аквинскому (Opusc. de fallaciis, cap. XI) следует признать как fallacia secundum quid et simpliciter [44].

Рассмотрим, далее, следующую аргументацию Тонджорджи, § 350, 2° (*Пеш*, § 412, 3°, 4°): «Supponatur ex unitatum accumulatione multitudio infinita. Haec erit numerus infinitus, aequabitque numerum qui ipsum immediate praecedit, unitate adjecta. *Iam numerus paecedens* eran te infinitus, an vero non erat? Infinitum illum dicere non potes; nam crescere adhuc poterat ac re ipsa crevit additione unitatis. Erat ergo finitus, et unitate addita, factus est infinitus. Nimirum ex duobus finitis infinitum emersit; id quod absurdum est» [45].

Здесь ошибочно предполагается, что актуально бесконечное число необходимо должно (поскольку к этому привыкли при оперировании с конечными числами) иметь непосредственно предшествующее ему целое число, из которого оно получается прибавлением единицы. Это предположение не выполняется, например, ни для наименьшего кардинального числа $\overline{\omega}$, ни для наименьшего порядкового числа ω. Им соответственно предшествуют конечные кардинальные числа, никакое из которых не является наибольшим, и конечные порядковые числа, не имеющие никакого максимума. Поэтому было бы бессмысленным говорить о кардинальном числе, непосредственно предшествующем $\overline{\omega}$, или о порядковом числе, непосредственно меньшем, чем ω. Однако из ложных посылок не следует ожидать какого-либо истинного следствия. Поэтому всю эту аргументацию нужно навсегда отбросить.

Г-н Гутберлет в своем труде (Das Unendliche metaphysisch und mathematisch betrachtet. Mainz, 1878, S. 18) [46] попытался опровергнуть то же самое рассуждение тем, что он — наподобие того, как это уже делал Лейбниц,— оставил на произвол судьбы

логичную ошибку впадает, по-видимому, и Вундт на с. 128. Поэтому нет нужды в дальнейших объяснениях, почему я в «Основах» в самом же начале различаю два toto genere отличные друг от друга понятия, которые я называю несобственно бесконечным и собственно бесконечным. Их не должно представлять себе *каким-либо* образом соединимыми или родственными. Соединение или смешение обоих этих совершенно различных понятий, имевшее место так часто во все времена, является, по моему глубокому убеждению, источником бесчисленных заблуждений. В частности, именно в этом я вижу причину того, почему *трансфинитные числа* не открыли еще раньше.

Чтобы заранее исключить возможность этого смешения, я обозначаю наименьшее трансфинитное число знаком, *отличным* от обычного знака ∞, соответствующего смыслу потенциально бесконечного, а именно через ω.

Разумеется, этот знак ω можно в известном смысле рассматривать как предел, к которому стремится переменное целое число ν, но только в том смысле, что ω есть *наименьшее* трансфинитное порядковое число,

---

бесконечное «число», а направил свои усилия как на спасение бесконечного «множества». Однако, по моему мнению, совершив такой поворот, нельзя сделать бо́льшего одолжения противникам трансфинитного. Действительно, бесконечные число и множество неразрывно связаны друг с другом; как только задано одно, так мы уже не имеем права отказываться от другого. Не могу я также согласиться и с тем, как Гутберлет, соблазнившись двусмысленными пояснениями Лейбница и Ньютона и призвав на помощь новые «математические авторитеты», вроде Любзена, Клюгеля, Р. Гоппе, пытается найти в «дифференциалах» (которые следует понимать только как величины, *становящиеся* бесконечно малыми; ср. разделы VI и VII данной статьи) опору для а. б., придумывая для этого недопустимые деления. В этом отношении его лучше всего опровергает Т. Пеш (Inst. phil. nat., § 421, 422) [47].

Тем более нужно особенно подчеркнуть, что г-н проф. Гутберлет настойчиво и успешно указывает (1. Abt., 1 Abschn., § 3, 5 и 6 его труда) на зависимость потенциальной бесконечности от лежащей в основе актуальной бесконечности. Он правильно сделал ударение на то, что a parte rei собственно уже не существует никакой потенциальной бесконечности. Это же было признано и Штёклем, считающим потенциально бесконечное неким ens rationis [48].

Но зато в различных местах у Гутберлета (например, с. 45 его труда) я обнаруживаю совершенно неприемлемый тезис, что в «понятии величины, мыслимой бесконечной, содержится исключение какой-либо возможности увеличения». Это может случиться лишь для абсолютно бесконечного; трансфинитное же, хотя оно представляется определенным и бо́льшим всякого конечного, разделяет с конечным свойство быть неограниченно увеличиваемым.

Труд Т. Пеша, выделяющийся эрудицией и остроумием, дает мне — в связи с разделом, посвященным в нем бесконечному,— повод к еще одному замечанию.

Автор в § 403 своего исследования кладет в основу два *различных* определения бесконечности, которыми он promisque пользуется в своих доказательствах, не установив, что эти понятия можно заменять друг другом. Это определенно недопустимо даже формально. В данном же случае хотя бы попытка доказать связь между этими двумя понятиями привела бы к убеждению, что речь идет о двух toto genere различных вещах [49]. Первое определение — «infinitum illud dictur, cujus aliquid semper est extra» (Aristoteles phys. 1.3, c. 4, 203a, 20) — подходит собственно только для ἄπειρον или потенциально бесконечного; напротив, второе — «infinitum id est, quo non sit majus, nec esse possit» (которого, впрочем, нет в указанном Пешем месте из Arist. 1.1 de coelo c. 5) — соответствует только абсолютно бесконечному [50]. Следовательно, в этом труде *трансфинитное* оказалось совсем не принятым во внимание.

т. е. наименьшее *твердо определенное* число, которое больше, чем все конечные числа ν. Аналогично и $\sqrt{2}$ есть предел известных переменных возрастающих рациональных чисел с той лишь особенностью, что разность между $\sqrt{2}$ и этими приближенными дробями становится бесконечно малой, тогда как $\omega-\nu$ всегда равна ω. Но это различие нисколько не меняет того обстоятельства, что ω содержит в себе столь же мало следов стремящихся к нему чисел ν, как и $\sqrt{2}$ от рациональных приближенных дробей.

Трансфинитные числа в известном смысле суть сами *новые иррациональности*. Действительно, по-моему, лучший метод определения *конечных* иррациональных чисел совершенно подобен, я готов сказать, в принципе тот же самый, что и мой описанный выше метод введения трансфинитных чисел. Можно, безусловно, сказать: трансфинитные числа *стоят или падают* вместе с конечными иррациональными числами. По своему внутреннему существу они подобны друг другу, ибо как те, так и другие суть определенно отграниченные образования или модификации (ἀφωρισμένα) [10] актуально бесконечного.

II[11]

Как ни мало склонен я критиковать взгляды других, но ввиду важности предмета по Вашему повторно выраженному желанию я рассмотрел выдвинутые Вами в статье «Das Problem des Unendlichen» [12] [[52]] доводы против «Infinitum actuale existens seu in concreto», которые, по Вашему мнению, неприменимы аналогичным образом против «inf. act. possible» [[53]], и нашел, что и в данном случае,— как и во всех доказательствах, преследующих ту же самую цель,— в основе лежит скрытый порочный круг. В моем письме к г-ну Г. Энестрёму я сказал, что все так называемые доказательства, направленные против актуально бесконечных чисел, основываются на πρ τον ψεῦδος [[54]], в котором не отдают себе полного отчета, но которое я берусь указать в каждом предложенном мне случае. Оно заключается в том, что актуально бесконечной величине заранее приписывают все свойства конечной величины, откуда потом легко получается противоречие с тем, что она не конечна. Таким путем думают найти доказательство невозможности актуально

[10] Ср.: Conimbricenses Phys., Lib. III, cap. 8, quest. 1, art. 1; это место относится к Aristoteles Φγ 8 208a6, где ἄπειρον δυνάμει противопоставляется ἄπειρον ὡς ἀφωρισμ νον, и, как я при случае подробно докажу, отвергается по совершенно недостаточным основаниям. Ср. также: *Thomas*. Phys. III, lect. 13. Основные положения Стагирита доказывают не что иное, как то, что аргументы, придуманные древними натурфилософами в пользу *необходимого* существования ἄπειρον ἀφωρισμένον, являются неубедительными. Но он не доказывает невозможность существования ἄπειρον ἀφωρισμ νον. Другими словами, *он не доказывает*, что последнее понятие, если его понимать как *трансфинитное*, является противоречивым; такое доказательство было бы трудно или, правильнее сказать, невозможно и для него [[51]].

[11] Это письмо было послано г-ну проф. Гутберлету в Фульде. Оно датировано 24 января 1886 г.

[12] Ztschr. Philos. und philos. Kritik, Bd. 88, S. 199.

бесконечного, тогда как в действительности лишь вертятся в порочном круге. Совершенно то же убеждение у меня и в отношении всех попыток доказательств, с помощью которых оспаривают а. б. in concreto seu in natura creata. Но здесь присоединяются еще и другие более важные соображения, которые вытекают из абсолютного божеского всемогущества и по отношению к которым всякое отрицание возможности «transfinitum seu infinitum actuale creatum» [55] оказывается как бы умалением этого атрибута божества. Но здесь я не буду останавливаться на этом последнем аргументе, ибо в Вашем доказательстве достаточно будет рассмотреть то, что, согласно моему высказанному выше убеждению и моему не претендующему на обязательность мнению, в нем неверно.

Ваше рассуждение гласит дословно следующее: «Однако здесь я надеюсь доказать, что актуально бесконечная величина не может существовать. Если бы существовала какая-нибудь бесконечная линия. некая бесконечно длинная проволока, то в том месте, где она касается меня, можно было бы вырезать конечный кусок, а затем опять соединить друг с другом оба оставшиеся куска. Но теперь ни один из двух этих кусков уже не бесконечен. Ведь оба они выдвинуты из бесконечности, обоим не хватает ровно столько до бесконечности, насколько они сдвинулись при приближении к середине. Следовательно, оба они ограничены как со стороны бесконечности, так и со стороны середины. Конечно, линия может быть ограниченной с одной стороны и в то же время быть бесконечной с другой. Но если она ограничена с обеих сторон, то она, несомненно, конечна. Но если оба эти куска конечны, то конечна и вся составленная из них линия; и если теперь, когда из нее вырезан конечный отрезок, она оказывается конечной, то она была конечной и с этим отрезком, ибо два конечного не образуют бесконечного».

В этой аргументации я замечаю ту ошибку, что здесь свойства конечной твердой линии попросту переносятся на бесконечную твердую линию, свойства которой зависят от природы бесконечного.



Если Вы передвигаете конечную прямую AB вдоль ее направления так, что ее начальная точка A перемещается на кусок $AA'=1$ по направлению к A', то это возможно лишь таким образом, что *всякая другая ее точка*, например M, передвигается в M' на равный кусок $MM'=1$, а *в частности, и концевая точка* B будет сдвинута на кусок $BB'=1$ в направлении B'.

Но вообразим себе вместо конечной линии AB в том же направлении и с той же начальной точкой актуально бесконечную линию AO, предельная точка которой O расположена в бесконечности. В этом случае тоже верно, что каждая лежащая на конечном расстоянии точка M передвигается в M' на отрезок $MM'=1$, если A переходит в A'. *Но кто сказал Вам, что то же самое верно для бесконечно удаленной предельной точки* O?

Наоборот, как Вы сами показали, последнее допущение приводит к противоречию. Но это противоречие не дает права, как Вы допускаете, отрицать возможность существования актуально бесконечной прямой AO. Оно приводит лишь к некоторому, не содержащему в себе ничего противоречивого, свойству актуально бесконечной прямой AO, а именно что в то время, как *все прочие* точки M, A, B прямой AO перемещаются влево на равный отрезок $MM'=AA'=BB'=1$, *одна лишь бесконечно далекая точка O остается неизменно на своем месте*, т. е. не может таким путем быть приведенной с бесконечного расстояния на конечное, *даже* если бы Вы обратились к гипотезе бесконечной силы.

Так как рассматриваемая актуально бесконечная прямая AO соответствует по своей величине *наименьшему* трансфинитному порядковому числу, обозначаемому мною через ω, то сказанное выше можно найти в известном, не содержащем в себе никакого противоречия равенстве $1+\omega=\omega$, где слева $1=A'A$ имеет смысл *первого члена* суммы, а $\omega=AO$ — смысл *второго слагаемого* суммы. Наоборот, $\omega+1$, где ω фигурирует в качестве *первого*, а 1 в качестве *второго члена* суммы, представляет собой, как вытекает из принципов моих «Основ», *отличное* от ω трансфинитное число, а именно *первое следующее* за наименьшим ω *целое трансфинитное порядковое число*. Но это не имеет никакого отношения к Вашему примеру, ибо у Вас первым членом суммы является конечная и лежащая на конечном расстоянии величина $AA'=1$, а вторым членом $AO=\omega$ — актуально бесконечная величина.

Так как в одном написанном мною на днях письме я рассмотрел тот же самый вопрос с других точек зрения, то позволю себе послать Вам прилагаемую ниже копию выдержки из него [13], с пожеланием, чтобы Вы соблаговолили написать мне как по поводу вышесказанного, так и о только что упомянутом письме [14].

Я намеревался присоединить к сегодняшнему письму еще некоторые соображения как относительно содержащихся в Вашей статье выводов,

---

[13] См. далее III.

[14] По поводу предыдущих разъяснений можно, как мне кажется, заметить следующее. Поскольку подлежащая передвижению линия предполагается *твердой*, то при сдвиге из A в A' *каждая* точка линии, а значит и бесконечно удаленная точка O, должна сдвинуться на одинаковое расстояние. Бесконечность могла бы обусловить невозможность сдвига лишь тогда, когда движущая сила была бы достаточной только для перемещения конечной, но не бесконечной проволоки. Однако для этого мы могли бы предположить бесконечную силу тяги.

Разумеется, на это можно возразить, что вследствие *метафизической* невозможности перенести бесконечную линию на конечное расстояние даже в предположении бесконечно сильного воздействия этот сдвиг нельзя все же осуществить, несмотря на выполнение всех *физических* условий. Мы встречаемся здесь с тем же самым случаем, с каким столкнулся Суарес [56] в предположении вечности (неизменности) мира. Он полагает, что в вечности огонь, поднесенный к пакле, не смог бы зажечь ее, несмотря на большую воспламенимость последней, ибо процесс горения за несколько минут должен был бы лишить вечность некоторой ее части, а тем самым сделать ей конечной.

Но я считаю, что вряд ли кто понимает под этим то, что огонь может вечно оставлять паклю невредимой. Ввиду этого должно считаться недопустимым именно предположение о некоем вечном мире, связанном с изменениями. Как мне кажется, аналогичное верно и для бесконечной проволоки.— *Примеч. г-на проф. Гутберлета* [57].

так и относительно разных вопросов, затрагиваемых в Вашей книге «Das Unendliche metaphysisch und matematisch betrachtet» [58], но от этого меня удерживают другие обязанности, так что эту задачу я откладываю до следующего раза...

III[15]

Строки, которые Ваш ... соблаговолили послать мне 25 декабря 1885 г., содержат некоторые сомнения по поводу философской основы моих работ, пересланных Вам для просмотра. Возможно, что некоторые употребленные мною слова, смысл которых я не объяснил более точно, затемнили мое подлинное мнение; поэтому я позволю себе вкратце высказаться поточнее.

Встречающиеся в моей небольшой статье «О различных взглядах на актуально бесконечное» выражения «Natura naturans» и «Natura naturata» [60] я употребляю в том же самом значении, что и томисты, так что первое из них означает бога как творца созданных им из ничего субстанций, стоящего вне них и сохраняющего их, второе же — сотворенный им мир. В соответствии с этим я различаю «Infinitum aeternum in creatum sive Absolutum», относящееся к богу и его атрибутам, и «Infinitum creatum sive Transfinitum» [61], о котором можно говорить там, где в Natura creata приходится констатировать актуально бесконечное; последнее, например, по моему твердому убеждению, относится к актуально бесконечному числу созданных отдельных существ как во всей Вселенной, так и на нашей Земле и, по всей вероятности, в любой произвольно малой протяженной части пространства, в чем я совершенно согласен с Лейбницем (Epistola ad Foucher, vol. 2, operum ed. Dutens, pt. I, p. 243) [62].

Хотя я знаю, что если не все, то большинство учителей церкви оспаривают учение об «Infinitum creatum» и что, в частности, в «Summa theol.» (p. I, q. 7, a. 4) великого св. Фомы Аквинского приведены против него некоторые мнения, однако доводы, которые в результате двадцатилетней работы над этим вопросом предстали передо мной с властной силой — я могу сказать против воли, ибо они противоречили глубоко почитавшейся мною традиции,— которые в известном смысле завладели мной, оказались сильнее, чем все то, что до сих пор высказывалось против этого учения, хотя я подверг это внимательному испытанию. Я думаю также, что слова священного писания, как, например, «Omnia in pondere, numero et mensura disposuisti» [63], в которых видят противоречие с актуально бесконечными числами, не имеют этого смысла. Ведь если предположить, что существуют — как, по моему мнению, я это доказал — актуально бесконечные «мощности», т. е. кардинальные числа, и актуально бесконечные «количества вполне упорядоченных множеств», т. е. порядковые числа (причем оба эти понятия,

[15] Два следующих письма (III и IV) были посланы 22 и 29 января 1886 г. одному великому теологу [кардиналу Францелину]; он, как я упоминаю со скорбью, отозван в вечность 11 декабря 1886 г. [59].

как я обнаружил, глубоко различны в случае актуально бесконечных множеств, тогда как в случае конечных множеств это различие едва заметно), то надо думать, что и эти трансфинитные числа совершенно определенно подразумеваются в процитированном священном тексте. Поэтому, если желают избегнуть порочного круга, не следует, по-моему, пользоваться этим текстом в качестве аргумента против актуально бесконечных чисел.

Что «Infinitum creatum» все же нужно принимать за существующее, это можно доказать разными способами. Чтобы надолго не задерживать Ваш... на этом вопросе, ограничусь лишь двумя намеками.

В одном доказательстве исходят из понятия бога и умозаключают прежде всего от высшего совершенства божественного существа к возможности сотворения Transfinitum ordinatum, а затем от его всеблагости и величия к необходимости фактически последовавшего сотворения Transfinitum. Во втором доказательстве a posteriori показывается, что допущение Transfinitum in natura naturata дает лучшее, т. е. более совершенное объяснение явлений, в особенности организмов и психических явлений, чем противоположное допущение...

IV

Сердечно благодарю Ваш... за высказанные в любезном письме от 26 января 1886 г. соображения, к которым я всецело присоединяюсь. В кратком указании в моем письме от 22 января я вовсе не имел в виду говорить об объективной, метафизической необходимости акта творения, которой был бы подчинен бог, являющийся *абсолютно свободным*. Я хотел лишь указать на некоторую субъективную необходимость *для нас* умозаключать от всеблагости и величия бога к фактически *последовавшему* (а *не долженствовавшему последовать* a parte Dei) [64] сотворению *не только Finitum ordinatum, но и Transfinitum ordinatum...* [65].

V[16]

С удовольствием узнаю из Вашего письма от 23 января, что Вы интересуетесь предметом моих исследований, за что я тем более благодарен Вам, чем реже наблюдаю это у выдающихся естествоиспытателей и врачей. Ведь в этих кругах то, что я называю «horror infiniti», представляет собой глубоко укоренившееся по разным направлениям и в силу самых различных причин зло.

Если внимательнее приглядеться к определениям потенциальной и актуальной бесконечности, то трудности, о которых Вы пишите мне, легко устраняются.

I. П. б.[17] имеют в виду преимущественно тогда, когда речь идет о неопределенной *переменной конечной* величине, которая или растет

[16] Это письмо, датированное 28 февраля 1886 г., послано проф. д-ру медиц. А. Эйленбургу в Берлине [66].

[17] Т. е. потенциально бесконечное (ἄπειρον).

сверх всяких конечных границ (в таком виде мы можем представить себе, например, так называемое время, отсчитываемое с некоторого начального момента) или убывает ниже всякой конечной границы малости (что, например, является законным представлением так называемого дифференциала). Более общим образом я говорю о п. б. всюду там, где рассматривается *неопределенная* величина, которая может принимать бесконечно много значений.

II. Под а. б.[18] следует, наоборот, понимать такое количество, которое, с одной стороны, *не изменчиво*, а, скорее, фиксированно и определенно во всех своих частях, является подлинной *константой*, а с другой — в то же время превосходит по величине *всякую конечную величину* того же рода. В качестве примера приведу комплекс, совокупность *всех* конечных целых положительных чисел. Это множество есть *некоторая вещь для себя* и оно образует, если полностью отвлечься от естественного следования принадлежащих ему чисел,— некоторое неизменное во всех частях и определенное количество, некоторое ’αφωρισμένον, которое, очевидно, приходится назвать бо́льшим, чем всякое конечное количество[19]. Другой пример — это совокупность *всех* точек, расположен-

[18] Т. е. актуально бесконечное (ἀφωρισμένον).

[19] Ср. совпадающее с этим понимание всего числового ряда как актуально бесконечного количества у св. Августина (De civitate Dei. Lib. XII, cap. 19): Contra eos, qui discunt ea, quae infinita sunt, nec Dei posse scientia comprehendi. Ввиду большого значения этого места для моей точки зрения, я воспроизведу его дословно и оставлю за собой право высказаться об этом подробнее в другой раз. Оно таково:

«Illud autem aliud quod dicunt, nec Dei scientia quae infinita sunt posse comprehendi: restat eis, ut dicere audeant atque huic se voragini profundae impietatis inmergant, quod non omnes numeros Deus noverit. Eos qiuppe infinitos esse, certissimum est; quoniam in quocumque numero finem faciendum putaveris, idem ipse, non dico uno additio augeri, sed quamlibet sit magnus et quamlibet ingentem multitudinem continens, in ipsa ratione atque scientia numerorum non solum duplicari, verum etiam multiplicari potest. *Ita vero suis quisque numerus proprietatibus terminatur, ut nullus eorum par esse cuicumque alteri possit. Ergo et dispares inter se atque diversi sunt, et singuli quique finiti sunt, et omnes infiniti sunt.*

Itane numeros propter infinitatem nescit omnes Deus, et usque ad quandam summam numerorum scientia Dei pervenit, ceteros ignorat? *Quis hoc etiam dementissimus dixerit*? Nec audebunt isti contemnere numeros et eos dicere ad Dei scientiam non pertinere, apud quos Plato Deum magna auctoritate commendat numeris mundum fabricantem. Et apud nos Deo dictum legitur: *Omnia in mensura et numero et pondere disposuisti* (Sap. 11, 21); de quo et propheta dicit: *Qui profert numerose saeculum* (Esai. 40,26) et Salvator in evangelio: Capilli, inquit, *vestri omnes numerati sunt* (Mt. 10.30). Absit itaque ut dubitemus, quod ei notus sit omnis numerus, *cujus intelligentiae* (absolutae), sicut in psalmo canitur, *non est numerus* (Ps. 147,5). Infinitas itaque numeri, quamvis infinitorum numerorum nullus sit numerus [finitus], non est tamen inconprehensibilis ei, cujus intelligentiae [absolutae] non est numerus. Quapropter si, quidquid scientia comprehenditur, scientis conprehensione finitur: profecto et *omnis infinitas* quodam ineffabili modo Deo [de] finita [ἀφωρισμένον] est, quia scientiae ipsius inconprehensibilis non est. Quare si infinitas numerorum scientiae Dei, qua conprehenditur, esse non potest in [de] finita: qui tandem nos sumus homunculi, qui ejus scientia limites figere praesumamus, dicentes quod, nisi eisdem circuitibus temporum eadem temporalia repetantur, non potest Deus cuncta quae facit vel praescire ut faciat, vel scire cum fecerit? cujus sapientia *simpleciter multiplex et uniformiter multiformis* tam inconprehensibili conprehensione omnia inconprehensibilia conprehendit, ut *quaecumque nova et dissimilia consequentia praecedentibus si semper*

ных на заданной окружности (или какой-нибудь иной определенной кривой). Третий пример — это совокупность всех представляемых строго точечными монад, являющихся конститутивными составными частями заданного физического тела.

---

facere vellet, inordinata et inprovisa habere non posset, nec ea provideret ex proximo tempore, sed aeterna praescientia contineret» [67].

В отдельных местах я позволил себе сделать добавления (заключенные в скобки), позволяющие более отчетливо выделить тот смысл, который, по моему мнению, имеют соответствующие слова в этих местах. Нельзя более энергично требовать, более совершенно обосновывать и защищать *трансфинитное*, чем это сделано св. Августином. А что в случае бесконечного множества (ν) всех конечных целых чисел ν речь идет не об абсолютно бесконечном (IIb) [68], то в этом вряд ли кто сомневался.

Тем же, что св. Августин утверждает общее, интуитивное восприятие множества (ν) «quodam ineffabili modo», a parte Dei [69], он одновременно признает это множество *более формальным*, чем некое актуально бесконечное целое, как некое *трансфинитное*, и мы вынуждены следовать в этом за ним. Однако в этом месте можно выдвинуть то возражение, что если мы даже и вынуждены рассматривать множество (ν) как категорематическое бесконечное, то, с другой стороны, этому множеству нельзя сопоставлять соответствующее ему порядковое число ω или отвечающее ему кардинальное число $\overline{\omega}$, и это не позволено нам по той причине, что вследствие ограниченности нашего существования мы не в состоянии мыслить все бесконечно многие числовые индивиды ν, принадлежащие множеству (ν) в виде чего-то интуитивно актуального. Хотел бы я, однако, видеть того, кто мог бы точно представить в виде интуитивно различимых все единицы, входящие, например, в *конечное* число «тысяча миллионов» или даже в значительно меньшие числа. Такового определенно нет сегодня между нами. И тем не менее, мы вправе рассматривать конечные числа, даже если они сколь угодно велики, как объекты *дискуссивного человеческого* познания, а в научном отношении их следует различать по их свойствам. *Такое же право у нас и в отношении трансфинитных чисел.* Следовательно, на это возражение есть лишь один ответ: условие, которое Вы сами не соблюдаете и которому не в состоянии удовлетворить даже по отношению к *малым конечным числам*, Вы осмеливаетесь требовать от нас для бесконечных чисел! Да ставилось ли когда-нибудь столь несправедливое требование человека к человеку? Вследствие самой нашей организации мы лишь изредка располагаем понятием, о котором мы могли бы сказать, что оно является «conceptus rei proprius ex propriis», благодаря которому мы восприняли бы и познали некоторую вещь адекватно, не прибегая к отрицанию, символу или примеру, в том виде, в каком она есть сама по себе. При познании мы, скорее, обучаемся главным образом «conceptus proprius ex communibus» [70], позволяющему нам, исходя из общих предикатов и при помощи сравнений, исключений, символов или примеров, так определить вещь, что она становится совершенно отличной от всякой другой вещи. Ср., например, метод, при помощи которого я в «Основах» (1883), а еще раньше в «Math. Ann.», т. 5 (1871) [71] определил иррациональные числа. Теперь же я иду *столь далеко, что безусловно утверждаю*: этот *второй* способ определения и выделения вещей для малых трансфинитных чисел (например, для ω, $\omega+1$ и ω^{ν} при малых конечных целых ν) *несравненно проще, удобнее* и *легче*, чем для очень больших *конечных* чисел, к которым мы тоже обращаемся лишь как к вспомогательному средству, отвечающему нашей несовершенной натуре.

В отличие от Августина у Оригена имеется решительное высказывание *против* актуальной бесконечности, и в этом он идет так далеко, что кажется почти возможным, будто он сам не знает, как утверждать бесконечность бога. Действительно, он говорит, что при помощи ложного эвфемизма (εὐφημίας χάριν) нельзя отрицать границу (circumscriptio = περιγραφή) божественной силы. Напомню, что по-гречески πέρας одновременно означает цель, предел и завершенность; поэтому вместе с ἄπειρον связывается, собственно говоря, понятие неопределенного, незавершенного. Да и на латинском языке infinitum выступает в смысле «неопределенное» у Цицерона и Квинтилиана (например, infinitior distributio partium — логическая ошибка в речи; infinitas quastiones — неточно поставленные вопросы и т. д.). И finis тоже, как и πέρας, означает за-

Из определения I следует, что Вы вполне правы, когда спрашиваете: «Не лучше ли было совершенно отбросить выражение «бесконечный» для п. б.?»

Конечно, п. б. не есть собственно бесконечное, поэтому в своих «Основах» я и назвал его несобственно бесконечным. Но трудно отказаться от установившегося обычая, и тем более трудно, что п. б. представляет со-

вершение; так в известном заголовке цицероновского труда — de finibus bonorum., у Тацита — finis aequi juris и т. д.

В оригеновских «De principiis» (περί ἀρχῶν), ed. Redepenning (в сохранившихся греческих фрагментах, с. 10, в переводе Руфинуса, с. 214) читаем дословно: «intueamur creaturae initium, quodcunque illud initium creantis Dei mens potuerit intueri. In illio ergo initio putandum est tantum numerum rationabilium creaturarum, vel intellectualium, vel quoquomodo appellandae sunt, quas mentes superius diximus, fecisse Deum quantum sufficire posse prospexit. Certum est quippe quod praefinito aliquo apud se numero eas fecit: *non enim, ut quidam volunt, finem putandum est non habere creaturas; quia ubi finis non est, nec conprehensio ulla nec circumscriptio esse potest.* (В высшей степени вероятно, что приведенное выше утверждение Августина вполне осознанно направлено против этого места у Оригена). *Quod si fuerit, utique nec contineri vel dispensari a Deo, quae facta sunt, poterunt.* Naturaliter nempe quidquid infinitum (Ориген всегда имеет в виду лишь ἄπειρον и говорит, что если бы божественная мощь была ἄπειρον, то бог не мог бы познать самого себя) fuerit, et incomprehensibile erit. Porro autem, sicut scriptura dicit: «In numero et mensura universa» (Sap. 11, 12) condidit Deus, et idcirco numerus quidem recte adaptabitur rationabilibus creaturis, vel mentibus, ut tantae sint, quantae a providentia Dei dispensari, regi et contineri possint. Mensura vero materiae corporali consequenter aptabitur: quam utique tantam a Deo esse creatam credendum est, quantum sibi sciret ad ornatum mundi posset sufficere (греч. τοσαύτην ὕλην ὅσην ἠδύνατο κατακοσμῆσαι)». Я полностью воспроизвел это *глубокомысленное* соображение *Оригена*, ибо я вижу в нем, как должен признать, *источник тех наиболее весомых* и *содержательных* доводов, которые выставлялись против трансфинитного. Оно часто повторялось, и я хочу привести его в той совершенной форме, которая когда-либо была придана ему. В «Summa theologiae» св. Фомы, I, q. 7, a. 4, оно таково: «1) Multitudinem actu infinitam dari, impossibile est, quia omnem multitudinem oportet esse *in aliqua specie* multitudinis. *Species autem multitudinis sunt secundum species numerorum. Nulla autem speies numeri est infinita,* quia quilibet numerus est multitudo mensurata per unum. Unde impossibile estesse multitudinem infinitam actu; sive per se, sive per accidens. 2) Item omnis multitudo in rerum natura existens est creata; et omne creatum *sub aliqua certa intentione* creantis comprehenditur, *non enim in vanum agens aliquod operatur.* Unde necesse est quod sub certo numero omnia creata comprehendatur. Impossibile est ergo esse multitudinem infinitam in actu, etiam per accidens» [72].

Таковы два важнейших аргумента, выдвигавшиеся в течение веков против трансфинитного. Все другие высказывавшиеся доводы легко отвергнуть, заметив, что они основываются на ошибках в умозаключениях. Напротив, *оба эти аргумента* вполне обоснованы и их можно опровергнуть *только положительным образом*: показать и доказать, *что трансфинитные числа и порядковые типы существуют в области возможного на том же основании, как и конечные числа, и что в трансфинитном имеется, в него в некотором роде укладывается даже значительно большее богатство форм* и «species numerorum» ([73]), *чем в относительно малую область ограниченного конечного. Поэтому трансфиниты отвечают намерениям творца и его абсолютно неизмеримой силе воли в такой же мере, как и конечные числа.* Можно было бы полагать, что св. Фома предчувствовал или даже знал, угадал эту связь и стремился лишь к тому, чтобы не воспроизводить другие, *более легковесные* доводы против бесконечных чисел и величин, имевшиеся, между прочим, и в трудах его учителя *Альберта Великого* [74]. Он *с полным правом* настаивал на тех *двух содержательных и весомых аргументах*, которые можно опровергнуть *лишь положительным образом*, однако полностью отказался от других аргументов в знаменитом высказывании против мюрмюрантов: «Praeterea adhuc non est demonstratum, quod Deus non possit facere ut sint infinita actu» (Opusc. de aeternitate mundi) [75].

бой более легкое, более поверхностное, более приятное и несамостоятельное понятие и с ним чаще всего связана обманчивая иллюзия, будто здесь мы имеем нечто поистине бесконечное. В действительности же п. б. имеет лишь отраженную реальность, всегда указывая на а. б., благодаря которому оно лишь и возможно. Поэтому схоласты удачно характеризовали п. б. эпитетом συνκατηγορηματικως [76].

Если, далее, мы присмотримся к определению II, то прежде всего замечаем, что из него *нисколько* не следует, будто а. б. *должно быть неувеличиваемым* по своей величине. Убеждение в этом представляет собой ошибочное допущение, можно сказать, общераспространенное не только в *древней* и в примыкающей к ней *схоластической*, но и в *новой* и *новейшей* философии [20]. Здесь же мы вынуждены, скорее, провести *фундаментальное различие*, выделяя:

II^a. Доступное увеличение а. б., или Transfinitum.

II^b. Недоступное увеличение а. б., или Absolutum.

Все приведенные выше три примера а. б. относятся к классу II^a трансфинитного. Ему же принадлежит *наименьшее сверхконечное порядковое число*, которое я обозначаю через ω, ибо его можно увеличить до непосредственно большего порядкового числа $\omega+1$, последнее — до $\omega+2$ и т. д. Но и наименьшая актуально бесконечная мощность, или *кардинальное число*, есть Transfinitum; то же самое справедливо для непосредственно большего кардинального числа и т. д.

Трансфинитное со всем изобилием его форм и образов необходимо указывает на *абсолютное*, на «истинное бесконечное», величина которого недоступна ни увеличению, ни уменьшению и которое в количественном

---

[20] [77] Так как в течение четырех лет после опубликования «Основ» у меня оказалась возможность более детально ознакомиться с литературой по древней и схоластической философии, то теперь я знаю также, что а.б. in natura creata во все времена имело защитников в христианских размышлениях. Приблизительно три года тому назад благодаря «Dictionaire» Бейля [78] я обнаружил, среди других, знаменитого францисканского монаха преподобного Эмануэля Великого из Тулузы (Cursus philosophicus. Lugduni, 1673), представившего категорематически бесконечному очень широкую сферу. В этом к нему примкнул его ученик, францисканец преподобный Дж. Сагенс (см. его труд: De perfectionibus divinis. Coloniae, 1718) [79].

Назвать Эмануэля Великого (он жил в 1601—1676 гг.) францисканским монахом не совсем подходяще, так как под этим имеют в виду обычно миноритов или серафимовых братьев, принадлежащих ордену св. Франциска Ассизского. А Эмануэль Великий был (как и друг Картезия, известный патер Мерсенн) «Minime» [80], т. е. принадлежал к суровому францисканскому ордену, учрежденному в 1435 г. неким Франциском из Паулы (ум. в 1507 г.), к которому он примкнул к тому же, предпочтя все предлагавшиеся ему францисканские ордена.

Этим исправлением я обязан доброте преподобного Игнатиуса Иейлера, префекта ордена св. Франциска колл. св. Бонавентуры в Броцци пер Кварекки вблизи Флоренции.

«Бесконечное число» признавало большинство номиналистов (вслед за Авиценной). То же самое можно повторить о шотландцах. Преподобный Т. Пеш в своих «Inst. phil. nat.», § 409, среди защитников возможности бесконечных чисел приводит и следующих авторов: Габриель Васкец (Comm. in Summ. p. 1, d. 26, c. 1), Гуртадо (Phys. d. 13, § 16), Аррьяга (Phys. d. 13, n. 32) и Овьедо (Phys. controv. 14, punct. 4, n. 6; punct. 5). Промежуточной точки зрения придерживались коимбрцы (Phys. 1.3, c. 2, q. 2) и Амикус (Phys. tr. 18, q. 6, dub. 2) [81].

отношении нужно рассматривать как *абсолютный* максимум. Последнее в известной степени превосходит человеческое разумение и недоступно, в частности, математическому определению. Наоборот, *трансфинитное* не только заполняет обширную область возможного в познании бога, но и предоставляет богатое непрерывно растущее поприще для идеального исследования и, по моему мнению, оно до некоторой степени и в различных отношениях к действительности и существованию реализуется также и в сотворенном мире, чтобы выразить величие творца по его свободному волеизъявлению ярче, чем это могло бы произойти в просто «конечном мире». Но этому убеждению еще придется долго ждать до всеобщего признания, в особенности со стороны *теологов*, сколь ни полезным оно могло бы оказаться для успехов защищаемого ими дела (религии).

Наконец, я хочу объяснить Вам еще, в каком смысле я понимаю *минимум* трансфинитного как *предел растущего конечного.* Для этого следует заметить, что понятие «предела» в области *конечных* чисел обладает *двумя* существенными признаками, которые здесь взаимно вытекают друг из друга. Например, число 1 есть предел чисел $z_\nu = 1 - 1/\nu$ (где ν — переменное конечное целое число, растущее сверх всяких конечных границ), и в *качестве предела* позволяет выявить два следующих признака, выводимых друг из друга.

Во-первых, разность $1 - z_\nu = 1/\nu$ есть величина, становящаяся бесконечно малой, т. е. числа z_ν приближаются произвольно близко к пределу 1.

Во-вторых, 1 *является наименьшей из всех тех величин, которые больше всех величин* z_ν, ибо если взять какую-нибудь величину $1 - \varepsilon$, которая меньше, чем 1, то $1 - \varepsilon$ будет больше, чем некоторые из z_ν, но начиная с известного ν, а именно для $\nu > 1/\varepsilon$, всегда будем иметь $z_\nu > 1 - \varepsilon$. Значит, 1 есть *минимум* всех числовых величин, которые больше, чем все z_ν.

Как сказано, каждый из этих двух признаков в отдельности полностью характеризует *конечное* число 1 как *предел* переменной величины $z_\nu = 1 - 1/\nu$.

Теперь если мы желаем распространить понятие предела и на трансфинитные пределы, то для этого можно воспользоваться лишь *вторым* из только что приведенных признаков. Первый следует здесь отбросить, так как он имеет значение лишь для конечных пределов, а для трансфинитных пределов он не имеет никакого смысла.

В соответствии с этим я называю, например, ω «пределом» возрастающих конечных целых чисел, потому что ω является *наименьшим* из всех тех чисел, которые больше, чем все конечные числа ν,— в точности так же, как 1 оказывается наименьшим из всех тех чисел, которые больше, чем все величины $z_\nu = 1 - 1/\nu$. Всякое число, меньшее чем ω, есть конечное число, для которого найдутся другие конечные числа ν, бóльшие, чем оно Но зато здесь $\omega - \nu$ постоянно равно ω и, следовательно, нельзя сказать что растущие конечные числа приближаются сколь угодно близко к сво-

ей цели ω; скорее всякое сколь угодно большое число ν остается столь же далеким от ω, как и наименьшее конечное число.

Здесь особенно отчетливо выступает то чрезвычайно важное и решающее обстоятельство, что мое наименьшее трансфинитное число ω, и следовательно, все бóльшие порядковые числа *всецело* расположены *вне бесконечного числового ряда* 1, 2, 3, ... Это ω *не есть максимум* конечных чисел (таковой вовсе не существует), оно является *минимумом всех бесконечных* порядковых чисел. Несчастной ошибкой Фонтенеля[21] было то, что он искал трансфинитное *внутри* числового ряда 1, 2, 3, ..., ν, ..., хотя некоторым образом в конце его (между тем как такового не существует). После того как он ввел таким образом наперед неразрешимое противоречие в свои бесконечные числа, судьба его бесплодной теории была решена. Она должна была пасть под ударами вполне справедливой критики[22]. Но если критики, соблазненные крушением фонтенелевских бесконечных чисел, думали вынести приговор актуально бесконечным числам вообще, то в этом они *опровергнуты*, как я знаю, фактом моей, радикально отличной от фонтенелевской и вполне непротиворечивой теории.

VI[23]

В своем письме Вы поднимаете вопрос об актуально *бесконечно малых* величинах. Во многих местах моих работ Вы обнаружите выраженным мнение, что такие величины представляют собой *невозможные*, т. е. *внутренне противоречивые* мысленные вещи. Уже в своем сочинении «Основы общего учения о многообразиях» (§ 4, с. 8) я указал, хотя еще с некоторой осторожностью, что строгое обоснование этой позиции можно получить из теории трансфинитных чисел. Лишь этой зимой у меня нашлось время придать моим идеям, относящимся к этому вопросу, вид формального доказательства. Речь идет о теореме:

«*Не существует отличных от нуля линейных числовых величин* (*т. е., короче говоря, таких числовых величин, которые можно представить в образе ограниченных непрерывных прямолинейных отрезков*), *которые были бы меньше сколь угодно малой конечной числовой величины, т. е. такие величины противоречат понятию линейной числовой величины*».

Ход моего доказательства попросту таков. Я исхожу из *предположения* [существования] линейной величины ζ, которая так мала, что *n*-кратное

$$\zeta \cdot n$$

меньше единицы для *любого сколь угодно большого конечного целого числа n*, а затем из понятия линейной величины и с помощью некоторых

[21] Ср.: *Fontenelle.* Éléments de la Géométrie de l'infini. Paris, 1727 [[82]].

[22] Ср.: *Maclaurin.* Traité des Fluxions/Trad. de R. P. Pezenas. Paris, 1749, vol. 1, introd., p. XLI; далее: *Gerdil.* Opere edite et ined., Rome, 1806, vol. 4, p. 261; vol. 5, p. 1 [[83]].

[23] Нижеследующее почти одинаковым образом изложено в двух письмах: одно от 13 мая 1887 г. было написано учителю гимназии Ф. Гольдшайдеру в Берлине, другое от 16 мая 1887 г.— проф. К. Вейерштрассу.

теорем теории трансфинитных чисел доказываю, что тогда и

$$\zeta \cdot \nu$$

меньше, чем *любая сколь угодно малая конечная величина*, хотя бы ν означало сколь угодно большое *трансфинитное* порядковое число (т. е. количество или тип вполне упорядоченного множества) из произвольно высокого числового класса. Но это значит, что *никаким сколь угодно мощным актуально бесконечным умножением* ζ не может быть сделана *конечной*, а значит, определенно не может быть *элементом* конечных величин. Следовательно, сделанное предположение противоречит понятию линейных величин, поскольку в соответствии с этим понятием линейная величина должна мыслиться как составная часть других, в частности конечных, линейных величин. Поэтому не остается ничего другого, как отбросить предположение о существовании величины ζ, которая была бы меньше $1/n$ для всякого целого числа n, а тем самым наша теорема доказана [1].

В этом я вижу важное применение теории трансфинитных чисел — результат, пригодный для преодоления старых, широко распространенных и глубоко укоренившихся предрассудков.

Факт существования актуально бесконечных чисел не только не является основанием для существования актуально бесконечно малых величин, но, скорее, как раз с помощью первых доказывается невозможность последних.

Я думаю также, что этот результат нельзя *вполне строго* получить иным путем.

Потребность в нашей теореме особенно очевидна на фоне новейших попыток О. Штольца и П. Дюбуа-Реймона обосновать актуально бесконечно малые величины с помощью так называемой аксиомы Архимеда (ср.: *Stolz O.* — Math. Ann., Bd. 18, S. 269; далее его статьи в докладах естеств.-медиц. общества в Инсбруке за 1881—1882 и 1884 гг. Они озаглавлены: «Zur Geometrie der Alten, insbesondere über ein Axiom des Archimedes» и «Die unendliche kleine Grössen»; наконец, ср.: Vorlesungen über allgemeine Arithmetik. Leipzig, 1885, T. 1, S. 205 того же автора) [84].

Архимед, по-видимому, впервые обратил внимание на то, что применяемая в евклидовых «Началах» теорема, согласно которой из любого сколь угодно малого ограниченного прямолинейного отрезка можно получить *произвольно большие конечные* отрезки путем умножения на *конечные достаточно большие* числа, нуждается в доказательстве, и он считал себя поэтому вправе назвать эту теорему «допущением» (ср. Eukl. Elem. lib. V, def. 4: λόγον ἔχειν πρός ἄλληλα μεγέδη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν; далее в особенности: Elem., lib. X, pr. 1; Archimedes: de sphaera et cylindro I, postul. 5 и предисловие к его сочинению: de quadratura parabolae) [85].

Ход мыслей цитированных выше авторов (О. Штольц, указ. работы) заключается в том, что если отбросить эту мнимую «аксиому», то мы будем вправе создавать актуально бесконечно малые величины, назван-

ные там «моментами». Но из доказанной мною выше теоремы, если применить ее к прямолинейным непрерывным отрезкам, непосредственно следует *необходимость евклидова постулата*. Следовательно, так называемая аксиома Архимеда *вовсе не является аксиомой, а есть теорема, вытекающая с логической необходимостью из понятия линейной величины.*

VII[24]

Если мы желаем дать себе отчет в источнике широко распространенного предубеждения против актуальной бесконечности и horror infiniti [[86]] в математике, то следует прежде всего обратить внимание на противоположность между актуально и потенциально бесконечным. В то время как потенциально бесконечное означает не что иное, как неопределенную и остающуюся всегда конечной переменную величину, способную принимать значения, которые или становятся меньше, чем любая сколь угодно малая, или больше, чем любая сколь угодно большая конечная величина, актуально бесконечное относится к неизменному в себе постоянному количеству, которое больше, чем любая конечная величина того же рода. Так, например, переменная величина x, которая может принимать одно за другим конечные целые числовые значения 1, 2, 3, ..., представляет собой потенциально бесконечное; напротив, понятийно вполне определенное при помощи некоторого закона множества (ν) всех конечных чисел ν дает простейший пример актуально бесконечного количества.

Это существенное различие между понятиями потенциальной и актуальной бесконечности удивительным образом не помешало тому, что в развитии новейшей математики неоднократно совершалось смешение обеих идей таким образом, что в случаях, где мы имеем перед собой лишь потенциально бесконечное, ошибочно принималось актуально бесконечное или же, наоборот, понятие, имеющее смысл только с точки зрения актуально бесконечного, относилось к потенциально бесконечному.

Оба вида смешения надо рассматривать как ошибки.

Первый из них встречается, кстати, там, где, как это сделал Пуассон (Traité de mécanique. 2-e éd, vol. 1, p. 14) [[88]], рассматривают так называемые дифференциалы как актуально бесконечно малые величины, хотя они имеют лишь смысл переменных, могущих стать произвольно малыми вспомогательных величин, как это уже было определенно высказано обоими создателями исчисления бесконечно малых Ньютоном и Лейбницем. Эту ошибку можно считать теперь вполне устраненной благодаря разработке так называемого метода пределов, в которой столь славное участие приняли французские математики во главе с великим Коши.

Но зато в настоящее время грозит, по моему мнению, бо́льшая опасность другой ошибки, заключающейся в том, что не хотят ничего знать

[24] Это письмо было послано в мае 1886 г. г-ну Джулио Виванти в Мантуе. Его содержание было включено в последний отдел статьи: Über die verschiedene Ansichten inbezug auf die aktual unendlichen Zahlen.— Bih. Kgl. sven. vetenscapakad. handl., bd. 11, N 19 [[87]].

об актуальной бесконечности и отрицают ее даже там, где без правильного ее употребления нельзя дойти до сути вещей.

Здесь в первую очередь следует указать на теорию иррациональных числовых величин, обоснование которой невозможно, если не привлечь в какой-нибудь форме а. б. Что это привлечение может совершаться по-разному, я вкратце указал в § 9 «Основ общего учения о многообразиях». Для этого я еще ранее (Math. Ann., Bd. 5, S. 123) [I.1] воспользовался особыми актуально бесконечными множествами рациональных чисел, которые я называю фундаментальными последовательностями. Г-н Э. Гейне последовал в этом за мной (Crelles J., Bd. 74, S. 172). Его изложение отличается от моего лишь в способе выражения, по существу же оно совпадает с моим [89]. Упомяну здесь своеобразную, на мой взгляд реакционную, попытку г-на Молька (Acta math., vol. 6) полностью изгнать иррациональные числа из области высшей арифметики. Г-н Кронекер идет еще дальше и не желает допускать эти числа даже в теорию функций, из которой он старается удалить их *с помощью весьма искусственных вспомогательных теорий*. Остается ждать, к какому результату и когда приведут эти напрасные хлопоты [90].

Но наличие актуальной бесконечности и ее неизбежность как в анализе, так и в теории чисел и в алгебре можно неопровержимо оправдать и с другой точки зрения. Если не подлежит никакому сомнению то, что мы не можем обойтись без *переменной* величины в смысле потенциальной бесконечности, то из этого можно следующим образом доказать и необходимость актуальной бесконечности. Для того чтобы подобную переменную величину можно было использовать в каком-либо математическом исследовании, «область» ее изменения должна, строго говоря, быть известной наперед благодаря некоторому определению. Но сама эта «область» не может быть опять-таки чем-то переменным, ибо в противном случае наше исследование не имело бы под собой никакой прочной основы. Следовательно, эта «область» представляет собой некоторое определенное актуально бесконечное множество значений.

Таким образом, всякая потенциальная бесконечность, которую желают использовать строго математически, предполагает наличие актуальной бесконечности.

Эти «области изменения» являются непосредственными основами как анализа, так и арифметики, а потому они определенно заслуживают того, чтобы сделать их предметом особых исследований, как это и сделано было мною в «теории множеств» (théorie des ensembles).

Но если, таким образом, актуально бесконечное приобретает в математике права гражданства в форме актуально бесконечных множеств, то становится также неизбежным образование понятия актуально бесконечного *числа* при помощи *надлежащих естественных абстракций*, подобно тому как понятия о конечных числах, составляющих материал традиционной арифметики, были получены путем абстрагирования из конечных множеств. Этот ход мыслей привел меня к *теории трансфинитных чисел*, начатки которой содержатся в «Основах общего учения о многообразиях».

VIII[25]

1. Если в некотором заданном множестве M, которое состоит из определенных, четко отличных друг от друга конкретных вещей или абстрактных понятий, называемых элементами множества, и которое мыслится как некая вещь для себя, мы отвлечемся как от свойств элементов, так и от порядка их задания, то у нас возникает определенное общее понятие (universale, unum versus alia — в смысле: unum aptum inesse multis)[26] [92], которое я называю *мощностью* множества M или соответствующим M *кардинальным числом*. Я условливаюсь обозначать мощность множества M через $\overline{\overline{M}}$. *Две* черточки над M должны означать, что над M совершен *двойной* акт абстракции как в отношении свойств элементов, так и в отношении их взаимного порядка. В п. 9 мы встретим обозначение $\overline{M}$ *только с одной* черточкой для того *universale*, которое возникает из M, если над ним произведен только первый род абстракции. Элементы при этом сохраняют и в понятии тот же взаимный порядок, с каким они мыслятся в M in concreto. Таким путем получается то, что я называю *порядковым типом* множества M. Но прежде всего мы остановимся на *кардинальных числах*.

2. Два определенных множества M и M_1 мы называем *эквивалентными* (символически $M \sim M_1$), если между ними можно установить по некоторому закону взаимно однозначное и полное поэлементное соответствие.

Если $M \sim M_1$ и $M_1 \sim M_2$, то и $M \sim M_2$.

Примеры. a) *Множество цветов радуги* (красный, оранжевый, желтый, зеленый, голубой, синий, фиолетовый) и множество *музыкальных тонов* (C, D, E, F, G, A, H) являются эквивалентными множествами и оба подпадают под общее понятие *семь*.

b) Множество *пальцев* моих *обеих рук* и множество *точек* в так называемом *арифметическом треугольнике* (ср.: *Pascal*. Traité du triangle arithmétique.— Oeuvres complètes. Paris: Hachette, 1877, vol. 3, p. 243) [94] эквивалентны; им соответствует число *десять*.

c) Актуально бесконечное множество (ν) всех положительных конечных целых чисел ν эквивалентно множеству ($\mu+\nu i$) всех комплексных целых чисел вида $\mu+\nu i$, где μ и ν

---

[25] Этот VIII отдел содержит краткий очерк основ *теории порядковых типов*. В главном он был составлен уже года три назад и еще тогда предназначался для другого журнала. После того как уже был набран первый лист, к моему удивлению, вскрылись некоторые обстоятельства, побудившие меня взять статью из редакции. Habent sua fata libelli [91].

[26] Ср.: *Liberatore M*. Inst. philos. 2a ed. novae formae. Paris, 1883, vol. I, Logica, pars II, p. 104. Всем тем, кто хочет составить себе более или менее правильное представление о томистической философии, я могу рекомендовать это недорогое произведение (2 тома — 8 фр. 50 сант.), как наилучшее, на мой взгляд, введение в эту систему. Тому же автору принадлежит и более краткий однотомный справочник «Comp. Logicae et Metaphysicae». 2a ed. Napoli, 1869 (4 Fr. 30 Cent.) и другие остроумные и тщательно обработанные сочинения, среди которых особо выделю еще труд «Della conoszenza intellettuale» (3a ed.) [93].

получают независимо друг от друга все целочисленные положительные значения. Оба эти множества эквивалентны множеству (μ/ν) всех положительных рациональных чисел μ/ν, где μ и ν взаимно просты относительно друг друга. Последнее тем более замечательно, что так называемые рациональные точки прямой, соответствующие рациональным числам, расположены на этой прямой «всюду плотно» (Ср.: Math. Ann., Bd. 15, S. 2) [здесь с. 41], тогда как точки прямой, соответствующие целым числам ν, следуют друг за другом на расстояниях, равных величине положенной в основу единицы длины. Но и совокупность всех так называемых *алгебраических* чисел имеет, как я доказал, *лишь* мощность совокупности (ν), имеющей *наименьшую* мощность из всех вообще встречающихся у актуально бесконечных множеств.

d) Но зато множество *всех действительных* (т. е. рациональных и иррациональных, алгебраических и трансцендентных) числовых величин не эквивалентно множеству (ν), как я это впервые доказал в т. 77 журнала Крелле, с 259 [I.2, § 2], а затем еще раз в т. 15 «Math. Ann.», с. 5 [I.5.1] и в «Acta math.», т. 2, с. 306 и след. Но я доказал также не менее замечательную теорему, а именно что так называемые n-мерные непрерывные образования *эквивалентны* в отношении их точечного состава линейному континууму, а следовательно, обладают *одинаковой* мощностью, отличной от $\overline{\overline{(\nu)}}$ [см. здесь I.3].

3. Из п. 1 и 2 можно заключить, что эквивалентные множества всегда имеют одну и ту же мощность, или кардинальное число, и что, обратно, множества, имеющие одно и то же кардинальное число, являются эквивалентными. Символически эту двойную теорему мы можем сформулировать так: если $M \sim M_1$, то и $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{M_1}}$, и наоборот[27].

Достаточно знать лишь один *закон соответствия* для двух множеств M и M_1, чтобы констатировать их эквивалентность; вообще же существует много, даже бесчисленно много законов соответствия, благодаря которым два эквивалентных множества можно мыслить поставленными во взаимно однозначное и полное соответствие друг с другом.

4. Если каким-либо доказательством установлено, что два данных множества M и N не эквивалентны, то возможен один из двух следующих

---

[27] Согласно п. 1, кардинальное число $\overline{\overline{M}}$ множества M остается неизменным, если вместо элементов m, m', m'', ... будут подставлены другие вещи. Если теперь $M \sim M_1$, то существует закон соответствия, согласно которому элементам m, m', m'', ... множества M сопоставляются элементы m_1, m_1', m_1'', ... множества M_1. Можно представить себе, что вместо элементов m, m', m'', ... в M одновременно подставлены элементы m_1, m_1', m_1'', ... из M_1; тем самым множество M переходит в M_1. А так как при этом переходе кардинальное число не изменяется, то $\overline{\overline{M_1}} = \overline{\overline{M}}$.

Обращение этой теоремы получается из того замечания, что между элементами множества M и единицами его кардинального числа $\overline{\overline{M}}$ имеет место взаимно однозначное и полное соответствие, так что мы можем сказать, что $M \sim \overline{\overline{M}}$. Поэтому если мы имеем два множества M и M_1 *с одинаковым* кардинальным числом, то последнее эквивалентно как множеству M, так и множеству M_1. Следовательно, эквивалентны M и M_1, ибо верна теорема: если два множества эквивалентны третьему, то они эквивалентны между собой [ср. I.10, § 1 и примечание [1] к этой работе].

случаев: *или* из N можно выделить такую составную часть N', что $M\sim N'$, *или же* из M можно выделить такую составную часть M', что $M'\sim N$. В *первом* случае говорят, что $\overline{\overline{M}}$ меньше, чем $\overline{\overline{N}}$, во *втором* — что $\overline{\overline{M}}$ больше, чем $\overline{\overline{N}}$.

Здесь нельзя особо не подчеркнуть, что исключающее поведение двух указанных случаев, которое кладется в основу определения отношений «больше» и «меньше» для *кардинальных чисел*, существенно зависит от сделанного предположения, что M и N *не обладают* равной мощностью. Если же оба множества эквивалентны, то вполне может случиться, что у них существуют составные части M' и N', для которых как $\overline{\overline{M}}=\overline{\overline{N'}}$, так и $\overline{\overline{M'}}=\overline{\overline{N}}$. Имеет место теорема: если M и N — два таких множества, что из них можно выделить составные части M' и N', для которых удается показать, что $\overline{\overline{M}}=\overline{\overline{N'}}$ и $\overline{\overline{M'}}=\overline{\overline{N}}$, то M и N являются эквивалентными множествами.

5. Множество, получаемое объединением двух множеств M и N, обозначается через $M+N$. Впоследствии мы поговорим подробнее о порядке элементов в этом новом множестве; здесь же при рассмотрении кардинальных чисел вопрос о порядке не имеет значения. Если мы имеем два других множества M' и N' таких, что $M\sim M'$ и $N\sim N'$, то легко видеть, что $M+N\sim M'+N'$.

На этом положении основывается определение *суммы* двух, а значит и нескольких, *кардинальных чисел*, или *мощностей*: если $\mathfrak{a}=\overline{\overline{M}}$ и $\mathfrak{b}=\overline{\overline{N}}$, то под $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ понимается то кардинальное число, которое соответствует множеству $M+N$, т. е. имеем по определению

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\overline{\overline{M+N}}.$$

Как легко убедиться, *коммутативный* закон ($\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mathfrak{b}+\mathfrak{a}$) и *ассоциативный* закон ($\mathfrak{a}+(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})=(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})+\mathfrak{c}$) *в случае кардинальных чисел* не нуждается *ни в каких пространных доказательствах*, ибо кардинальное число, благодаря акту абстракции, приводящему к нему, заранее *не зависит* от порядка его элементов.

6. Если M и N — два множества, то под $M\cdot N$ понимается какое-либо третье множество, получаемое из N таким образом, что *вместо каждого* отдельного элемента из N ставится любое множество, эквивалентное множеству M. О порядке элементов этого нового множества будет сказано лишь в п. 11; здесь мы этого не касаемся. Теперь легко доказать, что *все* множества $M\cdot N$, получаемые указанным способом, эквивалентны между собой, и на этом основывается определение произведения двух кардинальных чисел. Если $\mathfrak{a}$ — мощность множества M, $\mathfrak{b}$ — мощность множества N, то по определению имеем

$$\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}=\overline{\overline{M\cdot N}};$$

$\mathfrak{a}$ называется *множимым*, $\mathfrak{b}$ — *множителем* этого произведения.

Здесь тоже легко доказать, что для *мощностей*, или *кардинальных чисел*, общезначимы *коммутативный* закон $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}=\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{a}$ и *ассоциативный* закон $\mathfrak{a}\cdot(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c})=(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})\cdot\mathfrak{c}$. Точно так же справедлив и *дистрибутивный* закон $\mathfrak{a}\cdot(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})=\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{c}$.

7. Все предыдущее относится как к *конечным*, так и к *актуально бесконечным* множествам и кардинальным числам.

Теперь для *конечных* множеств можно *доказать еще*, что если из трех *конечных* кардинальных чисел $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$ последнее равно сумме двух первых, т. е. $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mathfrak{c}$, то c никогда не может быть равным одному из слагаемых $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$[28]. Но если отбросить предположение о *конечности* этих трех

---

[28] Доказательство этой теоремы следует проводить самым тщательным образом. Как раз из-за ее фундаментальной простоты и кажущейся самоочевидности здесь особенно опасен какой-либо промах. Смысл теоремы таков: если M — *конечное* множество, M' — правильная составная часть множества M, отличная от M, то M и M' *не* эквивалентны.

Под *конечным* множеством мы понимаем такое множество M, которое получается из *одного* первоначального элемента последовательным присоединением новых элементов таким образом, что и, *обратно*, этот первоначальный элемент можно получить из M *последовательным* удалением элементов *в обратном порядке*. [В связи с этим ср. I.10, § 5 и примечание [4] к данной работе.]

Доказательству я предпосылаю следующую общую и в высшей степени очевидную *лемму*: если какие-нибудь два множества M и N эквивалентны, то между ними можно установить (вообще говоря, многими способами) такое взаимно однозначное и полное соответствие, что в *этом* соответствии произвольно заданному элементу m из M сопоставляется столь же произвольно выбранный элемент n из N.

А теперь для доказательства рассматриваемой теоремы вводится *метод полной индукции*.

Берем множество M, которое не эквивалентно никакой из своих составных частей. Я хочу показать, что тогда *тем же свойством* не быть эквивалентным никакой *его* составной части обладает и множество $M+l$, получаемое из M добавлением одного нового элемента l. Пусть N — какая-либо составная часть множества $M+l$. Тогда могут представиться два случая. 1) Элемент l принадлежит N, так что $N=N'+l$. Тогда очевидно, что N' тоже является составной частью множества M. Если бы теперь было $N\sim M+l$, то по предшествующей *лемме* между множествами N и $M+l$ можно было бы установить такое взаимно однозначное и полное соответствие, что элемент l из N соответствовал бы элементу l из $M+l$. При помощи этого соответствия было бы установлено и некоторое соответствие между N' и M, и M было бы эквивалентно своей составной части N', вопреки нашему предположению. 2) Элемент l не принадлежит N. Тогда N является составной частью не только можества $M+l$, но и множества M. Если бы в этом случае было $N\sim M+l$, то, взяв *какое-нибудь* взаимно однозначное и полное соответствие между этими двумя множествами $M+l$ и N, мы получили бы, что элемент l из $M+l$ отвечает элементу n из N. Если $N=N'+n$, то при помощи этого соответствия устанавливалось бы взаимно однозначное и полное соответствие между N' и M, а так как и здесь N' является составной частью множества M, то это противоречит сделанному допущению, согласно которому M не эквивалентно никакой из своих составных частей.

Рассматриваемая нами теорема очевидна для случая множества, состоящего из двух элементов. С помощью только что доказанного ее правильность можно перенести на *любое конечное* множество.

Самым существенным признаком конечных множеств следует считать то, что они не эквивалентны *никакой из своих составных частей*. Актуально бесконечное же множество всегда обладает тем свойством, что в нем многими способами можно выделить составную часть, которая эквивалентна ему.

чисел $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$, то данная теорема перестает быть правильной. В этом и кроется *глубочайшее* основание *существенного различия* между *конечными* и *актуально бесконечными* числами и множествами, различие, которое настолько велико, что мы вправе назвать бесконечные числа *числами совершенно нового рода.*

Как раз здесь лежит *великий камень преткновения*, который с древних времен не могли сдвинуть философы и математики и который побудил большинство из них выступить со всем упорством и упрямством, со всей настойчивостью старого, хотя и ложного, но тем не менее глубоко укоренившегося принципа против всех попыток подвинуть хоть на шаг вперед учение о бесконечном. *Они обманывали себя допущением, будто является противоречием, если бесконечному множеству М соответствует то же число, что и его составной части М'.* То, что это заключение основывается на ошибочном заключении, можно доказать следующим образом. Если, скажем, $M=M'+M''$, то утверждение, что множеству M соответствует то же самое число, как и множеству M', *равнозначно* по п. 1 положению, что множества M и M' подпадают под одно и то же общее понятие, получаемое путем абстрагирования от состава и порядка их элементов. Иными словами, в этом утверждении говорится, что $\overline{\overline{M}}=\overline{\overline{M}}'$. Но с каких пор стали признавать за противоречие то, что составная часть некоего целого подпадает в каком-либо отношении под то же самое «universale» что и само целое? Возможно, на это возразят, что вообще допустимо, чтобы целое и его составная часть подпадали под одно «universale», но что здесь речь идет об особого рода общих понятиях, о *числах*, а для *чисел* это не годится. Но тогда я мог бы потребовать, чтобы было доказано последнее утверждение, в соответствии с которым числа в рассматриваемом отношении составляют исключение. Возможно, что кое-кто и попытается предложить подобное доказательство. Но оно *удастся лишь тогда*, когда молчаливо предположат, что речь идет о *конечных* множествах; а эта предпосылка является как раз той, которая здесь должна быть избегнута. Но чтобы в меру моих сил воспрепятствовать *бесполезным* попыткам, которые неизбежно должны сводиться к вращению в порочном круге, я попытаюсь еще лучше выяснить суть дела. Для этого я замечу: утверждение, что множеству M соответствует то же самое кардинальное число, что и его составной части M', не равносильно высказыванию, что *конкретным множествам М и М' присуща одна и та же реальность.* Действительно, если соответствующие общие понятия $\overline{\overline{M}}$ и $\overline{\overline{M}}'$ удовлетворяют условию равенства, *то это отнюдь не противоречит исходному факту, что множество М включает в себя как реальность М', так и реальность М''.* Разве *какое-нибудь множество* и *соответствующее ему кардинальное число* не представляют собой совершенно различные вещи? Разве *первое* не *противостоит* нам в качестве объекта, между тем как последнее есть лишь его абстрактный образ в нашем уме? Древнее, столь часто повторяемое положение «Totum est majus sua parte» [95] можно применять без доказательства лишь к *сущностям*, лежащим в ос-

нове целого и части. *Тогда* и *только тогда* оно является непосредственным следствием понятий «totum» и «pars». Однако, к сожалению, эта «аксиома» — без какого бы то ни было обоснования и без необходимого различения «реальности» и «величины» или «числа» множества — применялась чрезвычайно часто[29] как раз в том ее значении, в котором она становится *вообще ложной*, если речь идет об *актуально бесконечных* множествах, и в котором она верна для *конечных* множеств лишь потому, что здесь мы в состоянии доказать ее правильность. Пример пояснит все это.

Пусть M будет совокупностью (ν) всех конечных чисел ν, M' — совокупность (2ν) всех четных чисел 2ν. Здесь безусловно верно, что M по своей сущности *богаче*, чем M'; ведь M содержит в себе помимо четных чисел, из которых состоит M', еще сверх того, все нечетные числа M''. С другой стороны, столь же безусловно верно и то, что обоим множествам M и M' соответствует согласно п. 2 и 3 *одно и то же* кардинальное число. Оба утверждения истинны и ни одно из них не мешает другому, если только помнить различие между *реальностью* и *числом*. Следовательно, надо сказать: *множество M обладает бо́льшей реальностью, чем M', ибо оно содержит в качестве составных частей M' и, сверх того, M''; но соответствующие обоим множествам M и M' кардинальные числа равны*. Когда же, наконец, все мыслители признают (разумеется, не во вред себе) эти столь простые и ясные истины?

8. Я утверждаю, что после рассуждений и разъяснений предыдущих параграфов уже не могут шокировать утверждения, вроде

$$\mathfrak{a} + \bar{\nu} = \mathfrak{a}, \qquad \mathfrak{a} \cdot \bar{\nu} = \mathfrak{a}, \qquad \mathfrak{a}^{\bar{\nu}} = \mathfrak{a}$$

(где $\bar{\nu}$ имеет значение какого-нибудь *конечного*, $\mathfrak{a}$ — какого-нибудь *трансфинитного кардинального числа*), если против них нельзя выставить ничего другого, кроме того, что они не совпадают с традиционными положениями для *конечных* чисел. Ведь, как сказано выше, в случае на-

---

[29] Далее я привожу ряд авторов, число которых ничтожно по сравнению с имеющимся у меня материалом, которые, как мне кажется, совершили охарактеризованную здесь ошибку, а потому могут быть названы противниками актуально бесконечных чисел.

Fullerton. The conception of the infinite. Philadelphia, 1887. Chap. 2.

Renouvier. Esq. d'une classif. syst. d. doctr. philos. Paris, 1885, vol. 1, p. 100.

Moigno. Imposs. d. nombre act. inf. Paris, 1884.

Здесь приводятся Галилей, Жердиль, Торричелли, Гюльден, Кавальери, Ньютон, Лейбниц в качестве ученых, которые предложили так называемые доказательства невозможности актуально бесконечных чисел.

Cauchy. Sept. leçons d. phys. gén. Paris, 1868, p. 23.

Tongiorgi Salv. Inst. philos. Paris, ed. 10a, t. 2, Ont. § 350 ff.

Sanseverino. Él. d. l. phil. chrétienne. 2e, Ont. § 252. Avignon, 1876.

Pesch T. Inst. phil. nat. Freiburg, 1880, § 412.

Zigliara. Th. Maria. Summa phil. Ed. 5a, vol. 1, Ont. Lib. 2, cap. 3, art. 5, II, III.

Gerdill. Op. ed. et ined. 4, 261; 5. 1. Rome, 1806.

Leibniz. Ed. Erdmann, S. 138, 244, 236.

Goudin. Phil. juxta D. Thomae dogm. 2, 189. Paris, 1851.

Pererius Bened. De comm. onn. rer. nat. princ. et affec. lib. 10, cap. 9. Lugduni, 1585 [96].

ших *трансфинитных* чисел речь идет о *новом роде чисел*, свойства которых должно исследовать, а не произвольно изготовлять по какому-то составленному из предрассудков рецепту. Указанные предложения, как и все прочие, привести которые я не смогу в этом кратком очерке, имеют под собой *надежный фундамент благодаря логической силе аргументов, которые достигают своей цели с помощью силлогизмов, исходя из заданных ранее определений, не произвольных или искусственных, а проистекающих из источника естественной абстракции*. При этом надлежит развить дальше те методы, которые были введены в «J. reine und angew. Math.», Bd. 84, S. 253; «Acta math.», Bd. 4, S. 381; Bd. 7, S. 105; «Math. Ann.», Bd. 73, S. 454 [здесь I.3, I.7, I.8,I.5] [30].

---

[30] В п. 1—8 этого раздела изложены с возможной краткостью основы общего учения как о конечных, так и трансфинитных кардинальных числах. Для полноты я прибавлю кое-что еще, относящееся к *конечным* кардинальным числам. Под *конечным* кардинальным числом я понимаю число, соответствующее *конечному* множеству таким образом, как было разъяснено в п. 1—3. Что при этом следует понимать под *конечным множеством*, это указано в примечании к п. 7. Теперь прежде всего я обращаю внимание на то, что каждое конечное (как и каждое трансфинитное) кардинальное число имеет само по себе *совершенно независимое* идеальное существование и занимает такое же независимое положение по отношению ко всем другим кардинальным числам. Для образования общего понятия «пять» необходимо лишь одно множество (например, множество всех пальцев моей правой руки), которому соответствует это кардинальное число. Акт абстракции, производимый по отношению к тем свойствам и порядку, в каких оказываются передо мной эти четко отличающиеся друг от друга вещи, вызывает или, скорее, пробуждает в моем уме понятие «пять». Это, следовательно, пять в себе и для себя, независимо от «четырех», «трех» или какого-либо другого числа. Каждое число есть, по своему существу, *простое* понятие, в котором некоторое многообразие единиц собрано органически едино, *специальным образом*, так что в нем различные единицы — равно как и получающиеся из их частичного собирания числа — являются *виртуальными* составными частями. То обстоятельство, что по данному в п. 5 определению суммы имеет место равенство

$$\overline{5}=\overline{2}+\overline{3},$$

не должно побуждать нас к допущению, будто в понятии $\overline{5}$ содержатся как *реальные части* понятия $\overline{2}$ и $\overline{3}$. Если бы это было так, то никогда не могло бы иметь равенство $\overline{5}=\overline{1}+\overline{4}$. Но $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$ и $\overline{4}$ определенно можно назвать *виртуальными составными частями* у $\overline{5}$, если под этим понимать просто то, что в каждом *конкретном* множестве M с кардинальным числом $\overline{5}$ содержатся подмножества M', которым соответствуют кардинальные числа $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$ или $\overline{4}$. Следовательно, приведенное выше равенство имеет значение некоторого определенного *идеального отношения* трех существующих самих по себе кардинальных чисел $\overline{2}$, $\overline{3}$ и $\overline{5}$ и этому идеальному отношению соответствует в качестве коррелата тот *факт*, что *всякое конкретное* множество с кардинальным числом $\overline{5}$ может быть *реально* составлено из двух подмножеств, которым соответствуют кардинальные числа $\overline{2}$ и $\overline{3}$.

Аналогичным образом следует истолковать все равенства и неравенства, получающиеся между кардинальными числами на основании определений из п. 1—6; они представляют собой неизмененные идеальные отношения и законы для числовых понятий, имеющие свой коррелат и в известном смысле — а именно для нашего человеческого способа познания — свое основание в определенных отношениях конкретных множеств.

Среди закономерных отношений, которые в своем многообразном и сложном переплетении связывают царство конечных кардинальных чисел в одно идеальное, органическое целое, следует прежде всего выделить то отношение, благодаря которому мы,

Чтобы с уверенностью перенести *учение о кардинальных числах*, для которого в первых восьми пунктах этого VIII раздела были даны определения основных понятий, в область трансфинитного и развить его здесь строгим образом, приходится — как я указал в разделе I — привлечь к рассмотрению трансфинитные *порядковые числа*, являющиеся в свою очередь лишь частными формами *порядковых типов* или *идеальных чисел* (ἀριθμοὶ νοηθοὶ или εἰδητικοί) [98]. Трансфинитные *порядковые числа* суть не что иное, как типы тех бесконечных просто упорядоченных множеств, которые я назвал *вполне упорядоченными множествами* (ср. «Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre», § 2). Поэтому в дальнейших пунктах этого VIII раздела я изложу сперва принципы общей теории порядковых типов. Лишь позже в какой-нибудь статье появятся основы специальной

основываясь на данном в п. 4 определении (и принимая во внимание при этом сноску на с. 301 к п. 7), из любых двух различных кардинальных чисел $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ одно вынуждены обозначить как меньшее, а другое как большее. Если мы имеем еще третье число $\mathfrak{c}$, то легко доказать, что если $\mathfrak{a}<\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{b}<\mathfrak{c}$, то всегда и $\mathfrak{a}<\mathfrak{c}$.

Таким образом, *совокупность всех конечных кардинальных чисел,*— если в ней меньшие числа получают более низкий ранг, чем большие,— образует *в этом упорядочении* то, что я называю *просто упорядоченным множеством.* Но, более того, в этом упорядочении она представляется нам *вполне упорядоченным множеством* (ср. «Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre», S. 4 [I.5.5, § 2]). Ведь мы имеем в ней *низший по рангу элемент*, наименьшее кардинальное число $\overline{1}$, и за каждым конечным кардинальным числом $\overline{\nu}$ непосредственно следует *по рангу* (здесь по величине) конечное кардинальное число $\overline{\nu+1}$. Таким образом, мы получаем *совокупность всех конечных кардинальных чисел* в виде так называемой *бесконечной натуральной последовательности* $\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \ldots, \overline{\nu}, \ldots$, и в этом виде она представляет собой *вполне упорядоченное множество порядкового типа* ω.

Отсутствие конца у этой последовательности доказывает, что *совокупность всех конечных чисел*, рассматриваемая как *вещь для себя*, есть *актуально бесконечное множество*, Transfinitum. *Действительно, для возможности утверждения, что некоторое множество бесконечно, существенно важны лишь определенность всех его элементов и то что количество их больше любого конечного числа, а вовсе не требуется, чтобы это множество было ограничено в какой-либо форме некоторым последним принадлежащим ему членом. Множество вполне ограничено уже тем, что все, принадлежащее ему, определено в себе и вполне отлично от всего, не принадлежащего ему.* Это полностью совпадает с тем, что говорит св. Августин на с. 32 его основной работы «De Civitate Dei», lib. XII, cap. 19: «Ita vero suis quisque numerus proprietatibus terminatur, ut nullus eorum par esse cuicumque alteri possit. Ergo et *dispares inter se atque diversi sunt, et singuli quique finiti sunt, et omnes infiniti sunt*» [97].

Таким образом, если расположение $\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \ldots, \overline{\nu}, \ldots$ конечных кардинальных чисел представляется нам как бы само собой — и это-то объясняет, почему оно получило название «натуральной последовательности целых чисел»,— то не следует все-таки забывать, что это закономерное изображение множества (ν) при указанной выше *идеальной независимости каждого числа от всех прочих и при многообразии отношений чисел друг к другу представляет собой лишь одно из бесчисленно многих возможных закономерных соединений и расположений всех конечных кардинальных чисел.* Поэтому следует считать в известном смысле произвольным то, что именно это *основывающееся на отношении величины* расположение конечных кардинальных чисел было названо их «натуральной последовательностью». Позднее, мы увидим, что и совокупность *всех кардинальных чисел или мощностей* (конечных и сверхконечных) образует *вполне упорядоченное* множество, если представить их упорядоченными по величине.

теории порядковых чисел вместе с их применением к учению о кардинальных числах [99].

9. Вообразим себе, как и в п. 1 этого раздела, определенное множество M, состоящее из заданных вполне отличающихся друг от друга элементов, которые могут быть конкретными вещами или абстрактными понятиями (причем, однако, последние рассматриваются, подобно первым, в смысле противостоящих нам объектов). Они могут оказаться *упорядоченными* в n[31] независимых отношениях, которые я буду называть *направлениями* (понимая это слово не только в геометрическом смысле, но и более общим образом). Эти направления можно различать как 1-е, 2-е, ..., ν-е направление. Подобное множество мы называем *n-кратно упорядоченным множеством.*

Для более точного уразумения этого понятия укажем следующие его свойства и признаки.

Если E и E' — два каких-нибудь элемента из M, то *в любом из n направлений* между ними имеет место определенное отношение *более низкого, одинакового или более высокого ранга* (отношение πρότερον καὶ ὕστερον κατὰ τάξιν [100]). Если для обозначения этих трех отношений рангов мы воспользуемся символами $<$, $=$, $>$, применяемыми обычно для обозначения отношений «меньше», «равно» и «больше» у величин, то, придавая ν значения 1, 2, 3, ..., n, получим, что и E будет $<$, $=$ или $>E'$ в ν-м направлении. Для *различных* направлений это отношение рангов элементов E и E' может совпадать или быть различным.

Если E, E' и E'' — *какие-нибудь* три элемента множества M и в ν-м направлении имеют место отношения

$$E \leqslant E' \quad \textit{и} \quad E' \leqslant E'',$$

то *в том же* ν-м направлении всегда будет

$$E \leqslant E'',$$

причем знак $=$ имеет место *тогда и только тогда*, когда он содержится в *обоих* предыдущих отношениях.

Таковы те предпосылки, при наличии которых я называю заданное множество M *n-кратно упорядоченным множеством относительно этих n порядковых направлений, причем последние мыслятся в определенной последовательности как* 1*-е,* 2*-е, ...,* n*-е направления.*

В пояснение приведу несколько примеров многократно упорядоченных множеств, у которых упорядочение элементов по рангу в нескольких направлениях задается *естественно* или *искусственно.*

Первый пример. Пусть в *пространстве* каким-нибудь образом расположены m определенных точек. Если мы отнесем их, как обычно, к трехосной ортогональной системе координат, примем ось x за первое порядковое направление, ось y — за второе и ось z — за третье и если в соответствии с этим определим порядковое отношение двух каких-нибудь точек E и E' по 1-му, 2-му, 3-му направлениям через отношение величин

[31] n имеет здесь значение конечного кардинального числа, включая $n=1$.

их координат x и x', y и y', z и z', то тем самым наша система, состоящая из m точек, воспринимается как *трехкратно упорядоченное множество*. При этом способе рассмотрения нас вовсе не интересуют расстояния и прочие геометрические отношения m точек; здесь существенно лишь взаимное расположение по рангам этих m точек в трех порядковых направлениях.

Второй пример. Таким же точно образом можно рассматривать m точек на *плоскости* как *двукратно упорядоченное множество*, положив в основу двухосную ортогональную систему координат, причем опять-таки не принимаются во внимание расстояния и прочие геометрические отношения этих m точек.

Третий пример. Возьмем какую-нибудь *музыкальную вещь*, скажем простую мелодию или сложное музыкальное произведение, например симфонию или ораторию. Эта музыкальная вещь состоит из определенного числа m различных звуков, упорядоченных по четырем независимым друг от друга направлениям.

За *первое* направление принимаем последовательность звуков *во времени*. В этом отношении два звука E и E' получают один и тот же ранг, если они произносятся одновременно или, как выражаются, принадлежат одному аккорду. В противном случае E имеет более низкий или более высокий ранг в зависимости от того, наступает ли E раньше или позже, чем E'.

Второе направление определяется продолжительностью каждого звука. Так что в этом отношении два звука E и E' получают одинаковый ранг, если они одной и той же длительности; наоборот, ранг звука E здесь ниже или выше ранга E' в зависимости от того, меньше или больше продолжительность E, чем E'.

Третье направление задается *высотой* звуков. Здесь E и E' имеют одинаковый ранг, если они одинаковой высоты; напротив, E получает более низкий или более высокий ранг в зависимости от того, ниже или выше звук E, чем E'.

Наконец, *четвертое* порядковое направление определяется в аналогичном смысле *интенсивностью* звуков. Рассматриваемая таким образом каждая музыкальная вещь представляет собой *четырехкратно упорядоченное множество*.

Четвертый пример. Возьмем какую-нибудь картину и станем рассматривать в ней m определенных точек, например, столько и таких, что на расстоянии, с которого рассматривается эта картина, она производит впечатление непрерывного целого. Если мы отнесем ее к горизонтальному и вертикальному направлениям как к двухосной координатной системе, то ее *можно считать как четырехкратно упорядоченное множество* согласно следующим точкам зрения.

Пусть абсциссы служат для определения *первого*, а ординаты — для определения *второго* порядкового направления. *Третье* направление будет задаваться *цветом* точек, так что две точки E и E' имеют одинаковый ранг в этом направлении, если они одинакового цвета. Напротив, E имеет более низкий или более высокий ранг в зависимости от того, со-

ответствует ли цвету E меньшая или бо́льшая длина волны, чем цвету E'. Наконец, пусть *интенсивность цвета* этих точек определяет *четвертое* направление.

В этих четырех примерах мы рассматривали *конечные*, т. е. состоящие из конечного числа элементов, многократно упорядоченные множества. Но наше понятие относится и к множествам с *бесконечным числом* элементов. Однако в последнем случае речь идет всегда только об *актуально бесконечном*, так как нас интересуют только такие множества, которые определены в себе и все элементы которых следует представлять себе поэтому, как уже существующие вместе. Потенциальная бесконечность непригодна для этого, так как она согласно своему понятию может относиться лишь к неопределенным, соответственно изменяющимся вещам.

Так, например, мы можем рассматривать *все* те точки пространства, у которых все три координаты,— беря опять-таки трехосную ортогональную координатную систему,— имеют рациональное отношение к единице длины. Эти точки образуют,— если, как в первом примере, для определения их упорядочения по рангам будет применена величина их координат,— *трехкратно упорядоченное актуально бесконечное множество.*

После этих разъяснений я прямо перехожу к объяснению того, что я называю *порядковым типом* или *идеальным* числом упорядоченного множества.

Пусть M — какое-нибудь определенное n-кратно упорядоченное множество, состоящее из конечного или актуально бесконечного числа элементов E, E', E'', ... Если мы отвлечемся от свойств его элементов, сохранив лишь их расположение по n различным направлениям, то у нас возникает некий интеллектуальный образ, некоторое общее понятие (universale), которое я называю соответствующим множеству M порядковым типом или же соответствующим множеству M идеальным числом и которое я обозначаю через $\overline{M}$.

Следовательно, каждой системе точек в пространстве (в смысле первого примера) соответствует трехкратный, каждой системе точек в плоскости (в смысле второго примера) — двукратный, каждому множеству точек на прямой линии — однократный *определенный* порядковый тип, тогда как музыкальной вещи (сообразно нашему третьему примеру) и картине (принимая во внимание четвертый пример) соответствуют определенные четырехкратные порядковые типы. Таким образом, если мыслимо, что в основе музыкальной вещи и картины лежит случайно один и тот же порядковый тип, то отсюда видно, как при известных обстоятельствах самые разнородные вещи могут быть соединены между собой *общей связью идеальных чисел.*

10. Рассмотрим теперь внимательнее понятие порядкового типа $\overline{M}$, полученное путем описанного выше акта абстракции из упорядоченного множества M.

Отдельным элементам E, E', E'', ... множества M соответствуют в его порядковом типе $\overline{M}$ одни только *единицы* $e=1$, $e'=1$, $e''=1$, ..., которые, как таковые, хотя все и одинаковы, но отличаются друг от дру-

га их положением внутри порядкового типа $\overline{M}$. Между ними имеет место то же самое расположение по рангам, что и между элементами множества M.

Поэтому под n-кратным порядковым типом мы должны понимать *идеальный образец* некоторого n-кратно упорядоченного множества, как бы *реальное n-мерное целое число*, т. е. некое понятийное, органически единое соединение единиц $e=1$, $e'=1$, $e''=1$, ..., упорядоченных в n различных и независимых друг от друга отношениях, которые и здесь следует называть направлениями. Если мы возьмем две *какие-нибудь* из этих единиц e и e', то по ν-му направлению (для $\nu=1, 2, \ldots, n$) единица e имеет одинаковый ранг с e' или же ее ранг ниже или выше ранга у e'. Отношение рангов одних и тех же двух единиц, рассматриваемое по ν-му или μ-му направлению, может быть одинаковым или разным. Если e, e', e'' — три *какие-либо* из этих единиц и если мы имеем по ν-му направлению

$$e \leqslant e', \quad e' \leqslant e'',$$

то по тому же направлению

$$e \leqslant e'',$$

где знак $=$ справедлив тогда и только тогда, когда в *обоих* предшествующих отношениях имеет место знак $=$ [32].

Я называю порядковый тип *чистым порядковым типом*, когда *любые две* из его единиц e и e' имеют *различный ранг по крайней мере по одному* из n направлений.

В противном случае я называю его *смешанным порядковым типом*. В этом случае единицы объединяются в определенные группы, так что единицы, принадлежащие одной и той же группе, имеют *по всем n направлениям* одинаковый ранг, а потому сливаются в одно *определенное кардинальное число*, тогда как единицы, принадлежащие различным группам, имеют различный ранг по крайней мере по одному из n направлений.

Следовательно, каждый смешанный порядковый тип получается из определенного чистого порядкового типа таким образом, что в последнем подставляют вместо единиц некоторые кардинальные числа.

Теперь возникает вопрос: *когда* два различных n-кратно упорядоченных множества имеют *один и тот же порядковый тип*, а *когда нет*? Для ответа на него мы воспользуемся понятием отношения *подобия упорядоченных множеств*.

Два n-кратно упорядоченных множества M и N будут называться «подобными», если между ними можно установить такое взаимно однозначное и полное поэлементное соответствие, что если E и E' представляют собой два каких-нибудь элемента из M, а F и F' — соответствующие им элементы из N, то для $\nu=1, 2, \ldots, n$ отношение рангов у E и E' по ν-му направлению в множестве M является в точности таким же, как

[32] Напомню, что знаки $<$, $=$, $>$ употребляются здесь для указания отношения рангов.

и отношение рангов у F и F' по ν-му направлению в множестве N. Такого рода соответствие двух подобных друг другу множеств мы будем называть отображением одного на другое [101].

Подобие двух множеств M и N будет выражаться следующей формулой:

$$M \simeq N.$$

Теперь на поставленный вопрос мы можем ответить следующей теоремой.

Два n-кратно упорядоченных множества M и N обладают одним и тем же порядковым типом тогда и только тогда, когда они подобны. Символически: если $M \simeq N$, то $\overline{M}=\overline{N}$, и, обратно, если $\overline{M}=\overline{N}$, то $M \simeq N$.

Обе части этого двойного положения легко получаются через обращение к понятиям порядкового типа и подобия упорядоченных множеств аналогично тому, как мы доказали в п. 3 этого раздела теорему, что два множества имеют одинаковое кардинальное число тогда и только тогда, когда они эквивалентны.

Следовательно, порядковый тип заданного n-кратно упорядоченного множества M есть то общее понятие, под которое подпадают M и все подобные ему множества, но которое не включает в себя никаких иных вещей, так что его объем в точности определяется с помощью M и подобных ему множеств.

Как легко видеть (ср. п. 2), из подобия двух множеств M и N вытекает и их эквивалентность, тогда как, обратно, эквивалентные множества не должны быть непременно подобными.

Поэтому мы можем сказать:

Если два упорядоченных множества M и N обладают одним и тем же порядковым типом, то им соответствует всегда одно и то же кардинальное число. Символически: если $\overline{M}=\overline{N}$, то и $\overline{\overline{M}}=N$.

Поэтому кардинальное число какого-либо упорядоченного множества M всегда является и кардинальным числом его порядкового типа $\overline{M}$ и получается из последнего путем абстрагирования от особенного расположения его единиц. Если α — знак для порядкового типа $\overline{M}$, то $\overline{\alpha}$ есть знак для кардинального числа $\overline{\overline{M}}$. В этом смысле мы в п. 1—8 употребляли знаки 1, 2, 3, ..., ν, ... для конечных *порядковых чисел*, а знаки $\overline{1}$, 2, $\overline{3}$, ..., ν, ... для конечных *кардинальных чисел.*

В зависимости от того, конечно или трансфинитно кардинальное число какого-нибудь множества, мы называем и само множество и его порядковый тип конечным или трансфинитным.

У двух *трансфинитных* n-кратно упорядоченных множеств может случиться, когда они подобны, что существует не *одно* отображение их друг на друга, а *несколько*, даже бесконечно много. В этих случаях каждое множество соответствующего порядкового типа может отображаться само на себя многократно и о соответствующем порядковом типе мы тоже можем сказать, что он *подобен самому себе многими способами.* Если мы имеем дело с *конечными* n-кратно упорядоченными множествами

чистого порядкового типа, то для любых двух подобных множеств всегда существует лишь *одно-единственное отображение*. Однако это свойство не ограничивается лишь конечными множествами. Существуют также классы трансфинитных упорядоченных множеств, которые допускают *только одно* отображение двух подобных множеств. Сюда относятся, например, все те *однократно упорядоченные множества*, которые я назвал *вполне упорядоченными* множествами [33].

11. n-Кратный тип α составляется, как мы видели в п. 10, из некоторых единиц e, e', e'', ..., находящихся в определенном расположении друг относительно друга по n направлениям. Если взять не все эти единицы, а только некоторую их часть, то последняя в предложенном расположении также определяет для себя некоторый тип γ, который мы можем рассматривать как часть типа α (разумеется, понимаемую лишь в виртуальном смысле). Таким образом, каждый тип α содержит в себе как виртуальные *части* другие типы γ, γ',γ'', ..., которые в известной степени отчасти отделены друг от друга, а отчасти налегают друг на друга. Многообразие взаимоотношений между целым и частями у типов столь велико, что представляется полезным ограничиться на первых порах рассмотрением простейших отношений. Они связаны с операциями *сложения* и *умножения* двух n-кратных типов α и β, и их я теперь объясню с надлежащей обстоятельностью.

а) *Определение* $\alpha+\beta$. Вообразим себе два множества M и N, которым соответствуют типы $\overline{M}=\alpha$ и $\overline{N}=\beta$, и составим из них новое упорядоченное множество, которое мы обозначим через $M+N$, установив при этом следующее правило расположения по рангам его элементов. Элементы множества M сохраняют в $M+N$ то же самое расположение по отношению *друг к другу* по всем n направлениям, какое они имели в M. Точно так же элементы множества N сохраняют в $M+N$ то же самое расположение по отношению *друг к другу* по всем n направлениям, какое они имели в N. Наконец, все элементы множества N занимают в $M+N$ по каждому из n направлений более высокий ранг, чем все элементы множества M.

Очевидно, что все множества $M+N$, удовлетворяющие этим требованиям, являются подобными друг другу n-кратно упорядоченными множествами и определяют тот тип, который мы будем рассматривать как сумму $\alpha+\beta$. Таким образом, мы имеем следующее определяющее равенство:

$$\alpha+\beta=\overline{M+N};$$

здесь α называется *первым* членом суммы, а β — *вторым* ее членом.

Отсюда легко доказать справедливость *ассоциативного* закона:

$$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma.$$

Напротив, *коммутативный* закон здесь, вообще говоря, не выполняется. Если не говорить об исключениях, то $\alpha+\beta$ и $\beta+\alpha$ представляют собой *различные* типы.

---

[33] Ср.: Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, S. 4 [I.5, 5, § 2].

Заметим еще, что кардинальное число типа $\alpha+\beta$ равно сумме кардинальных чисел типов α и β (ср. п. 5). Символически:

$$\overline{\overline{\alpha+\beta}}=\overline{\overline{\alpha}}+\overline{\overline{\beta}}.$$

в) *Определение произведения* $\alpha\cdot\beta$. Положим в основу множество N типа β, так что $\overline{N}=\beta$, и обозначим элементы, из которых состоит N, через $F_1, F_2, \ldots, F_\lambda, \ldots$

Пусть, далее, все множества $M_1, M_2, \ldots, M_\lambda, \ldots$ имеют тип α, так что

$$\overline{M}_1=\overline{M}_2=\ldots=\overline{M}_\lambda=\ldots=\alpha.$$

Вообразим себе, что эти подобные множества отображены друг на друга, и пусть

$E_{1,1}, E_{1,2}, \ldots E_{1,\mu}, \ldots$ — элементы множества M_1,
$E_{2,1}, E_{2,2}, \ldots E_{2,\mu}, \ldots$ — элементы множества M_2,
. . . .
$E_{\lambda,1}, E_{\lambda,2}, \ldots E_{\lambda,\mu}, \ldots$ — элементы множества M_λ,

причем

$$E_{1,\mu}, E_{2,\mu}, \ldots, E_{\lambda,\mu}, \ldots$$

будут соответствующими друг другу элементами множеств $M_1, M_2, \ldots$ $\ldots, M_\lambda, \ldots$ при положенных в основу отображениях.

Образуем теперь из N новое множество, которое я обозначу через $M\cdot N$ таким образом, что в N вместо *элементов* $F_1, F_2, \ldots, F_\lambda, \ldots$ будут соответственно подставлены *множества* $M_1, M_2, \ldots, M_\lambda, \ldots$, причем расположение по рангам будет подчинено следующим правилам. Все элементы $E_{\lambda,\mu}, E_{\lambda,\mu'}$ *одного и того же* множества M_λ сохраняют внутри $M\cdot N$ то же самое отношение рангов *между собой по всем n направлениям*, какое они имели в M_λ. Что же касается двух элементов $E_{\varkappa,\mu}$ и $E_{\lambda,\mu'}$, принадлежащих двум различным множествам $M_\varkappa$ и M_λ, то приходится различать два случая: 1) если $F_\varkappa$ и F_λ имеют в N различный ранг по ν-му направлению, то отношение рангов элементов $E_{\varkappa,\mu}$ и $E_{\lambda,\mu'}$ в $M\cdot N$ в ν-м направлении остается тем же, как и отношение рангов элементов $F_\varkappa$ и F_λ в N по ν-му направлению; 2) если $F_\varkappa$ и F_λ имеют в N по ν-му направлению одинаковый ранг, то отношение рангов элементов $E_{\varkappa,\mu}$ и $E_{\lambda,\mu'}$ внутри $M\cdot N$ по ν-му направлению будет тем же самым, как и отношение рангов у $E_{\varkappa,\mu}$ и $E_{\varkappa,\mu'}$ в $M_\varkappa$, или — что вследствие отображения $M_\varkappa$ на M_λ означает то же самое — как отношение рангов у $E_{\lambda,\mu}$ и $E_{\lambda,\mu'}$ в M_λ по ν-му направлению.

Легко убедиться, что все составленные по этому предписанию n-кратно упорядоченные множества $M\cdot N$ *подобны* между собой. Это верно, в частности, и в том случае, если вместо положенных в основу отображений множеств $M_1, M_2, \ldots, M_\lambda, \ldots$ возьмем другие их отображения, когда таковых много.

Таким образом, вместе с множеством $M\cdot N$ задается определенный тип и он-то будет называться произведением *множимого* α на *множитель* β. Так что мы имеем следующее определение:

$$a\cdot\beta=\overline{\overline{M\cdot N}}.$$

Здесь тоже можно доказать *ассоциативный* закон

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma,$$

тогда как $\alpha \cdot \beta$ вообще отлично от $\beta \cdot \alpha$.

Имеем также *дистрибутивный* закон:

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma,$$

где α — *множимое*.

Далее, принимая во внимание п. 6, очевидно, что кардинальное число произведения двух типов равно произведению кардинальных чисел обоих множителей. Символически:

$$\overline{\alpha \cdot \beta} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}.$$

Если какой-либо тип π представим в виде произведения двух типов α и β только так, что *множитель* β равен самому типу π или единице в n-кратной системе упорядочения, то мы называем π *простым типом.*

12. С данным n-кратным типом α тесно связаны некоторые другие типы, которые я называю типами, *сопряженными с* α.

Расположение, свойственное типу α, можно изменить таким образом, что все порядковые отношения единиц e, e', e'', ... по μ-му и ν-му направлениям будут замещены друг другом, сохранившись, однако, по всем другим направлениям.

В соответствии с этим две единицы e и e' имеют в преобразованном типе те же самые порядковые отношения по μ-му и ν-му направлениям, какое они имели в α по ν-му и μ-му направлениям, тогда как по остальным n—2 направлениям не происходит никакого изменения в расположении единиц. Это преобразование мы называем *преобразованием перестановки по отношению к μ-му и ν-му направлениям.*

Таких преобразований перестановки имеется $n(n-1)/2$. Их повторное применение дает, считая и тип α, в целом $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ вообще различных сопряженных типов.

Но из α можно получить вообще новый тип еще и так, что *обращаются* все порядковые отношения по ν-му направлению при сохранении их по остальным направлениям. В этом случае две единицы e и e' имеют в преобразованном типе по ν-му направлению порядковое отношение, *противоположное* тому, которое они имели по тому же ν-му направлению в α; если единицам e и e' в α соответствовал одинаковый ранг по ν-му направлению, то он, естественно, сохраняется при этом преобразовании. По всем прочим направлениям порядковые отношения у e и e' в обоих типах остаются теми же самыми. Это преобразование мы называем *преобразованием обращения по ν-му направлению.* Таких преобразований обращения имеется n. Их последовательное применение дает, считая и α, в целом 2^n различных сопряженных типов.

Если произвольным образом осуществить преобразования перестановки и преобразования обращения, то всегда получится, включая α, $2^n \cdot n!$ вообще различных сопряженных типов. В частных случаях число их уменьшается, а при некоторых обстоятельствах все они даже равны.

13. Наши последующие соображения мы ограничим пока *конечными* n-кратными типами, т. е. такими, у которых соответствующее кардинальное число m *конечно*.

Здесь *чистые* однократные типы ($n=1$) совпадают с конечными порядковыми числами 1, 2, 3, 4, ..., так как *конечные однократно* упорядоченные множества *чистого* типа одновременно всегда являются вполне упорядоченными множествами (об этом понятии см. «Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre», S. 4), типы которых я вообще называю *порядковыми числами*. Для каждого конечного кардинального числа m существует лишь один-единственный *чистый* однократный тип, т. е. *лишь одно* порядковое число; это непосредственно связано с доказанной в п. 7 теоремой, по которой *конечное множество* не эквивалентно какой-либо из его составных частей.

Напротив, число *всех* однократных типов ($n=1$), т. е. чистых и смешанных, заданного кардинального числа m равно, как легко убедиться, 2^{m-1}.

Рассмотрим теперь детальнее двукратные типы ($n=2$) конечного кардинального числа m.

Такой тип α состоит (ср. п. 10) из *m единиц*, находящихся в определенном порядковом отношении по двум независимым друг от друга направлениям.

Эти m единиц могут в целом распадаться на s различных классов по *первому* направлению и t различных классов по *второму* направлению.

Различные классы первого направления мы будем обозначать как 1-й, 2-й, ..., s-й и притом так, что 1-й класс включает все элементы типа α, которые имеют наинизший ранг по первому направлению, второй — все единицы, имеющие по первому направлению непосредственно следующий ранг, и т. д. Пусть g_1 означает число различных единиц, которые по первому направлению имеют первый ранг, g_2 — число единиц второго ранга и т. д., g_s — число единиц s-го ранга по первому направлению.

Совершенно аналогично мы различаем 1-й, 2-й, ..., t-й классы второго направления и обозначаем через $h_1, h_2, \ldots, h_t$ соответственно число единиц 1-го, 2-го, ..., t-го ранга по второму направлению.

Таким образом, каждому типу α соответствуют некие положительные целые числа $s, t, g_1, \ldots, g_s, h_1, h_2, \ldots, h_t$. По их смыслу все они $\leqslant m$ и всегда

$$g_1+g_2+\ldots+g_s=h_1+h_2+\ldots+h_t=m. \qquad (1)$$

Для полного определения двукратного типа α мы вводим систему из $s\cdot t$ величин $k_{\mu,\nu}$, где индекс μ получает значения 1, 2, 3, ..., s, а индекс ν — значения 1, 2, 3, ..., t; при этом $k_{\mu,\nu}$ имеет значение числа тех единиц в α, которые имеют μ-й ранг по первому и ν-й ранг по второму направлениям, а если в α нет таких единиц, то $k_{\mu,\nu}$ имеет значение нуль.

Определенную таким образом систему

$$k_{1,t}, k_{2,t}, \ldots, k_{s,t}.$$

$$\begin{array}{c} k_{1,t-1},\ k_{2,t-1},\ \ldots,\ k_{s,t-1}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ k_{1,2},\ k_{2,2},\ \ldots,\ k_{s,2}, \\ k_{1,1},\ k_{2,1},\ \ldots,\ k_{s,1} \end{array} \qquad (2)$$

мы назовем *характеристикой* типа α.

Если α является *чистым* типом, то величины $k_{\mu,\nu}$ имеют лишь значения 0 и 1. В случае *смешанных* типов α среди величин $k_{\mu,\nu}$ имеется по крайней мере одна, которая больше 1.

Здесь справедливы следующие равенства, непосредственно получаемые из значений входящих в них букв:

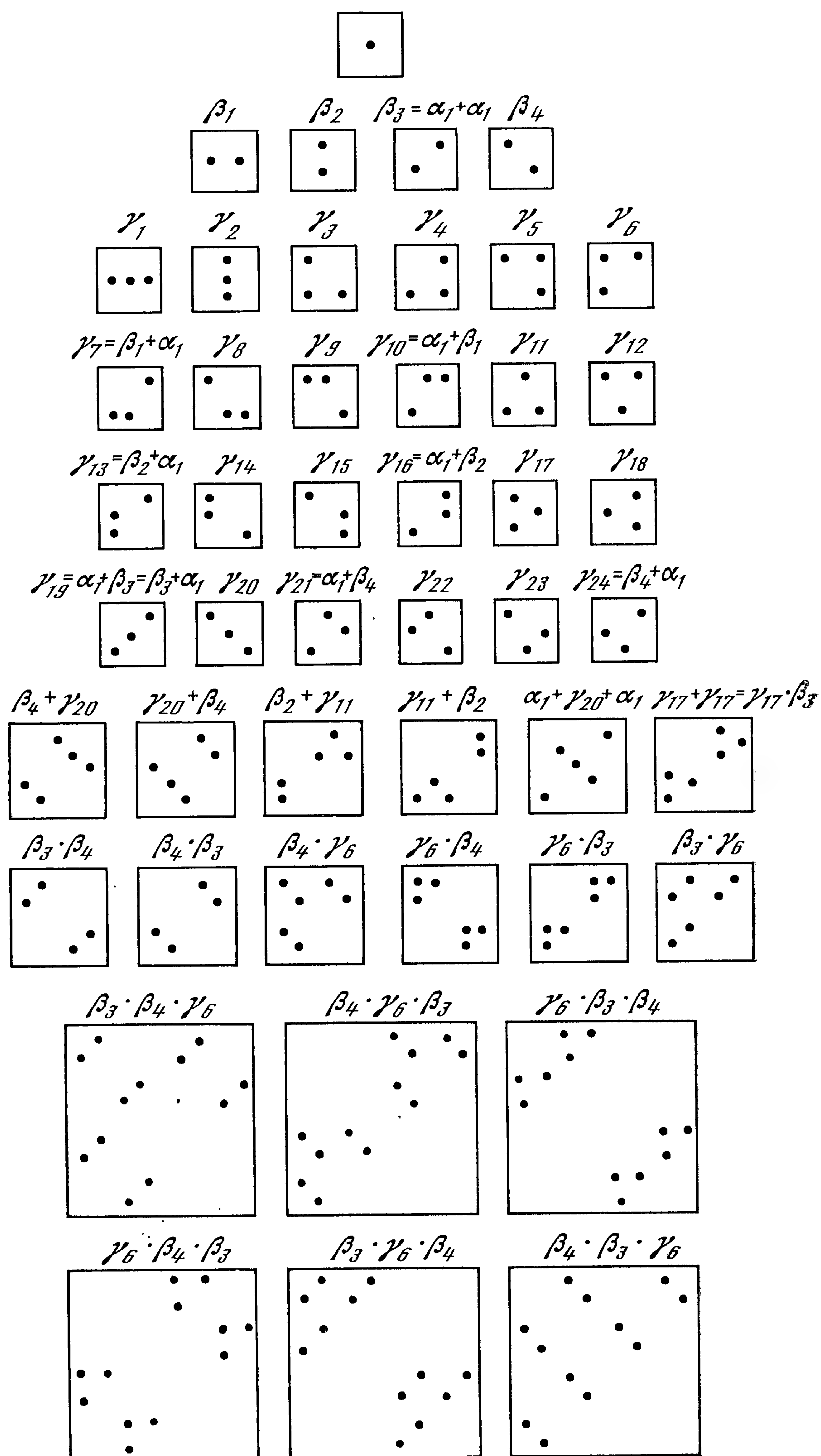
$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\mu=1,2,\ldots,s \\ \nu=1,2,\ldots,t}} k_{\mu,\nu} &= m, \\ \sum_{\nu=1,2,\ldots,t} k_{\mu,\nu} &= g_\mu, \\ \sum_{\mu=1,2,\ldots,s} k_{\mu,\nu} &= h_\nu. \end{aligned} \qquad (3)$$

Поэтому система (2) *неотрицательных* целых чисел $k_{\mu,\nu}$ является *характеристикой* двукратного типа α *тогда и только тогда*, когда получаемые отсюда по (3) суммы m, g_μ и h_ν представляют собой отличные от нуля целые положительные числа, как это вытекает из смысла m, g_μ и h_ν.

Нашей задачей будет теперь определение *количества всех чистых двукратных порядковых типов заданного кардинального числа* m. Это количество, рассматриваемое как функция от m, мы будем обозначать через $\Phi(m)$.

Прежде чем приводить решение, попытаюсь представить наглядным образом различные двукратные *чистые* типы для $m=2$ и 3 на следующей таблице[34]. Их имеется: для $m=1$ *один* α_1, для $m=2$ *четыре* β_1, β_2, β_3, β_4, для $m=3$ *двадцать четыре* от γ_1 до γ_{24}. Они изображены с помощью *точечных множеств* на плоскости, которые мы рассматриваем как двукратно упорядоченные множества в том смысле, что первое порядковое направление определяется горизонтальным направлением слева направо, а второе — вертикальным направлением снизу вверх. Каждая *точка* представляет некоторую *единицу* в соответствующем порядковом типе. Точки, лежащие на одной и той же вертикали, соответствуют в типе единицам, которые имеют один и тот же ранг по первому направлению. Если же две точки не лежат на одной вертикали, то из двух представленных ими единиц более низкий ранг по первому направлению имеет та, которая соответствует точке, расположенной слева. Точно так же единицы, которым соответствуют точки на одной и той же

[34] За составление этой таблицы я благодарен г-ну д-ру Г. Винеру, приват-доценту университета в Галле [[102]].



β_1
β_2
$\beta_3=\alpha_1+\alpha_1$
β_4
γ_1
γ_2
γ_3
γ_4
γ_5
γ_6
$\gamma_7=\beta_1+\alpha_1$
γ_8
γ_9
$\gamma_{10}=\alpha_1+\beta_1$
γ_{11}
γ_{12}
$\gamma_{13}=\beta_2+\alpha_1$
γ_{14}
γ_{15}
$\gamma_{16}=\alpha_1+\beta_2$
γ_{17}
γ_{18}
$\gamma_{19}=\alpha_1+\beta_3=\beta_3+\alpha_1$
γ_{20}
$\gamma_{21}=\alpha_1+\beta_4$
γ_{22}
γ_{23}
$\gamma_{24}=\beta_4+\alpha_1$
$\beta_4+\gamma_{20}$
$\gamma_{20}+\beta_4$
$\beta_2+\gamma_{11}$
$\gamma_{11}+\beta_2$
$\alpha_1+\gamma_{20}+\alpha_1$
$\gamma_{17}+\gamma_{17}=\gamma_{17}\cdot\beta_3$
$\beta_3\cdot\beta_4$
$\beta_4\cdot\beta_3$
$\beta_4\cdot\gamma_6$
$\gamma_6\cdot\beta_4$
$\gamma_6\cdot\beta_3$
$\beta_3\cdot\gamma_6$
$\beta_3\cdot\beta_4\cdot\gamma_6$
$\beta_4\cdot\gamma_6\cdot\beta_3$
$\gamma_6\cdot\beta_3\cdot\beta_4$
$\gamma_6\cdot\beta_4\cdot\beta_3$
$\beta_3\cdot\gamma_6\cdot\beta_4$
$\beta_4\cdot\beta_3\cdot\gamma_6$

горизонтали, имеют в типе один и тот же ранг по второму направлению. А из двух единиц, соответственные точки которых не лежат на одной и той же горизонтали, более низкий ранг по второму направлению имеет та, для которой соответствующая точка расположена в плоскости ниже.

Для пояснения чисел s, t, g, h замечу, что в α_1 имеем $s=1$, $t=1$; в β_1—$s=2$, $t=1$; в β_2—$s=1$, $t=2$; в β_3 и β_4—$s=2$, $t=2$; в γ_1—$s=3$, $t=1$; в γ_2—$s=1$, $t=3$; в типах от γ_3 до γ_6—$s=2$, $t=2$; в типах от γ_7 до γ_{12}—$s=3$, $t=2$; в типах от γ_{13} до γ_{18}—$s=2$, $t=3$; в типах от γ_{19} до γ_{24}—$s=3$, $t=3$. Далее, например, имеем в γ_6—$g_1=2$, $g_2=1$, $h_1=1$; в типах от γ_{19} до γ_{24}—$g_1=g_2=g_3=h_1=h_2=h_3=1$.

Четыре последних ряда нашей таблицы конкретизируют объяснение в п. 11 операции сложения и умножения типов.

Обозначим теперь через $\varphi'(g_1, g_2, \ldots, g_s, t)$ число *чистых* двукратных типов, у которых s и t (оба $\leqslant m$), а также $g_1, g_2, \ldots, g_s$ имеют заданные положительные значения, удовлетворяющие условию (1). Тогда $\Phi(m)$ получается по следующей формуле:

$$\sum_{\substack{g_1+g_2+\ldots+g_s=m\\ s=1,2,\ldots,m\\ t=1,2,\ldots,m}} \varphi'(g_1\, g_2, \ldots, g_s, t). \tag{4}$$

Суммирование понимается здесь в том смысле, что буквы s и t получают все значения от 1 до m, а у каждой пары s, t буквы $g_1\, g_2, \ldots, g_s$ должны пробегать все *положительные* системы значений, удовлетворяющие условию (1). $\varphi'(g_1, g_2, \ldots, g_s, t)$ представляет собой согласно (3) число систем решений $(k_{\mu,\nu})$, которые удовлетворяют s уравнениям

$$\begin{aligned} k_{1,1}+k_{1,2}+\ldots+k_{1,t}&=g_1\\ k_{2,1}+k_{2,2}+\ldots+k_{2,t}&=g_2\\ \ldots\ldots\ldots&\\ k_{s,1}+k_{s,2}+\ldots+k_{s,t}&=g_s \end{aligned} \tag{5}$$

а также *дополнительным условиям*

$$h_1>0,\ h_2>0,\ \ldots,\ h_t>0, \tag{6}$$

причем $s\cdot t$ неизвестных $k_{\mu,\nu}$ могут получать *лишь значения* 0 и 1, а h_ν имеют значения сумм, написанных в (3).

Пусть $\varphi(g_1, g_2, \ldots, g_s, t)$ будет числом систем решений $(k_{\mu,\nu})$ для той же системы уравнений (5), *когда отброшены дополнительные условия* (6). Так как здесь приходится решать уравнения (5) независимо друг от друга, то это число равно *произведению* из чисел решений всех отдельных уравнений (5).

Число систем решений вида

$$k_1+k_2+\ldots+k_t=g$$

в целых числах $k_1, k_2, \ldots, k_t$, которые могут принимать лишь значения 0 и 1, равно биномиальному коэффициенту

$$\binom{t}{g}=\frac{t(t-1)(t-2)\ldots(t-g+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot g}. \tag{7}$$

Имеем, следовательно,

$$\varphi(g_1, g_2, \ldots, g_s, t) = \binom{t}{g_1} \cdot \binom{t}{g_2} \cdot \ldots \cdot \binom{t}{g_s}. \tag{8}$$

Но между функциями φ и φ' имеет место следующее соотношение:

$$\varphi(g_1, g_2, \ldots, g_s, t) = \sum_{\nu=0,1,2,\ldots,t-1} \binom{t}{\nu} \cdot \varphi'(g_1, g_2, \ldots, g_s, t-\nu). \tag{9}$$

Общий член этой суммы равен числу тех систем решений (5), для которых ν из сумм $h_1, h_2, \ldots, h_t$ имеет значение нуль, а остальные $t-\nu$ этих сумм отличны от нуля. Поэтому, если суммировать от $\nu=0$ до $\nu=t-1$, в результате получится число $\varphi(g_1, g_2, \ldots, g_s, t)$.

Из (9), если подставить туда $t=1, 2, \ldots, m$ и решить эти m уравнений относительно значений функции φ', легко получается следующая обратная формула:

$$\varphi'(g_1, g_2, \ldots, g_s, t) = \sum_{\nu=1,2,\ldots,t-1} (-1)^{\nu} \binom{t}{\nu} \cdot \varphi(g_1, g_2, \ldots, g_s, t-\nu). \tag{10}$$

Если внести это значение φ' в формулу (4), заменив предварительно в ней букву t на t', то получим

$$\Phi(m) = \sum_{\substack{\nu=0,1,2,\ldots,t'-1 \\ g_1+g_2+\ldots+g_s=m \\ s=1,2,\ldots,m \\ t'=1,2,\ldots,m}} (-1)^{\nu} \binom{t'}{\nu} \cdot \varphi(g_1, g_2, \ldots, g_s, t'-\nu).$$

Если мы соединим здесь все те члены, в которых $t'-\nu$ имеет одно и то же значение t, то коэффициент у $\varphi(g_1, g_2, \ldots, g_s, t)$ получает следующее значение:

$$\sum_{\nu=0,1,2,\ldots,m-t} (-1)^{\nu} \binom{t+\nu}{\nu} = (-1)^{m-t} C(m, t),$$

где введенная функция $C(m, t)$, ввиду того что $\binom{t+\nu}{\nu} = \binom{t+\nu}{t}$, определяется равенством

$$C(m, t) = \binom{m}{t} - \binom{m-1}{t} + \binom{m-2}{t} - \ldots (-1)^{m-t} \binom{t}{t}. \tag{11}$$

Поэтому имеем

$$\Phi(m) = \sum_{\substack{g_1+g_2+\ldots+g_s=m \\ s=1,2,\ldots,m \\ t=1,2,\ldots,m}} (-1)^{m-t} C(m, t) \cdot \varphi(g_1, g_2, \ldots, g_s, t).$$

Следовательно, если мы введем в рассмотрение функцию

$$D(m, t) = \sum_{\substack{g_1+g_2+\ldots+g_s=m \\ s=1,2,\ldots,m}} \varphi(g_1, g_2, \ldots, g_s, t), \tag{12}$$

то получим

$$\Phi(m) = \sum_{t=1,2,\ldots,m} (-1)^{m-t} C(m, t) \cdot D(m, t). \tag{13}$$

Тем самым искомая функция $\Phi(m)$ сводится к двум функциям $C(m, t)$ и $D(m, t)$, определяемым формулами (11) и (12).

Для практических вычислений можно воспользоваться формулами приведения.

Для $C(m, t)$ легко доказывается функциональное равенство

$$C(m+1, t+1) = C(m, t+1) + C(m, t). \tag{14}$$

Кроме того, для этой функции имеем значения:

$$C(2m, 1) = m; \quad C(2m+1, 1) = m+1;$$
$$C(m, m) = 1; \quad C(m, t) = 0, \text{ если } t > m. \tag{15}$$

Отсюда получается следующая таблица для $C(m, t)$, которую легко дополнить:

m/t	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	1	1				
3	2	2	1			
4	2	4	3	1		
5	3	6	7	4	1	
6	3	9	13	11	5	1

С другой стороны, по (12) имеем

$$D(m+1, t) = \sum_{\substack{g_0+g_1+\ldots+g_s=m+1 \\ s=0,1,2,\ldots,m}} \varphi(g_0, g_1, \ldots, g_s, t).$$

При $s=0$, $g_0=m+1$ общий член последней суммы получает значение $\binom{t}{m+1}$. Поэтому, имея в виду, что $g_1, g_2, \ldots, g_s$ положительны и что, следовательно, должно быть $s \leqslant m+1-g_0$, можно написать

$$D(m+1, t) = \binom{t}{m+1} + \sum_{\substack{g_1+g_2+\ldots g_s=m+1-g_0 \\ s=1,2,3,\ldots,m+1-g_0 \\ g_0=1,2,3,\ldots,m}} \binom{t}{g_0} \varphi(g_1, g_2, \ldots, g_s, t).$$

Таким образом,

$$D(m+1,t)=\binom{t}{m+1}+\binom{t}{m}D(1,t)+\binom{t}{m-1}D(2,t)+\ldots+\binom{t}{1}D(m,t).$$

Если мы положим, далее, что

$$D(0,\ t)=1, \qquad (16)$$

то получается следующая рекурсионная формула:

$$D(m+1,t)=\binom{t}{1}D(m,t)+\binom{t}{2}D(m-1,t)+\ldots+\binom{t}{m+1}D(0,t). \qquad (17)$$

Следует заметить, что всегда

$$D(m,\ 1)=1. \qquad (18)$$

Чтобы вычислить отсюда $D(m,\ t)$, нам нужна следующая таблица биномиальных коэффициентов $\binom{t}{m}$.

m/t	1	2	3	4	5	6
0	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6
2		1	3	6	10	15
3			1	4	10	20
4				1	5	15
5					1	6
6						1

Таким образом, получается следующая таблица для $D(m,\ t)$, которую можно пополнить.

m/t	1	2	3	4	5	6
0	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6
2	1	5	12	22	35	51
3	1	12	46	116	235	416
4	1	29	177	613	1 580	3 396
5	1	70	681	3 240	10 626	27 732
6	1	169	2620	17 124	71 460	226 454

С помощью этих таблиц из (13) получаются следующие значения функции $\Phi(m)$:

$$\Phi(1)=1,\quad \Phi(2)=4,\quad \Phi(3)=24,\quad \Phi(4)=196,$$

$$\Phi(5)=2016,\quad \Phi(6)=24\,976.$$

Это суть числа *чистых* двукратных порядковых типов для $m = 1, 2, \ldots, 6$. Если же речь идет о числе *всех* двукратных типов (чистых и смешанных) для заданного кардинального числа m, которое мы обозначим через $\Psi(m)$, то для его вычисления можно пользоваться тем же способом, который применен для вычисления $\Phi(m)$.

Систему уравнений (5) следует теперь решать таким образом, чтобы неизвестные $k_{\mu,\nu}$ получали не только значения 0 и 1, но и любые неотрицательные целочисленные значения.

Вместо функции $\varphi(g_1, g_2, \ldots, g_s, t)$ здесь появляется другая функция, которую мы обозначим через $\psi(g_1, g_2, \ldots, g_s, t)$ и которая определяется равенством:

$$\psi(g_1, g_2, \ldots, g_s, t) = \binom{t+g_1-1}{g_1} \cdot \binom{t+g_2-1}{g_2} \cdot \ldots \cdot \binom{t+g_s-1}{g_s}. \tag{19}$$

Поэтому если под $E(m, t)$ понимать функцию

$$E(m, t) = \sum_{\substack{g_1+g_2+\ldots+g_s=m \\ s=1,2,\ldots,m}} \psi(g_1, g_2, \ldots, g_s, t), \tag{20}$$

то имеем

$$\Psi(m) = \sum_{t=1,2,\ldots,m} (-1)^{m-t} C(m, t) E(m, t). \tag{21}$$

Но между $\Phi(m)$ и $\Psi(m)$ тоже существует простая взаимосвязь, которая непосредственно получается, если вспомнить значения этих чисел. А именно имеют место равенства:

$$\Psi(m) = \Phi(m) + \binom{m-1}{1}\Phi(m-1) + \binom{m-1}{2}\Phi(m-2) + \ldots$$
$$\ldots + \binom{m-1}{m-2}\Phi(2) + \Phi(1), \tag{22}$$

$$\Phi(m) = \Psi(m) - \binom{m-1}{1}\Psi(m-1) + \binom{m-1}{2}\Psi(m-2) + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{m-2}\binom{m-1}{m-2}\Psi(2) + (-1)^{m-1}\Psi(1). \tag{23}$$

Из (22) с помощью уже найденных значений $\Phi(m)$ получаем

$$\Psi(1) = 1,\quad \Psi(2) = 5,\quad \Psi(3) = 33,\quad \Psi(4) = 281,$$
$$\Psi(5) = 2961,\quad \Psi(6) = 37\,277.$$

14. Метод, каким мы получили числа $\Phi(m)$ и $\Psi(m)$ для *двукратных* порядковых типов в п. 13, можно перенести и на любое n.

Обозначим через $\Phi(m, n)$ число *чистых*, а через $\Psi(m, n)$ число *чистых и смешанных* n-кратных порядковых типов кардинального числа m.

В n-кратном типе α единицы упорядочены по n отличающимся друг от друга независимым направлениям, которые мы назвали 1-м, 2-м, ..., ν-м, ..., n-м направлениями.

Пусть $g_{\nu,\mu}$ — число различных единиц, имеющих μ-й ранг по ν-му направлению, а значит, индекс μ получает значения 1, 2, 3, . . . , s_ν.

Все числа s_ν и $g_{\nu,\mu}$ являются *положительными* целыми числами, и для *каждого определенного* $\nu = 1, 2, 3, \ldots, n$ имеем

$$\sum_{\mu=1,2,\ldots,s_\nu} g_{\nu,\mu} = m. \tag{24}$$

Под *характеристикой* типа α мы понимаем систему $s_1, s_2, \ldots, s_n$ чисел

$$(k_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n}), \tag{25}$$

где индекс λ_ν должен принимать значения 1, 2, 3, . . . , s_ν, а $k_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n}$ означает число всех имеющихся в α единиц, которые имеют λ_1 ранг по первому направлению, λ_2 ранг по второму направлению и т. д. Если в α нет таких единиц, то $k_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n}$ получает значение нуль. Если α — *чистый* тип, то величины k получают лишь значения 0 и 1.

Из смысла величин k и g непосредственно получаются равенства

$$\sum_{\substack{\lambda_1=1,2,\ldots,s_1 \\ \lambda_2=1,2,\ldots,s_2 \\ \cdots\cdots \\ \lambda_n=1,2,\ldots,s_n}} k_{\lambda,\lambda_2,\ldots,\lambda_n} = m \tag{26}$$

и

$$\sum k_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\nu,\ldots,\lambda_n} = g_{\nu,\lambda_\nu}, \tag{27}$$

где суммирование производится по всем значениям индексов $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, *за исключением* индекса λ_ν, который при суммировании сохраняет *постоянное значение* последовательности 1, 2, 3, . . . , s_ν.

Система (25) *неотрицательных* целых чисел $k_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n}$ является характеристикой определенного n-кратного типа α *тогда и только тогда*, когда получаемые из них по (26) и (27) суммы m, $g_{\nu,\mu}$ представляют собой *отличные от нуля различные положительные* целые числа.

В дальнейшем рассуждении *первое* из n порядковых направлений играет привилегированную роль и поэтому мы введем для относящихся к нему величин более простые обозначения. Мы полагаем

$$s_1 = s,\ g_{1,1} = g_1,\ g_{1,2} = g_2,\ \ldots,\ g_{1,s} = g_s.$$

Пусть $\varphi'(g_1, g_2, \ldots, g_s, s_2, s_3, \ldots, s_n)$ означает число *чистых* n-кратных типов, для которых величины $s, s_2, \ldots, s_n$ имеют определенные положительные целочисленные значения $\leqslant m$, а $g_1, g_2, \ldots, g_s$ — положительные целочисленные значения, удовлетворяющие определенному равенству

$$g_1 + g_2 + \ldots + g_s = m.$$

Тогда имеем

$$\Phi(m,n)=\sum_{\substack{g_1+g_2+\ldots+g_s=m\\ s=1,2,\ldots,m\\ s_2=1,2,\ldots,m\\ \cdots\cdots\\ s_n=1,2,\ldots m}}\varphi'(g_1,g_2,\ldots,g_s,s_2,s_3,\ldots,s_n). \tag{28}$$

Теперь функцию φ' можно, как и обозначенную в п. 13 тем же знаком функцию, свести к функции $\varphi(g_1, g_2, \ldots, g_s, t)$, определяемой формулой (8). Если мы введем обозначения $s_2=t_1$, $s_3=t_2, \ldots, s_n=t_{n-1}$, то получим равенство

$$\varphi'(g_1,g_2,\ldots,g_s,t_1,t_2,\ldots,t_{n-1})=\sum_{\substack{\mu_1=0,1,\ldots,t_1\\ \mu_2=0,1,\ldots,t_2\\ \cdots\cdots\\ \mu_{n-1}=0,1,\ldots,t_{n-1}}}(-1)^{\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_{n-1}}\binom{t_1}{\mu_1}\times$$

$$\times\binom{t_2}{\mu_2}\cdot\ldots\cdot\binom{t_{n-1}}{\mu_{n-1}}\varphi(g_1,g_2,\ldots,g_s,t). \tag{29}$$

В этой сумме буква t имеет значение $t=(t_1-\mu_1)(t_2-\mu_2)\ldots(t_{n-1}-\mu_{n-1})$. Если ввести это значение в (28), то, заменив $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ на $t_1', t_2', \ldots \ldots, t'_{n-1}$, а t на t', получим

$$\Phi(m,n)=\sum_{\substack{\mu_1=0,1,\ldots,t_1'\\ \mu_2=0,1,\ldots,t_2'\\ \cdots\cdots\\ \mu_{n-1}=0,1,\ldots,t_{n-1}'}}\ \sum_{\substack{g_1+g_2+\ldots+g_s=n\\ s=1,2,\ldots,m\\ t_1'=1,2,\ldots,m\\ \cdots\cdots\\ t_{n-1}'=1,2,\ldots,m}}(-1)^{\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_{n-1}}\binom{t_1'}{\mu_1}\binom{t_2'}{\mu_2}\ldots\binom{t_{n-1}'}{\mu_{n-1}}\times$$

$$\times\varphi(g_1,g_2,\ldots,g_s,t).$$

Здесь $t'=(t_1'-\mu_1)(t_2'-\mu_2)\ldots(t_{n-1}'-\mu_{n-1})$.

Если мы объединим те члены, в которых $t_1'-\mu_1$, $t_2'-\mu_2, \ldots \ldots, t'_{n-1}-\mu_{n-1}$ соответственно имеют значения $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$, то коэффициент при $\varphi(g_1, g_2, \ldots, g_s, (t_1\cdot t_2\cdot\ldots\cdot t_{n-1}))$ получит значение

$$(-1)^{m(n-1)-t_1-t_2-\ldots-t_{n-1}}C(m,t_1)C(m,t_2)\ldots C(m,t_{n-1}).$$

Поэтому, если мы введем функцию

$$C(m,n,t)=\sum_{t_1,t_2,\ldots,t_{n-1}=t}(-1)^{m(n-1)-t_1-t_2-\ldots-t_{n-1}}C(m,t_1)C(m,t_2)\ldots C(m,t_{n-1}), \tag{30}$$

где $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ принимают все положительные целочисленные системы значений, для которых выполняется равенство

$$t_1\cdot t_2\cdot\ldots\cdot t_{n-1}=t \tag{31}$$

вместе с дополнительными условиями

$$t_1\leqslant m,\ t_2\leqslant m,\ \ldots,\ t_{n-1}\leqslant m, \tag{32}$$

то без труда получаем формулу

$$\Phi(m,n) = \sum_{t=1,2,3,\ldots,m^{n-1}} C(m,n,t)\cdot D(m,t). \qquad (33)$$

В случае $n=2$ $C(m, 2, t) = (-1)^{m-t} C(m, t)$, и формула (33) переходит в формулу (31) для $\Phi(m)$.

Аналогично находим, что

$$\Psi(m,n) = \sum_{t=1,2,3,\ldots,m^{n-1}} C(m,n,t)\cdot E(m,t). \qquad (34)$$

Между $\Phi(m, n)$ и $\Psi(m, n)$ также имеют место равенства

$$\Psi(m,n) = \Phi(m,n) + \binom{m-1}{1}\Phi(m-1,n) + \binom{m-1}{2}\Phi(m-2,n) + \ldots$$
$$\ldots + \binom{m-1}{m-2}\Phi(2,n) + \Phi(1,n), \qquad (35)$$

$$\Phi(m,n) = \Psi(m,n) - \binom{m-1}{1}\Psi(m-1,n) + \binom{m-1}{2}\Psi(m-2,n) - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{m-2}\binom{m-1}{m-2}\Psi(2,n) + (-1)^{m-1}\Psi(1,n). \qquad (36)$$

[Примечание]

Первая половина этой статьи является продолжением предыдущей II.2 и имеет целью защиту канторовского понимания актуальной бесконечности против философских и теологических возражений. Напротив, во второй ее половине (начиная с п. 9 из раздела VIII) содержится подробная чисто математическая теория порядковых типов «многократно упорядоченных множеств», в частности конечных. По-видимому, Кантору померещилось какое-то применение этой теории типов, возможно, к физическим теориям материи и эфира. Еще неизвестно, окажутся ли плодотворными эти специальные исследования когда-либо впоследствии.

[1] (к разделу VI). Несуществование «актуально бесконечно малых величин» нельзя доказать в такой же мере, в какой и несуществование канторовских трансфинитов, и в обоих случаях ошибка одна и та же — приписывание новым величинам некоторых свойств обычных «конечных» величин, которыми они могут не обладать. Речь здесь идет о так называемой «неархимедовой» числовой системе, соответственно о «неархимедовом» поле, существование которого сегодня можно считать безупречно доказанным. См.: *Van der Waerden.* Moderne algebra. Kap. X. [103]. В неархимедовом упорядоченном поле, в котором, например, $n\zeta<1$ для всякого конечного целочисленного n, не существует и никакой «верхней грани» γ этих величин $n\zeta$, которую можно было бы обозначить через $\omega\zeta$, так как интервал $(\gamma-\zeta, \gamma)$ может содержать по крайней мере *одну* величину $n\zeta$ и умножение на дальнейшие трансфиниты $\alpha>\omega$ становится беспредметным. Вместе с «архимедовой аксиомой» одновременно падает и «аксиома непрерывности», как это подчеркнуто, например, в «Grundlagen der Geometrie» Гильберта [104]. Является ли некоторое утверждение ак-

сиомой или нет, зависит не от его содержания, а от построения всей системы, от определяющих эту систему основных свойств или аксиом. Тем, что Кантор предполагает справедливой *аксиому непрерывности*, он фактически исключает все неархимедовы числовые системы, но ничего не доказывает против существования таких «упорядоченных полей», в которых не выполняются *ни* архимедова аксиома, *ни* аксиома непрерывности.

4. ОСНОВАНИЯ АРИФМЕТИКИ *

Цель этой книги — предпринять новое исследование оснований арифметики — похвальна, ибо несомненно, что эта ветвь математики, являющаяся базисом всех других математических дисциплин, требует значительно более глубокого анализа ее основных понятий и методов, чем проводившийся, к тому же отчасти, до сих пор. Следует также признать, что автор принял правильную точку зрения, выставив требование о необходимости удаления из арифметических понятий и основных теорем как пространственных, так и временны́х представлений, а также всех психологических моментов. Действительно, только на этом пути можно достичь строго логической чистоты арифметики, а тем самым и оправдать ее, применить как вспомогательное средство к наглядным объектам познания. Значительную часть работы автор посвящает критическому разбору с этой точки зрения предшествующих попыток, направленных на обоснование арифметики. Установки, которые он противопоставляет учениям Канта, Стюарта Милля и других, большей частью правильны и заслуживают внимания. Напротив, менее успешной мне кажется его собственная попытка строгого обоснования понятия числа. А именно автор исходит из неудачной мысли — в этом он, по-видимому, следует указанию Ибервега (System der Logik, § 53) [2] — взять за основу понятия числа то, что называется «объемом понятия». Он совершенно просмотрел, что «объем понятия» представляет собой нечто совершенно неопределенное в количественном отношении. Только в некоторых случаях «объем понятия» является количественно определенным, и тогда ему соответствует, разумеется, определенное число, если он конечен, и определенная мощность, если он бесконечен. Но для такого количественного определения «объема понятия» должны быть заданы заранее и по-другому понятия «числа» и «мощности», и *извращением истины* является стремление обосновать последние на «объеме понятия». Если это положение вещей ускользнуло от автора, это можно определенно приписать тому обстоятельству, что его принципиальная ошибка оказалась запрятанной в одеянии его очень тонких различений. Поэтому я не считаю правильным высказанное автором в § 85 мнение, будто то, что я называю «мощностью», совпадает с тем, что он называет «числом». «Мощностью

* Die Grundlagen der Arithmetik: Rez. der Schrift von G. Frege «Die Grundlagen der Arithmetik». Breslau, 1884.— Dt. Literaturzeitung, 1885, N 20, S. 728—729. Перевод Ф. А. Медведева [1].

совокупности или множества элементов» (причем последние могут быть однородными или неоднородными, простыми или составными) я называю то общее понятие, под которое подпадают все множества, эквивалентные заданному, и только они. При этом два множества называются «эквивалентными», если их можно взаимно однозначно и поэлементно отобразить друг на друга. Нечто другое представляет собой то, что я называю «числом» или «порядковым числом». Я приписываю его только «вполне упорядоченным множествам» и при этом под «числом или порядковым числом вполне упорядоченного множества» понимаю то общее понятие, под которое подпадают все вполне упорядоченные множества, *подобные* заданному, и только они. «Подобными» же я называю два вполне упорядоченных множества, если их можно отобразить друг на друга взаимно однозначно и поэлементно с сохранением заданного следования элементов с обеих сторон. Для *конечных* множеств эти два момента — «мощность» и «число» — до некоторой степени совпадают, так как конечное множество при всяком расположении его элементов является «вполне упорядоченным множеством» и имеет одно и то же порядковое число. Напротив, у *бесконечных* множеств различие между «мощностью» и «порядковым числом» выступает самым резким образом, как это было показано в моей работе «Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre» (Leipzig, 1883). То, что автор высказал против моего использования слова «число», мало обосновано. Он опирается на обиходное словоупотребление, которое вообще не годится для фиксирования научных понятий. Однако в данном случае, когда это слово относится только к конечным множествам, оно вряд ли может повредить, так как выше понятие числа я уточнил.

[Примечание]

Кантор в своей рецензии лишь отчасти прав в отношении работы Фреге, теперь признаваемой все больше и больше и, по крайней мере по мнению автора, представляющей собой наилучшее и самое прозрачное из того, что вообще появлялось до сих пор по рассматриваемой в ней проблеме числа. Под «числом» Фреге в действительности понимает то же самое, что Кантор называет «кардинальным числом», а именно инвариант, общий всем эквивалентным (Фреге говорит «равночисленным») друг другу множествам (Фреге говорит «понятиям»). Только Фреге идентифицирует этот инвариант классов с «объемом понятия: равночисленно понятию *F*». Однако этот объем понятия есть не что иное, как некий логический «класс», как раз класс эквивалентных *F* «множеств» или «понятий». Этот класс, следовательно, отнюдь не должен быть обязательно «количественно определимым», ибо предикат «число» следует относить не к нему, а к самому понятию *F*. Разумеется, введение «объема понятия» могло иметь свои недостатки и давать повод сомнениям, с чем соглашался и Фреге, но это по существу неважно и критика Кантора основывается здесь, по-видимому, на недоразумении. С другой стороны, Кантор, конечно, имел право ввести *свое* понятие числа как порядкового типа *для трансфинитных* множеств, которые Фреге совсем не рассматривал. Нам теперь остается лишь поражаться и сожалеть, что, как показывает эта рецензия, два современника — великий математик и заслуженный логик — столь мало понимали друг друга.

ДОПОЛНЕНИЯ

ПЕРЕПИСКА КАНТОРА С ДЕДЕКИНДОМ * [1]

I–VIII
Письма Кантора 1872—1873 гг.

I.

Галле на З., 28 апреля 1872 г.

Искренне благодарю Вас за Вашу работу о непрерывности и иррациональных числах [2]. Как я теперь смог убедиться, точка зрения, к которой я пришел несколько лет тому назад, отправляясь от занятий арифметикой, фактически совпадает с Вашими взглядами; имеется различие лишь в способе введения числовых величин. Я вполне убежден, что Вы правильно выявили сущность непрерывности.

II.

Галле, 29 ноября 1873 г.

Позвольте предложить Вам вопрос, имеющий для меня некоторый теоретический интерес, на который я, однако, не могу ответить. Возможно, Вы сумеете это сделать и любезно напишете мне. Речь идет вот о чем.

Возьмем совокупность всех целых положительных индивидов n и обозначим ее через (n). Затем рассмотрим совокупность всех действительных положительных числовых величин и обозначим ее через (x). Тогда возникает вопрос: можно ли сопоставить (n) с (x) так, чтобы каждому индивиду одной совокупности соответствовал один и только один индивид другой. На первый взгляд кажется, что это невозможно, так как (n) состоит из дискретных частей, тогда как (x) образует континуум. Однако это возражение ничего не дает, и как бы я ни был склонен думать, что между (n) и (x) невозможно однозначное соответствие [3], я тем не менее не могу найти основание для этого, хотя оно, возможно, просто и именно оно занимает меня.

Не столь ли соблазнительно было бы заключить, что (n) нельзя поставить в однозначное соответствие с совокупностью (p/q) всех рациональных чисел p/q? И тем не менее нетрудно доказать, что (n) можно поставить в однозначное соответствие не только с этой совокупностью,

---

* Briefwechsel Cantor — Dedekind/Hrsg. von E. Noether, J. Cavaillès. Paris: Hermann, 1937. Перевод Ф. А. Медведева.

но и с более общей совокупностью

$$(a_{n_1,n_2,\ldots,n_\nu}),$$

где n_1, n_2, ..., n_ν — любое число ν неограниченных целых положительных индексов.

III.

Галле, 2 декабря 1873 г.

Я был очень счастлив, получив сегодня Ваш ответ на мое последнее письмо. Мой вопрос я поставил перед Вами потому, что он возник у меня уже несколько лет тому назад и я все время интересовался, имеет ли встреченная мною трудность субъективную природу или же она заключена в самой проблеме. Поскольку Вы говорите мне, что и Вы не в состоянии ответить на него, то я могу предположить, что верна как раз вторая возможность. Впрочем, хотел бы добавить, что я никогда не занимался этим всерьез, поскольку не видел для себя практического интереса, и я вполне разделяю Ваше мнение, когда Вы говорите, что поэтому-то данная проблема не заслуживает того, чтобы уделять ей много внимания. Тем не менее было бы хорошо решить ее: если бы, например, ответ был *отрицательным*, то тем самым мы получили бы новое доказательство теоремы Лиувилля, в которой утверждается существование трансцендентных чисел [4].

Ваше доказательство того факта, что (n) может быть поставлена в однозначное соответствие с полем алгебраических чисел, является почти тем же, при помощи которого я доказывал мое утверждение в последнем письме. Я полагаю $n_1^2+n_2^2+\ldots=N$ и затем упорядочиваю элементы.

Разве не хорошо само по себе и не удобно то, что, как Вы правильно подчеркнули, можно говорить об n-м алгебраическом числе таким образом, что каждое из них фигурирует в последовательности один раз?

Как Вы вполне справедливо отметили, наш вопрос можно сформулировать так: «Можно ли (n) поставить в однозначное соответствие с совокупностью

$$(a_{n_1,n_2,\ldots}),$$

где n_1, n_2, ... — неограниченные целые положительные индексы, число которых бесконечно?»

IV.

Галле, 7 декабря 1873 г.

В последние дни у меня оказалось время более тщательно изучить то предположение, о котором я говорил Вам. Только сегодня я покончил, как мне кажется, с этим делом. А чтобы потом не разочаровываться, я решил, что не найду более снисходительного судьи, чем Вы. Поэтому позволю себе представить на Ваше суждение то, что я набросал на бумаге во всем несовершенстве этой первой попытки.

Допустим, что можно расположить все положительные числа $\omega<1$ в последовательность

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \ldots,\ \omega_n,\ \ldots \qquad (I)$$

Пусть после ω_1 первым бо́льшим членом этой последовательности будет ω_α, после него первым бо́льшим будет ω_β и т. д. Полагаем $\omega_1=\omega_1{}^1$, $\omega_\alpha=\omega_1{}^2$, $\omega_\beta=\omega_1{}^3$ и т. д. и извлекаем из (I) бесконечную последовательность

$$\omega_1{}^1,\ \omega_1{}^2,\ \ldots,\ \omega_1{}^n,\ \ldots$$

Пусть в оставшейся последовательности $\omega_2{}^1$ будет первым членом, $\omega_2{}^2$ — первым бо́льшим из следующих за $\omega_2{}^1$ членов и т. д., и извлекаем из нее 2-ю последовательность

$$\omega_2{}^1,\ \omega_2{}^2,\ \ldots,\ \omega_2{}^n,\ \ldots$$

Продолжая таким образом, мы видим, что последовательность (I) может быть разложена на бесконечно много последовательностей:

$$\omega_1^1,\ \ \omega_1^2,\ \ \omega_1^3,\ldots,\ \ \omega_1^n,\ldots, \qquad (1)$$
$$\omega_2^1,\ \ \omega_2^2,\ \ \omega_2^3,\ldots,\ \ \omega_2^n,\ldots, \qquad (2)$$
$$\omega_3^1,\ \ \omega_3^2,\ \ \omega_3^3,\ldots,\ \ \omega_3^n,\ \ldots \qquad (3)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

и в каждой из них члены возрастают слева направо. Так что имеем

$$\omega_k^\lambda<\omega_k^{\lambda+1}.$$

Выбираем теперь интервал $(p\ \ldots\ q)$ так, чтобы в нем не содержалось ни одного элемента последовательности (I); можно, например, взять $(p\ \ldots\ q)$ внутри интервала $(\omega_1{}^1\ \ldots\ \omega_1{}^2)$. Тогда может случиться, что все члены второй или третьей последовательности окажутся вне $(p\ldots q)$, но должна существовать, скажем, k-я последовательность, не все члены которой находятся вне $(p\ldots q)$ (ибо если это не так, то числа, содержащиеся в $(p\ \ldots\ q)$, не содержались бы в (I), вопреки предположению). Но тогда внутри $(p\ldots q)$ можно определить такой интервал $(p'\ldots q')$, что все члены k-й последовательности будут находиться вне него. Этот $(p'\ldots q')$ ведет себя по отношению к предыдущим последовательностям, очевидно, так же. Однако среди остальных последовательностей найдется k'-я, не все члены которой находятся вне $(p'\ \ldots\ q')$, и тогда внутри $(p'\ldots q')$ выбираем третий интервал $(p''\ldots q'')$ такой, что все члены k'-й последовательности будут находиться вне этого интервала.

Таким образом, мы видим, что можно построить бесконечную последовательность интервалов

$$(p\ldots q),\ (p'\ldots q'),\ (p''\ldots q''),\ \ldots,$$

каждый из которых содержит следующие. Эти интервалы ведут себя по отношению к нашим последовательностям (1), (2), (3), ... следующим образом:

члены 1-й, 2-й, ..., k-й последовательности расположены вне $(p \dots q)$;

члены последовательностей от k-й до $(k'-1)$-й расположены вне $(p' \dots q')$;

члены последовательностей от k'-й до $(k''-1)$-й расположены вне $(p'' \dots q'')$.

Но всегда существует *по крайней мере* одно число, обозначаемое мною через η и содержащееся во всех этих интервалах. Очевидно, что это число $\eta \gtrless {0 \atop 1}$ и не может принадлежать ни одной из наших последовательностей (1), (2), ..., (n), ... Итак, исходя из допущения, что все числа $\gtrless {0 \atop 1}$ содержатся в (I), мы пришли к тому противоположному результату, что некоторое определенное число $\eta \gtrless {0 \atop 1}$ не принадлежит (I); следовательно, это допущение некорректно.

Следовательно, я полагаю, что установлена, наконец, причина, по которой совокупность, обозначенная мною через (x) в предыдущих письмах, не может быть поставлена в однозначное соответствие с совокупностью, обозначенной через (n).

V.

Галле, 9 декабря 1873 г.

Для доказанной недавно теоремы я нашел теперь более простое доказательство, в котором не требуется разложение последовательности (I) в (1), (2), (3).

Исходя из последовательности

$$(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots),$$

я непосредственно показываю, что во *всяком* заданном интервале $(\alpha \dots \beta)$ можно определить число η, не принадлежащее (I). Этого достаточно, чтобы вывести отсюда то заключение, что совокупность (x) не может быть поставлена в однозначное соответствие с совокупностью (n). Отсюда я заключаю, что между совокупностями и множествами значений имеются существенные различия.

Прошу Вас извинить меня за то, что отнял у Вас столько времени этим вопросом.

VI.

Галле, 10 декабря 1873 г.

Подтверждая получение Ваших дружеских строк от 8 декабря, хочу уверить Вас, что ничто не может доставить мне большей радости, чем тот интерес к некоторым вопросам анализа, который мне удалось пробудить у Вас. Позвольте добавить также, что ничто не может в большей степени побудить мои дальнейшие усилия, и прошу Вас не оставлять меня без Ваших замечаний в будущем. Не приведет ли к интересным результатам в Вашей теории алгебраических чисел их представление в форме $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots$?

VII.

Берлин, 25 декабря 1873 г.

Хотя я не намеревался пока публиковать что-либо по вопросу, недавно впервые обсужденному с Вами, мне пришлось неожиданно сделать это. Мои результаты я сообщил 22 декабря г-ну Вейерштрассу, но тогда не хватило времени поговорить об этом подробно. 23 декабря я был очень обрадован его визитом, что позволило мне сообщить ему доказательство. Он посоветовал опубликовать это, принимая во внимание, что речь идет об алгебраических числах. Тогда я написал небольшую статью под названием «Об одном свойстве совокупности всех действительных алгебраических чисел» и послал ее г-ну профессору Борхардту, чтобы он рассмотрел возможность опубликования ее в «J. reine und angew. Math.» [5].

При редактировании этой статьи, как Вы увидите, оказались очень полезными Ваши замечания и Ваш способ выражений. Именно об этом я и хотел поставить Вас в известность.

VIII.

Берлин, 27 декабря 1873 г.

В последнее время привычка писать Вам сделалась столь естественной, что мои ответы ложатся на бумагу без особых раздумий и я почти забываю мотивировать их и извиняться за их частоту. Возможно, это связано со сходством наших интересов и вызвано тем, что мы в одинаковой мере заботимся о развитии науки ко всеобщему благу.

То, что я придал ограниченный характер опубликованной статье, объясняется отчасти условиями, господствующими здесь, о которых я, возможно, когда-либо расскажу Вам. Но, с другой стороны, я полагаю, что сначала целесообразно применить мое рассуждение в частном случае (вроде случая действительных алгебраических чисел). Возможные обобщения, — а я сумел найти их несколько, — уже не могут составить большого труда; сделаю ли это я или кто другой, это несущественно. Поэтому я, после краткого введения, написал два параграфа. В первом доказывается, что совокупность действительных алгебраических чисел можно поставить в однозначное соответствие с совокупностью целых положительных чисел; во втором устанавливается, что если задана последовательность $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots$, то во всяком числовом интервале можно определить числа η, не содержащиеся в этой последовательности.

IX—XV
Замечания Дедекинда о письмах Кантора 1873 г. [6]

IX.

29.11.1873 г.

Г-н Г. Кантор (Галле) поставил передо мной следующий вопрос: можно ли совокупность (n) всех целых положительных чисел (натураль-

ных чисел) поставить в соответствие с совокупностью (x) всех действительных положительных числовых величин так, чтобы индивиду одной совокупности соответствовал один и только один индивид другой? Он заключает такими словами: «Не столь ли соблазнительно было бы заключить, что (n) нельзя поставить в однозначное соответствие с совокупностью (p/q) всех рациональных чисел p/q? И тем не менее нетрудно доказать, что (n) можно поставить в однозначное соответствие, не только с этой совокупностью, но и с более общей совокупностью

$$(a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_\nu}),$$

где $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$ — любое число ν неограниченных целых положительных индексов».

С обратным курьером я ответил, что ответа на первый вопрос я не знаю, но одновременно сформулировал и полностью доказал, что даже совокупность всех алгебраических чисел может быть поставлена в соответствие указанным образом с совокупностью (n) натуральных чисел (некоторое время спустя эта теорема и ее доказательство были почти буквально воспроизведены с применением специального термина «высота», в статье Кантора, появившейся в журнале Крелле, т. 77, но с тем отличием — вопреки моему совету, — что рассмотрена лишь совокупность *действительных* алгебраических чисел). Однако высказанное мною мнение, что первый вопрос не заслуживает того, чтобы уделять ему много труда, поскольку он не представляет никакого практического интереса, было решительно опровергнуто данным Кантором доказательством существования трансцендентных чисел (J. reine und angew. Math., vol. 77) [7].

X.

2.12.1873

К. настаивает на важности первого вопроса, так как в случае отрицательного ответа было бы другим способом доказано существование трансцендентных чисел. Он продолжает: «Ваше доказательство того факта, что (n) может быть поставлена в однозначное соответствие с полем алгебраических чисел, является почти тем же, при помощи которого я доказываю мое утверждение в последнем письме. Я полагаю $n_1^2 + n_2^2 + \ldots = N$ и затем упорядочиваю элементы. Разве не хорошо само по себе и не удобно то, что, как Вы правильно подчеркнули, можно говорить об n-м алгебраическом числе таким образом, что каждое из них фигурирует в последовательности один раз? Как Вы вполне справедливо отметили, наш вопрос можно сформулировать так: «можно ли (n) поставить в однозначное соответствие с совокупностью

$$(a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots),$$

где $n_1, n_2, \ldots$ — неограниченные целые положительные индексы, число которых бесконечно?»

XI.

7.12.1873

Кантор сообщил мне строгое доказательство, которое он нашел сегодня, теоремы, согласно которой совокупность всех положительных чисел $\omega < 1$ *не может* быть поставлена в однозначное соответствие с совокупностью (n).

На это письмо, полученное 8 декабря, я ответил в тот же день поздравлением с замечательным успехом, одновременно значительно упростив ядро доказательства (которое было довольно сложным). Это изложение тоже почти дословно перенесено в канторовскую статью (J. reine und angew. Math., vol. 77), однако в соответствующем месте исключен примененный мною оборот «по принципу непрерывности» (с. 261, строки 10—14)! [8].

XII.

9.12.1873

Кантор поспешно написал мне, что он нашел более простое доказательство. Поскольку он не упоминает моего письма, то, видимо, он получил его позднее.

XIII.

10.12.1873

Кантор подтвердил получение моего письма от 8 декабря, не упомянув содержавшееся в нем упрощенное изложение доказательства; он благодарит меня за интерес к этому делу.

XIV.

25.12.1873

Кантор пишет (из Берлина), что он подготовил (по рекомендации Вейерштрасса) небольшую статью под названием «Об одном свойстве совокупности всех действительных алгебраических чисел». «При редактировании этой статьи, как Вы увидите, оказались очень полезными Ваши замечания и Ваш способ выражений».

С обратным курьером я отвечаю, посоветовав ему отбросить ограничение на поле алгебраических чисел быть *действительными.*

XV.

27.12.1873

Кантор пишет (из Берлина): «То, что я придал ограниченный характер опубликованной статье, объясняется отчасти условиями, господствующими здесь, о которых я, возможно, когда-либо расскажу Вам. Но, с другой стороны, я полагаю, что сначала целесообразно применить мое рассуждение в частном случае (вроде случая действительных алгебраических чисел)».

Я не получил разъяснения относительно «берлинских условий». В последующем мы уже не возвращались к этой статье (J. reine und angew. Math., vol. 77).

XVI.
Кантор — Дедекинду

Галле, 5 января 1874 г.

Кстати, среди вопросов, занимающих меня в последнее время, содержится и следующий:

Можно ли некоторую поверхность (например, квадрат, включая границы) поставить в однозначное отношение с кривой (например, с прямолинейным отрезком, содержащим концы) таким образом, что всякой точке поверхности соответствует точка кривой и, обратно, всякой точке кривой соответствует точка поверхности?

Пока мне кажется, что ответ на этот вопрос представляет большие трудности, хотя и здесь настолько склонны давать *отрицательный* ответ, что доказательство считается почти излишним.

XVII.
Кантор — Дедекинду

Галле, 28 января 1874 г.

В «Докладах» за прошлый год я нашел статью Эрмита, в которой с превеликим искусством в использовании анализа излагается метод одновременного разложения n экспоненциальных величин $e^{ax}, e^{bx}, \ldots, e^{nx}$ и, что более важно, автор основывает на нем вполне строгое доказательство трансцендентности числа e. Эрмит признался, что он много занимался доказательством трансцендентности π, но он отказался от этого числа, заметив, что он был бы очень рад, если бы это удалось кому-либо другому [9].

XVIII.
Кантор — Дедекинду

Галле, 18 мая 1874 г.

Испытывая потребность встретиться с Вами на научной почве и установить более тесные личные связи, я хотел бы посетить Вас в Брауншвейге этим летом.

...Если Вы соблаговолите ответить мне на это предложение, то я постараюсь узнать, видите ли Вы в вопросе, поставленном мною в январе о соответствии между поверхностью и линией, ту же самую трудность, что и я, или же я впал в ошибку в связи с этим вопросом. В Берлине, мой друг, где я доложил об этой трудности, мне заявили, что эта вещь представляет собой некий абсурд, так как само собой разумеется, что две переменные не могут быть сведены к одной.

XIX.
Дедекинд — Кантору

...Возражение господина И., которое Вы сообщили мне, не может, если я правильно его понял, относиться к моему изложению. Принцип

непрерывности, изложенный в § 3, с. 18, не должен, естественно, пониматься как необходимое *дополнение* законов I, II, III, изложенных в § 2, с. 15, а в II речь идет в точности о том, об отсутствии чего Вы или господин И., кажется, сожалеете. Это возражение, вероятно, не было бы сделано, если бы я поставил номер IV перед принципом на с. 18, как это фактически сделано для аналогичных законов в § 5, с. 25. Или я плохо понял возражение? Тогда соблаговолите разъяснить мне это [10].

Брауншвейг, 11 мая 1877 г.

XX.
Кантор — Дедекинду

Галле, 17 мая 1877 г.

*Горячо благодаря Вас за Ваш ответ, должен признаться, что изло*женные на с. 25 Вашей работы об иррациональных числах свойства под номерами I, II, III и IV полностью характеризуют область всех действительных чисел и таковы, что *никакая* другая система значений действительных чисел не может обладать всеми этими свойствами.

Позвольте, однако, сделать мне следующее замечание. Не может ли то ударение, которое Вы явно ставите в различных местах Вашей работы на свойстве IV как составляющем *сущность* непрерывности, дать повод для недоразумений, которые, по моему мнению, не могли бы возникнуть в связи с Вашей теорией, если бы не это подчеркивание свойства IV (как составляющего саму сущность)? В частности, в предисловии Вы говорите, что аксиома, указанная мною, по существу эквивалентна аксиоме, изложенной Вами в § 3 как выражение сущности непрерывности. Однако под этим Вы понимаете то же самое свойство, которое на с. 25 дается под номером IV; но это свойство принадлежит и системе всех целых чисел, которые, тем не менее, можно рассматривать как прототип разрывности.

В интересах дела, которое дорого и мне, прошу Вас найти время проверить подетальнее мои оговорки.

P. S. Я следующим образом объясняю, почему Вы особенно настаиваете на IV: именно в этом свойстве заключается то, что отличает полную область чисел от области рациональных чисел; и все же по указанным выше причинам не следует приписывать свойству IV используемого Вами наименования «сущность непрерывности».

XXI.
Дедекинд — Кантору

После Вашего последнего письма мне кажется, что нам угрожает риск спора скорее о словах, чем о вещах. Всякий внимательный читатель моей работы определенно поймет мое мнение о непрерывности следующим образом: области, элементы которых сопоставляются и пополняются в форме, выраженной свойствами I и II из § 1, с. 14, § 2, с. 15, § 5, с. 25 (III является следствием I и добавляется лишь для того, что-

бы подготовить IV), еще не обязательно являются непрерывными областями; такие области приобретают свойство непрерывности присоединением свойства IV (с. 18 без номера и с. 25) и только этого свойства [11]. И именно поэтому данное свойство названо сущностью непрерывности.

В открытке от 10 мая Вы утверждаете, что мое определение непрерывности неполно и предлагаете некое улучшение, чтобы устранить этот дефект. В ответе я отвергаю это предложение, обратив Ваше внимание на II, содержащее то, об отсутствии чего Вы сожалеете. После этого в Вашем последнем письме Вы согласились с тем, что в моем определении фактически ничего не опущено. Когда я говорю, например: «Области, обладающие свойствами I и II, называются непрерывными, если они обладают и свойством IV», то Вы нисколько не возражаете (если я правильно понял Ваше последнее письмо) против *полного характера* такого утверждения. Однако Вы, по-видимому, предпочитаете, чтобы свойство II из относительного предложения стало условным предложением: «Области, элементы которых сопоставляются в соответствии с I, называются непрерывными, если они одновременно обладают свойствами II и IV», опасаясь, что ударение, поставленное мною только на IV как *свойстве*, выражающем *сущность* непрерывности, может привести к недоразумениям. Я не разделяю этого опасения и твердо убежден, что всякий внимательный читатель моей работы поймет, что моей точкой зрения является та, которую я выразил выше, а тогда Ваш пример системы всех целых рациональных чисел нисколько не противоречит ей. Что касается указанной выше модификации определения, то не могу сказать, что оно мне нравится, а из Вашего постскриптума я заключаю, что сами Вы пытаетесь лишь *переделать* мою работу в этом смысле, определенно соглашаясь со мной, что работа, имеющая главным предметом восхождение от арифметики рационального к иррациональному, проиграла бы, если бы ослабили то, что является ее специфическим моментом, состоящим как раз в выделении IV, ибо II уже есть у рациональной области, в разрывном. Но если кто-либо предпочитает преобразованное определение, то я не имею абсолютно никаких возражений против *законности* такого метода, особенно если это дает преимущества в некоторых исследованиях; однако моя первоначальная формулировка мне нравится значительно больше, и я считаю более предпочтительным в отношении сути непрерывности выделять только IV и рассматривать свойство II раньше — до того как пойдет речь о непрерывности или разрывности. Во всяком случае я решительно оспариваю *необходимость* этого преобразования определения. Если же в самом деле ратовать за это, то можно было бы поставить и вопрос, которым я уже занимался: не целесообразно ли, насколько это возможно, и свойство I сделать условным, а не относительным? Этот вопрос небезынтересен, но это увело бы меня слишком далеко от того, о чем речь идет теперь. Я действительно считаю, что мы расходимся в мнениях самое большее в том, что лучше, а не в том, что необходимо, а значит, если мы продолжим спор, то не добьемся многого.

Брауншвейг, 18 мая 1877 г.

XXII.
Кантор — Дедекинду

Галле, 20 июня 1877 г.

Выражая Вам благодарность за письмо от 18 мая, с которым я полностью согласен, и признавая, что наши разногласия чисто поверхностны, я вновь обращаюсь к Вам с просьбой. Вы видите, что связывающие нас теоретические интересы невыгодны для Вас тем, что я докучаю Вам, быть может, чаще, чем Вы желали бы.

Я хотел бы узнать, считаете ли Вы арифметически строгим примененный мною метод доказательства?

Речь идет о том, чтобы показать, что непрерывные поверхности, объемы и даже многообразия ρ измерений могут быть поставлены в однозначное соответствие с непрерывными кривыми, а значит с многообразиями *одного* измерения, что, следовательно, поверхности, объемы, многообразия ρ измерений имеют ту же самую мощность, что и кривые. Это мнение кажется противоположным общепринятому среди представителей новой геометрии, согласно которому говорят о просто, дважды, трижды, ...ρ-кратно бесконечных многообразиях; иногда представляют вещи даже так, как если бы бесконечность точек у поверхности получалась в некотором роде возведением в квадрат, а у куба — в куб бесконечности точек у линии.

Поскольку многообразия одинакового числа измерений могут быть переведены друг в друга *аналитически*, то, как мне кажется, можно поставить более общие вопросы, которые я выражаю в следующей чисто арифметической форме:

«Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_\rho$ будут ρ независимыми действительными величинами, каждая из которых может принимать все значения $\geqslant 0$ и $\leqslant 1$. Пусть y—$(\rho+1)$-я действительная переменная величина с той же областью изменения $\left(y \begin{matrix} \geqslant 0 \\ \leqslant 1 \end{matrix}\right)$.

Можно ли тогда поставить в соответствие ρ величин $x_1, x_2, \ldots, x_\rho$ единственной величине y так, чтобы всякой системе определенных значений $(x_1, x_2, \ldots, x_\rho)$ соответствовало определенное значение y и обратно, каждому определенному значению y соответствовала одна и только одна определенная система значений $(x_1, x_2, \ldots, x_\rho)$?»

Как мне кажется, на этот вопрос следует ответить *утвердительно, хотя на протяжении ряда лет я придерживался противоположного мнения*. Основания для этого таковы.

Всякое число $x \begin{matrix} \geqslant 0 \\ \leqslant 1 \end{matrix}$ может быть единственным образом представлено в форме бесконечной десятичной дроби, скажем

$$x = \alpha_1 \cdot \frac{1}{10} + \alpha_2 \cdot \frac{1}{10^2} + \ldots + \alpha_\nu \cdot \frac{1}{10^\nu} + \ldots,$$

где α_ν — целые числа $\geqslant 0$ и $\leqslant 9$. Таким образом, всякое число x определяет бесконечную последовательность $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ и наоборот.

Мы можем, следовательно, написать

$$x_1 = \alpha_{1,1}\cdot\frac{1}{10} + \alpha_{1,2}\cdot\frac{1}{10^2} + \ldots + \alpha_{1,\nu}\cdot\frac{1}{10^\nu} + \ldots$$

$$x_2 = \alpha_{2,1}\cdot\frac{1}{10} + \alpha_{2,2}\cdot\frac{1}{10^2} + \ldots + \alpha_{2,\nu}\cdot\frac{1}{10^\nu} + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_\rho = \alpha_{\rho,1}\cdot\frac{1}{10} + \alpha_{\rho,2}\cdot\frac{1}{10^2} + \ldots + \alpha_{\rho,\nu}\cdot\frac{1}{10^\nu} + \ldots$$

Из этих ρ чисел можно получить $(\rho+1)$-е число y:

$$y = \beta_1\cdot\frac{1}{10} + \beta_2\cdot\frac{1}{10^2} + \ldots + \beta_\nu\cdot\frac{1}{10^\nu} + \ldots,$$

где положено

$$\begin{aligned} &\beta_{(n-1)\rho+1} = \alpha_{1,n}; \quad \beta_{(n-1)\rho+2} = \alpha_{2,n}; \ \ldots \\ &\beta_{(n-1)\rho+\sigma} = \alpha_{\sigma,n}; \quad \ldots\ \beta_{(n-1)\rho+\rho} = \alpha_{\rho,n}. \end{aligned} \qquad (1)$$

Поскольку всякое целое положительное число ν может быть единственным образом представлено в виде

$$\nu = (n-1)\rho + \sigma, \quad \text{где } \sigma \begin{matrix} > 0 \\ \leqslant \rho \end{matrix},$$

то мы видим, что последовательность $\beta_1, \beta_2, \ldots$, а значит и y, полностью определяется равенствами (1); но и обратно, если мы исходим из числа y, а значит, из последовательности $\beta_1, \beta_2, \ldots$, то однозначно определяются ρ последовательностей

$$\begin{matrix} \alpha_{1,1}, \ \alpha_{1,2}, \ \ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{\sigma,1}, \ \alpha_{\sigma,2}, \ \ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{\rho,1}, \ \alpha_{\rho,2}, \ \ldots \end{matrix}$$

а следовательно, и ρ чисел $x_1, x_2, \ldots, x_\rho$.

XXIII.
Дедекинд — Кантору

Единственным возражением, которое я пока смог выставить против Вашей интересной аргументации и которое Вы, возможно, обойдете без труда, является следующее. Вы пишите: «Всякое число x ($\geqslant 0$ и $\leqslant 1$) может быть представлено единственным образом в форме *бесконечной* десятичной дроби, так что

$$x = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \ldots + \frac{\alpha_\nu}{10^\nu} + \ldots,$$

где α_ν — целые числа $\geqslant 0$ и $\leqslant 9$. Таким образом, всякое число x определяет бесконечную последовательность $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ и наоборот». Тот факт,

что Вы подчеркнули слово *«бесконечной»*, заставляет меня предположить, что Вы исключаете случай конечной дроби, т. е. такой, что после отличной от нуля α_ν следуют лишь цифры $\alpha_{\nu+1}=\alpha_{\nu+2}=\text{etc}=0$, и требуете вместо

$$x=\frac{\alpha_1}{10}+\frac{\alpha_2}{10^2}+\ldots+\frac{\alpha_\nu}{10^\nu}+\frac{0}{10^{\nu+1}}+\frac{0}{10^{\nu+2}}+\ldots+\frac{0}{10^{\nu+\nu'}}+\ldots$$

писать всегда

$$x=\frac{\alpha_1}{10}+\frac{\alpha_2}{10^2}+\ldots+\frac{\alpha_\nu}{10^\nu}+\frac{9}{10^{\nu+1}}+\frac{9}{10^{\nu+2}}+\ldots+\frac{9}{10^{\nu+\nu'}}+\ldots,$$

исключая таким образом всякую возможность двоякого представления одного и того же числа x (тем не менее, само число $x=0$ было бы представлено в форме 0,0000 ..., а $x=3/4$ – в форме 0,2999 ...).

Если Ваше мнение таково(можно было бы, естественно, исключить и случай, когда начиная с некоторого ранга, появляется лишь цифра 9, но следствия будут теми же самыми), то мое возражение состоит в следующем [12]. Для простоты ограничиваюсь случаем $\rho=2$ и полагаю

$$x=\frac{\alpha_1}{10}+\frac{\alpha_2}{10^2}+\ldots=0,\alpha_1,\alpha_2,\ldots a_\nu\ldots,$$

$$y=\frac{\beta_1}{10}+\frac{\beta_2}{10^2}+\ldots=0,\beta_1\beta_2\ldots\beta_\nu\ldots;$$

как и Вы, исходя из этих двух чисел x, y, я образую третье число

$$z=0,\ \gamma_1\gamma_2\gamma_3\ldots,$$

где

$$\gamma_1=\alpha_1,\quad \gamma_2=\beta_1,\quad \gamma_3=\alpha_2,\quad \gamma_4=\beta_2,\ \ldots,\ \gamma_{2\nu-1}=\alpha_\nu,\quad \gamma_{2\nu}=\beta_\nu,\ \ldots,$$

так, что z является вполне определенной функцией двух непрерывных переменных x и y, содержащихся в одном и том же интервале ($0\leqslant\tau\leqslant 1$). Но тогда имеется бесконечно много правильных дробей, которым z *никогда* не будет равна, например

$$0{,}4783105070\,90\alpha_7 0\alpha_8 0\alpha_9 0\ldots\alpha_\nu 0\ldots,$$

а также всякая дробь $0,\ \gamma_1\gamma_2\gamma_3\ldots$, у которой, начиная с определенного места, всегда или $\gamma_{2\nu-1}$, или $\gamma_{2\nu}$ равны 0, и если бы, обратно, мы захотели получить значение x и y из таких z, то мы пришли бы к отсутствующему (исключенному) значению x или y.

Не знаю, существенно ли мое возражение для Вашей идеи, однако я не захотел воздержаться от него.

Брауншвейг, 22 июня 1877 г.

XXIV.
Кантор — Дедекинду

(открытка с почтовым штемпелем 23.6.77)

К сожалению, Ваше возражение совершенно правильно; к счастью, оно относится только к доказательству, а не к самому факту. Действи-

тельно, я доказываю *в некотором смысле больше*, чем хотел доказать, поскольку систему $x_1, x_2, \ldots, x_\rho$ действительных переменных ($\geqslant 0$ и $\leqslant 1$) я без какого-либо ограничения ставлю в однозначное соответствие с переменным y, содержащемся в том же интервале и принимающем там все значения, за исключением некоторых из них y''; но значения y', которое оно принимает фактически, оно принимает *только один раз*, и это мне кажется существенным. Действительно, тогда я могу поставить y' в однозначное отношение с некоторой другой величиной t, принимающей все значения $\geqslant 0$ и $\leqslant 1$.

XXV.
Кантор — Дедекинду

Галле, 25 июня 1877 г.

В открытке, которую я послал Вам позавчера, я признал пробел в моем доказательстве, открытый Вами, и одновременно заметил, что я в состоянии восполнить его, хотя не могу не выразить некоторое сожаление, что этот вопрос не удалось отрегулировать без привлечения более сложных соображений. Но это, несомненно, связано с самой природой предмета, что должно утешить меня. Возможно, позднее окажется, что то, чего не достает в этом доказательстве, можно будет истолковать более просто, а в настоящий момент, это мне не под силу. Поскольку же я, прежде всего, стремлюсь убедить Вас в справедливости моей теоремы: А. «Непрерывное многообразие ρ измерений может быть поставлено в однозначное соответствие с непрерывным многообразием одного измерения или (что представляет собой лишь иную форму той же теоремы) точки (элементы) многообразия ρ измерений можно определить одной действительной координатой t таким образом, что каждому действительному значению t из интервала $(0 \ldots 1)$ соответствует одна точка этого многообразия и, наоборот, каждой точке многообразия соответствует одно определенное значение t из интервала $(0 \ldots 1)$», то позволю себе предложить Вам другое доказательство, к которому я пришел даже раньше, чем к предыдущему.

Я исхожу из теоремы, согласно которой всякое иррациональное число $e {> 0 \atop < 1}$ может быть вполне определенно представлено непрерывной дробью

$$e = \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{\ddots}{\cfrac{1}{\alpha_\nu + \ddots}}}} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots),$$

где α_ν — рациональное целое положительное число. Каждому иррацио-

нальному числу $e \gtrless {0 \atop 1}$ соответствует определенная бесконечная последовательность α_ν и, обратно, всякой неограниченной последовательности α_ν соответствует определенное иррациональное число $e \gtrless {0 \atop 1}$.

Тогда, если $e_1, e_2, \ldots, e_\rho$ — не зависящие друг от друга величины, каждая из которых может принимать все иррациональные значения из интервала $(0 \ldots 1)$ и только их, то полагаем

$$e_1 = (\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \ldots, \alpha_{1,\nu}, \ldots),$$
$$e_2 = (\alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}, \ldots, \alpha_{2,\nu}, \ldots),$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$e_\rho = (\alpha_{\rho,1}, \alpha_{\rho,2}, \ldots, \alpha_{\rho,\nu}, \ldots)$$

и по этим числам определяем число

$$\partial = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu, \ldots)$$

при помощи системы равенств

$$\beta_{(n-1)\rho+1} = \alpha_{1,n}, \quad \ldots, \quad \beta_{(n-1)\rho+\sigma} = \alpha_{\sigma,n}, \quad \ldots, \quad \beta_n = \alpha_{\rho,n}. \qquad (1)$$

Тогда, обратно, каждое иррациональное число $\partial \gtrless {0 \atop 1}$ будет порождать при помощи (1) определенную систему $e_1, e_2, \ldots, e_\rho$.

Здесь, как мне кажется, мы не встречаемся с препятствием, обнаруженным Вами в моем первом доказательстве.

И тогда речь идет о доказательстве следующей теоремы:

(B). «Переменное число e, могущее принимать все *иррациональные* значения из интервала $(0 \ldots 1)$, можно поставить в однозначное соответствие с числом x, принимающим *все* без исключения значения из этого интервала».

Действительно, как только теорема (B) доказана, так однозначно сопоставляем одну за другой переменные, обозначенные выше через $e_1, e_2, \ldots, e_\rho$ и ∂ соответственно с другими переменными

$$x_1, x_2, \ldots, x_\rho, y,$$

у всех из которых областью изменения является весь интервал $(0 \ldots 1)$. Тем самым одновременно мы определили однозначное и взаимно обратное отношение между системой

$$(x_1, x_2, \ldots, x_\rho),$$

с одной стороны, и единственным переменным y — с другой, что приводит к доказательству теоремы (A).

Чтобы доказать теперь (B), представляем сначала все *рациональные* числа интервала $(0 \ldots 1)$ (включая концы) в форме последовательности, скажем

$$r_1, r_2, \ldots, r_\nu, \ldots$$

Тогда значениями, которые может принимать переменное e, являются *все* значения из этого интервала, *за исключением* чисел r_ν.

Затем в интервале $(0\ldots1)$ берем произвольную бесконечную последовательность ε_ν *иррациональных* чисел, удовлетворяющую условиям $\varepsilon_\nu < \varepsilon_{\nu+1}$ и $\lim(\varepsilon_\nu)=1$ при $\nu=\infty$, и через f обозначаем переменную величину, которая может принимать все действительные значения $\begin{matrix}\geqslant 0\\ \leqslant 1\end{matrix}$, за исключением значений ε_ν. Тогда две переменные величины e и f, удовлетворяющие указанным ограничениям, могут быть поставлены в однозначное и взаимно обратное отношение при помощи следующих определений:

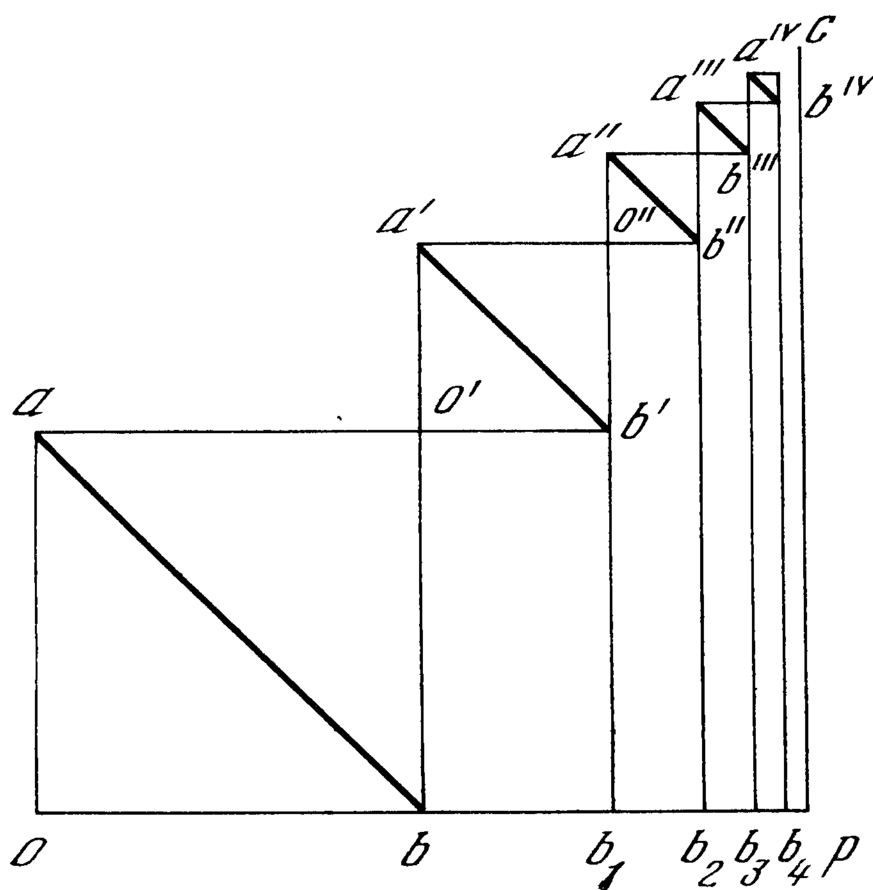
если f не равно ни одному из r_ν, то для соответствующего e полагаем $e=f$;

если $f=r_\nu$, то пусть соответствующим ему будет $e=\varepsilon_\nu$.

Легко убедиться, что, и обратно, если e не равно никакому ε_ν, то соответствующее f равно e, а если $e=\varepsilon_\nu$, то $f=r_\nu$.

Так что теорема (B) сводится к следующей:

(C). «Число f, которое может принимать все значения из интервала $(0\ldots1)$, за исключением некоторых из них ε_ν, удовлетворяющих условиям $\varepsilon_\nu<\varepsilon_{\nu+1}$ и $\lim\varepsilon_\nu=1$, может быть поставлено в однозначное соответствие с непрерывным переменным x, принимающим все без исключения значения из интервала $(0\ldots$ $\ldots1)$».



Здесь мы воспользуемся тем фактом, что точки $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ образуют *последовательность*, а значит, интервал $(0\ldots1)$ разделен на бесконечно много частичных интервалов.

Как Вы сразу же заметите, эта теорема (C) тогда может быть доказана при помощи последовательного применения такой теоремы:

(D). «Число y, которое может принимать все значения из интервала $(0\ldots1)$, за исключением единственного значения 0, может быть поставлено в однозначное соответствие с числом x, принимающим все без исключения значения этого интервала».

Последняя же теорема (D) может быть признана справедливой при помощи следующей любопытной кривой. Координаты подвижной точки m этой кривой являются моими величинами x и y, из которых одна является однозначной функцией другой, но в то время, как x принимает все значения из интервала $(0\ldots1)$, область изменения у y является тем же интервалом, *за единственным исключением значения* 0.

Кривая состоит из бесконечного числа становящихся все меньше и меньше параллельных прямолинейных сегментов $\overline{ab}$, $\overline{a'b'}$, $\overline{a''b''}$, … и

точки c. Концы b, b', b'', ... *рассматриваются как непринадлежащие кривой*. Длины этих сегментов таковы:

$$\overline{op} = \overline{Pc} = 1;\quad \overline{ob} = {}^1/_2;\quad \overline{bb_1} = {}^1/_4;\quad \overline{b_1b_2} = {}^1/_8;\quad \overline{b_2b_3} = {}^1/_{16};\ldots$$
$$\overline{oa} = {}^1/_2;\quad \overline{a'd'} = {}^1/_4;\quad \overline{a''d''} = {}^1/_8;\quad \overline{a'''d'''} = {}^1/_{16};\ \ldots$$

В течение многих лет я с живым интересом следил за теми усилиями, которые после Гаусса, Римана и Гельмгольца затрачивались на выяснение вопросов, относящихся к основным гипотезам геометрии. В связи с этим мне казалось, что все исследования, проведенные в этой области, *сами* опираются на недоказанную гипотезу, не считавшуюся мною самоочевидной, а скорее нуждающуюся в обосновании. Я имею в виду гипотезу, согласно которой ρ-кратно протяженное непрерывное многообразие требует для определения его элементов ρ независимых друг от друга действительных координат, причем число этих координат для одного и того же многообразия не может быть ни увеличено, ни уменьшено.

Я тоже принимал эту гипотезу, будучи почти убежден в ее справедливости. Моя точка зрения отличалась от всех других только в том, что я рассматривал эту гипотезу как теорему, особенно нуждающуюся в доказательстве, и уточнил свою точку зрения в форме вопроса, поставленного перед несколькими коллегами, в частности, во время юбилея Гаусса в Гёттингене, а именно следующего вопроса:

«Может ли непрерывное образование ρ измерений при $\rho > 1$ поставлено в однозначное отношение с непрерывным образованием одного измерения так, что точке одного соответствует одна и только одна точка другого?»

Большинство из тех, кому я задавал этот вопрос, очень удивлялись тому, что я его вообще могу ставить, ибо он *самоочевиден*; для определения точки у ρ-мерной протяженности всегда приходится употреблять ρ независимых координат. Те же, кто глубже вникал в смысл вопроса, вынуждены были признать, что требуется по крайней мере доказать, почему «очевидным» ответом должен быть «*нет*». Как я уже сказал, я стоял на стороне тех, кто считал вероятным отрицательный ответ, до совсем недавнего времени, когда благодаря довольно сложному ходу мыслей я пришел к убеждению, что ответ *положителен* без каких-либо ограничений. Чуть позже я нашел доказательство, которое сегодня перед Вашими глазами.

Мы видим здесь, какова все же мощь обычных действительных, рациональных и иррациональных чисел: с их помощью можно *через единственную координату* однозначно определить элементы ρ-кратно протяженного непрерывного многообразия. К этому я сразу же хочу добавить, что их сила простирается еще дальше, что, как Вы легко заметите, мое доказательство без существенного увеличения трудностей можно распространить на многообразия бесконечного числа измерений при условии, что эти измерения образуют простую бесконечную последовательность.

Поэтому мне кажется, что все философские или математические дедукции, в которых используется эта ошибочная гипотеза, являются недопустимыми. Различие, имеющееся между двумя образованиями *различного* числа измерений, следует, скорее, искать совсем в другой причине, нежели в числе независимых координат, считающемся вообще характеристическим.

XXVI.
Кантор — Дедекинду

Галле, 29 июня 1877 г.

Извините мое рвение в этом деле, если я слишком часто обращаюсь к Вашей доброте и Вашему труду. То, что я сообщил Вам совсем недавно, для самого меня столь неожиданно, столь ново, что я никак не могу успокоить мой ум, пока не получу, мой почитаемый друг, Вашего суждения об этом. Пока Вы не одобрите, я могу лишь сказать: Je le vois, mais je ne le crois pas [13].

Именно поэтому прошу Вас прислать открытку, сообщив мне, когда Вы сможете закончить проверку, а если я могут рассчитывать на встречу с Вами, то внемлите моей мольбе, наверно излишне настойчивой.

Доказательство теоремы (C) значительно облегчается применением такого символа.

Если a и b — две переменные величины, которые могут быть поставлены в однозначное соответствие друг с другом, то пишем

$$a \sim b.$$

Тогда если $a \sim b$ и $b \sim c$, то и

$$a \sim c.$$

Если, далее, $a', a'', \ldots$ — конечная или бесконечная последовательность вполне определенных переменных или констант, попарно не имеющих ни одного общего значения, но таких, что объединение их областей изменения представляет собой в точности область изменения одной переменной a, то полагаем

$$a \equiv (a', a'', \ldots).$$

Тогда имеем следующую теорему:

(E). «Если

$$a \equiv (a', a'', \ldots),$$
$$b \equiv (b', b'', \ldots)$$

и если, кроме того,

$$a' \sim b'$$
$$a'' \sim b''$$
$$a''' \sim b'''$$
$$\cdots\cdots$$

то имеем и

$$a \sim b».$$

Благодаря подстановкам

$$y=\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}, \qquad x=\frac{u-\alpha}{\beta-\alpha}$$

получаем из (D) следующее обобщение:

(F). «Число z, которое может принимать все значения из интервала $(\alpha\ldots\beta)$, за исключением α, может быть поставлено в однозначное соответствием с числом u, принимающим все без исключения значения из интервала $(\alpha\ldots\beta)$».

Отсюда непосредственно получается такая теорема:

(G). «Число w, которое принимает все значения из интервала $(\alpha\ldots\ldots\beta)$, за исключением двух концевых значений α, β, может быть поставлено в однозначное соответствие с переменным числом u, принимающим все значения из интервала $(\alpha\ldots\beta)$».

Доказательство. Пусть число $\gamma \gtrless {\alpha \atop \beta}$; w' — переменное, принимающее все значения из интервала $(\alpha\ldots\gamma)$, за исключением α и γ; w'' — переменное, принимающее все значения из интервала $(\gamma\ldots\beta)$, за исключением одного конца β.

Тогда имеем

$$w=(w', w''). \tag{1}$$

И если через u'' мы обозначим переменное, принимающее все значения из интервала $(\gamma\ldots\beta)$ без исключения, через z — переменное, принимающее все значения из интервала $(\alpha\ldots\beta)$, за исключением α, то по (F)

$$w''\sim u'', \tag{2}$$

а ввиду (1) и (E)

$$w\sim(w', u'').$$

Но $(w', u'')\equiv z$, а значит,

$$w\equiv z.$$

Однако по (F) имеем также

$$z\sim u,$$

а значит, наконец,

$$w\sim u,$$

что и требовалось доказать.

Чтобы доказать теперь (C), мы разлагаем f на переменные f', f'', ... и изолированное значение 1 и пусть f' принимает все значения из интервала $(0\ldots\varepsilon_1)$, за исключением ε_1, $f^{(\nu)}$ — все значения из интервала $(\varepsilon_{\nu-1}\ldots\varepsilon_\nu)$, за исключением концевых значений $\varepsilon_{\nu-1}$ и ε_ν. Тогда имеем

$$f\equiv(f', f'', f''', \ldots, f^{(\nu)}, \ldots, 1).$$

Пусть x'' — переменное, принимающее все без исключения значения из $(\varepsilon_1\ldots\varepsilon_2)$, $x^{(IV)}$ — переменное, принимающее все без исключения значения из $(\varepsilon_2\ldots\varepsilon_4)$, $x^{(2\nu)}$ — переменное, принимающее все без исключения значения из интервала $(\varepsilon_{2\nu-1}\ldots\varepsilon_{2\nu})$. Тогда по (G) имеем

$$f''\sim x'',$$

$$f^{\mathrm{IV}} \sim x^{\mathrm{IV}},$$
$$\cdots\cdots$$
$$f^{(2\nu)} \sim x^{(2\nu)},$$
$$\cdots\cdots$$

а значит,

$$f \sim (f', x'', f''', x^{\mathrm{IV}}, \ldots, f^{(2\nu-1)}, x^{(2\nu)}, \ldots, 1).$$

Но

$$(f', x'', f''', x^{\mathrm{IV}}, \ldots, f^{(2\nu-1)}, x^{(2\nu)}, \ldots, 1) \equiv x,$$

поэтому

$$f \sim x.$$

XXVII.
Дедекинд — Кантору

Я еще раз проверил Ваше доказательство и не нашел в нем пробелов. Я убежден, что Ваша интересная теорема правильна, и поздравляю Вас с нею. Однако, как я уже сообщил Вам в открытке, я хотел бы высказать одно замечание, направленное *против* следствий, которые Вы добавили в Вашем письме от 25 июня к формулировке и доказательству теоремы и которые относятся к понятию непрерывного многообразия ρ измерений. Из сказанного Вами могло бы показаться, — хотя мое мнение может быть ошибочным, — что на основании Вашей теоремы Вы предполагаете поставить под сомнение значение или важность этого понятия. В конце этого письма Вы, например, пишите: «*Поэтому мне кажется*, что все философские или математические дедукции, в которых используется эта ошибочная гипотеза, являются недопустимыми. Различие, имеющееся между двумя образованиями *различного* числа измерений, следует, скорее, искать совсем в другой причине, нежели в числе независимых координат, считающемся вообще характеристическим».

Против этого (несмотря на Вашу теорему или, скорее, вследствие соображений, возникших в связи с Вашей теоремой) я выдвигаю мое убеждение или веру (у меня еще не было времени хотя бы попытаться доказать это), что число измерений непрерывного многообразия как до сих пор, так и впоследствии есть и будет первым и самым важным из его инвариантов, и я должен взять под защиту все то, что написано по данному вопросу до сих пор. Я вполне охотно соглашаюсь с Вами, что это постоянство числа измерений требует доказательства, а так как этого доказательства не было столь долго, то можно усомниться в самом утверждении. Однако я не сомневаюсь в этом постоянстве, хотя оно и может показаться разрушенным Вашей теоремой. Ведь все авторы, очевидно, принимали то молчаливое и вполне естественное допущение, что для нового определения точек непрерывного многообразия с помощью новых координат последние должны быть (вообще) *непрерывными* функциями старых с тем, чтобы то, что было непрерывно связанным при первом определении положения, оказывалось непрерывно связанным и во втором. Поэтому я пока убежден в справедливости следующей теоремы: «Если удалось установить взаимно однозначное и полное соответст-

вие между точками непрерывного многообразия A, имеющего a измерений, с одной стороны, и точками непрерывного многообразия B, имеющего b измерений, — с другой, то если a и b не равны, это соответствие необходимо *всюду разрывно*». С помощью этой теоремы выяснилось бы и то явление, которое проявилось в первом доказательстве Вашей теоремы, а именно неполнота этого доказательства. Отношение, которое Вы хотели там установить (с помощью десятичных дробей) между точками ρ-мерной области и точками «одномерного отрезка», было бы, если я не ошибаюсь, *непрерывным* только при условии, чтобы оно включало *все* точки единичного отрезка. Равным образом, мне кажется, что в Вашем теперешнем доказательстве *первоначальное* соответствие между точками ρ-мерного отрезка, все координаты которого иррациональны, и точками единичного отрезка с иррациональными же координатами, также непрерывно, насколько это возможно в определенном смысле (малость изменения); однако заполнение пробелов вынудило Вас ввести в это соответствие ужасную, головокружительную разрывность, вследствие чего все рассыпалось на атомы, — такую разрывность, что всякая сколь угодно малая непрерывная часть одной области оказалась разрывной, словно всюду разорванной в ее образе.

Надеюсь, что я выражаюсь достаточно ясно. Данное письмо не содержит другой цели, кроме просьбы к Вам не начинать публичную полемику против признанных до сих пор статей по теории многообразий, пока Вы не рассмотрите более глубоко мое возражение.

Брауншвейг, 2 июля 1877 г.

XXVIII.
Кантор — Дедекинду

(открытка с почтовым штемпелем 2.7.77)

Я очень счастлив, что Вы изучили мою работу и нашли ее правильной. Прошу Вас упорствовать в Вашем суждении и сообщить мне Ваши идеи о значении этого результата детально и точно. В соответствии с ними я буду вырабатывать мое суждение о способе продолжения всего этого дела.

XXIX.
Кантор — Дедекинду

Галле, 4 июля 1877 г.

Я был очень обрадован Вашим письмом от 2 июля и благодарю за Ваши точные и чрезвычайно ценные замечания.

В конце моего письма от 25 июня я, невольно, дал повод к впечатлению, будто своим доказательством я хочу встать в оппозицию самому понятию ρ-кратно протяженного непрерывного многообразия, тогда как все мои усилия не имели другой цели, кроме выяснения этого понятия и придания ему надежного фундамента. Когда я утверждал: «Поэтому мне кажется, что все философские и математические дедукции, в которых используется эта ошибочная гипотеза, являются недопустимыми»,—

то это относилось *не* к «определенности числа измерений», а только к определенности независимых координат, число которых предполагается некоторыми авторами при всех обстоятельствах равными числу измерений, тогда как, если мы возьмем понятие координат *во всей его общности*, без какого-либо предположения о природе используемых функций, то число независимых однозначных и полных координат может быть, как я показал, сведено к любому заданному числу. Я тоже придерживаюсь Вашего мнения, что если мы примем ограничение, что соответствие должно быть непрерывным, то тогда можно поставить в однозначное соответствие только образы равного числа измерений, и что на этом пути из числа независимых координат можно получить некий инвариант, приводящий к определению числа измерений непрерывного многообразия.

Все же я еще не в состоянии осознать, в какой мере на этом пути (приводящем к понятию числа измерений) могут появиться трудности, поскольку я не знаю, действительно ли мы можем ограничиться понятием *вообще непрерывного соответствия*. Однако мне кажется, что все здесь зависит от возможности такого ограничения.

Другую трудность я вижу в том, что данный путь несомненно не заканчивается, как только образ перестает быть всюду непрерывным; ведь и в этом случае тоже можно надеяться получить нечто, соответствующее числу измерений, тем более что для встречающихся в природе многообразий трудно, по-видимому, установить их сплошную непрерывность.

Этими строками я хотел бы только показать, что я далек от желания воспользоваться без каких-либо условий моим результатом против признанных статей по теории многообразий, а напротив, мне хотелось бы с его помощью внести вклад в укрепление теорем, насколько это возможно. Я не хотел бы беспокоить Вас больше сегодня. Прошу Вас, если найдете время, обдумать возникающие вопросы, не пренебрегать этой работой и продолжать знакомить меня с Вашими результатами.

XXX.
Кантор — Дедекинду

Галле, 23 октября 1877 г.

...Об исследованиях, которые я выполнил этим летом, я подготовил работу под названием «К учению о многообразиях». Вот уже четыре месяца она находится у г-на Борхардта, и надеюсь, что вскоре будет опубликована. Поскольку мне было позволено с пользой включить туда Ваши дружеские советы, то Вас, возможно, заинтересует, что для одной из моих теорем я нашел еще более простое доказательство. Если два вполне определенных многообразия могут быть поставлены в однозначное и полное поэлементное соответствие друг с другом, то тогда я пользуюсь выражением, что они имеют *одну и ту же мощность* или же что они *эквивалентны*. *Эквивалентными* я называю и два действительных переменных a и b, если их можно поставить в однозначное и полное со-

ответствие друг с другом, и в этом случае пишу, как Вы знаете,

$$a \sim b.$$

Тогда речь идет о следующей теореме:

«Если e есть переменное, принимающее все иррациональные значения $\gtreqless {0 \atop 1}$, а x — переменное, принимающее все рациональные и иррациональные значения $\geqslant 0$ и $\leqslant 1$, то

$$e \sim x».$$

Доказательство. Пусть φ_ν — общий член последовательности, состоящей из всех рациональных чисел $\geqslant 0$ и $\leqslant 1$; η_ν — общий член последовательности, образованной из любых неравных иррациональных чисел ${>0 \atop <1}$, например

$$\eta_\nu = \sqrt{2}/2^\nu;$$

пусть h будет означать переменное, принимающее все значения из интервала $(0 \ldots 1)$, за исключением φ_ν и η_ν.

Тогда

$$\left.\begin{aligned} x &\equiv \{h, \eta_\nu, \varphi_\nu\}, \\ e &\equiv \{h, \eta_\nu\}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Последнюю формулу мы можем записать и в виде

$$e \equiv \{h, \eta_{2\nu-1}, \eta_{2\nu}\}. \qquad (2)$$

Если мы сравним формулы (1) и (2) и примем во внимание, что

$$h \sim h, \quad \eta_\nu \sim \eta_{2\nu-1}, \qquad \varphi_\nu \sim \eta_{2\nu},$$

то отсюда следует, что

$$x \sim e,$$

что и требовалось доказать.

Быть может, Вы изучили далее вопрос о том, является ли для определения понятия непрерывного n-кратного многообразия условие непрерывности соответствия достаточным, чтобы это понятие укрепилось, не приводя ни к какому противоречию?

P. S. Я вновь просмотрел новый учебник по анализу Липшица. Нравится ли он Вам? [14].

XXXI.

Дедекинд — Кантору

27.10.1877

{...Мне приятно узнать, что Ваши очень интересные исследования по теории многообразий вскоре появятся в журнале Борхардта. Их основной результат я сообщил во время каникулярной поездки Г. Веберу из Кенигсберга, не допустив тем самым, как я надеюсь, нескромности; еще в Гёттингене в связи с юбилеем Гаусса он слышал от Вас, что Вы зани-

маетесь этим вопросом, и теперь был рад узнать, что после того Вам удалось строго доказать эту поразительную теорему. Ваше последнее сообщение содержит весьма замечательное, а потому очень приемлемое упрощение доказательства; после этого приходится удивляться, почему к этому не пришли раньше. Сам я после недавнего обмена письмами больше не занимался этим вопросом.} Однако я продолжаю верить, что понятие числа измерений действительно приобретает характер инварианта при условии непрерывности соответствия.

В труде Липшица, насколько я смог изучить его к настоящему времени, много хорошего и интересного. Правда, вследствие моего склонного к критике характера, я нашел несколько возражений, которые следовало бы сделать в отдельных пунктах. Но меня, тем не менее, обрадовало то, что сделана серьезная попытка внести математическую строгость даже в *учебник*. Что касается оснований теории иррациональностей, в качестве которой он почти полностью принял Ваше изложение, опубликованное впервые г-ном Гейне, то я всего-навсего возразил бы, что (с. 46) фактически совершенно новая гипотеза («Тогда предельное значение G попадает...») представлена, по-видимому, как очевидное *следствие* предыдущего; кроме того, я не могу считать верным заключительное замечание § 14 о греках. {Доказательство основной теоремы алгебры можно было бы путем некоторых преобразований упростить и воспользоваться им против одного оправданного возражения (с. 280: «Поэтому этот метод...»). Далее, чтобы сделать вполне строгим то место (с. 249: «то приданное переменному x значение...»), где дается заранее ход всего доказательства, определенно нужно упомянуть о непрерывности функции $f(x)$, которая, кроме того, выступает, хотя тоже без указания, как существенное средство доказательства в § 66...} [15].

XXXII.
Кантор — Дедекинду

Галле-на-Заале, 29 декабря 1878 г.

...Вы должны, несомненно, располагать книгой «Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali» (Pisa, 1878) Улисса Дини [16]. Этот труд, как мне кажется, выполнен человеком, знающим свой предмет и весьма искусным. При введении чисел он пользуется Вашим методом. Хотя я полностью согласен с последним, тем не менее, я считаю, что метод, указанный мною в работе о тригонометрических рядах, эквивалентен ему, и что формальное различение числовых величин различных порядков — чем я хотел выразить *лишь* различные способы определения их просто бесконечными последовательностями (индексы членов которых, возрастая, неограниченно приближаются *друг к другу*) — не представляет той опасности, о которой можно было бы подумать, будто я хотел расширить область действительных чисел. Этот промах я *никогда* не собирался совершать *даже отдаленно*: в моей работе я явно говорю, что всякое число, обозначенное мною через c, может быть равно

числу b. Впрочем, этот промах, каким бы неслыханным он ни выступал, фактически совершен с другой стороны. Не знаю, известен ли Вам набросок теории комплексных функций и тэта-функций Томе; во втором издании на с. 9 находятся числа, которые (horrible dictu) меньше, чем всякое мыслимое действительное число, и тем не менее отличны от нуля [[17]].

Вопрос о том, могут ли непрерывные многообразия различного числа измерений поставлены в однозначное и непрерывное соответствие, или, скорее, о теореме, согласно которой это невозможно, оказался — после появления моей работы по поводу теории многообразий — предметом мемуаров Томе, Люрота, Юргенса и, совсем недавно, Нетто в журнале Борхардта [[18]]. Мне все же кажется, что этот вопрос полностью еще не решен.

XXXIII.
Кантор — Дедекинду

Галле-на-Заале, 17 января 1879 г.

Вопрос об однозначном и *непрерывном* отображении многообразий, близко примыкающий к моим исследованиям, теперь, как мне кажется, решен простейшим и строгим способом — путем сведения его к известной основной теореме анализа, а именно:

(I). Непрерывная функция одного непрерывного переменного t, которая для $t=t_0$ принимает отрицательное значение, а для $t=t_1$ — положительное, принимает между ними нулевое значение по крайней мере один раз.

Как Вы, возможно, заметили, соответствующие попытки Томе и Нетто неполны. Так, например, Томе опирается на недоказуемую *для него* теорему[1] Римана (Ges. Werke, p. 450: многомерный сегмент самое меньшее $(n-1)$-го измерения и т. д.) [[19]]. Между тем, как я теперь ясно осознал, эта теорема в некоторой мере является эквивалентом, который предстоит доказать в случае $\nu=n-1$. А так как $n-1$ представляет собой не менее общее число, чем n, то Томе в своем доказательстве впадает в порочный круг.

Общее доказательство, которое я сейчас дам, известно мне уже давно — фактически свыше года. Однако я не считал его строгим до сих пор и именно поэтому очень остерегался говорить о нем. Открытие, которое я сделал несколько дней тому назад, состоит в том, что эта доказательство является строгим. Ошибка, которую я совершал, проистекала из того, что встречающиеся при доказательстве отношения не являются *однозначными в обе стороны*. Однако их *многозначность* в сущности нисколько не влияла на результат, так как она имела место лишь при переходе от образа с бо́льшим числом измерений к образу с меньшим числом измерений.

---

[1] Он называет ее «аксиомой».

Далее под сферой p-го порядка я понимаю непрерывный образ p-го порядка, выделяемый уравнением

$$(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+\ldots+(x_{p+1}-a_{p+1})^2=r^2$$

из $(p+1)$-кратного многообразия, координаты которого $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}$ таковы, что, например, окружность в плоскости является сферой 1-го порядка.

Подлежащая доказательству теорема в ее расширенной форме такова:

«При $\mu<\nu$ непрерывный M_μ и непрерывный M_ν не могут быть поставлены в *непрерывное* соответствие так, чтобы каждому элементу образа M_μ соответствовал *единственный* элемент образа M_ν и каждому элементу из M_ν соответствовал *один или несколько* элементов из M_μ».

Для случая $\nu=1$ теорема очевидна. Чтобы доказать ее в общем случае, предположим ее верной для $\nu=n-1$ и покажем, что тогда она верна и для $\nu=n$.

С этой целью предположим существование такого непрерывного отношения между M_μ и M_n при $\mu<n$, что переход от M_μ к M_n будет *однозначным*, и покажем, что на основании этого предположения получается некоторое внутреннее противоречие или, скорее, противоречие с основной теоремой I, сформулированной выше.

Пусть a и b — две внутренние точки из M_μ, а A и B — соответствующие точки из M_n.

Вокруг A как центра строим в M_n сферу $(n-1)$-го порядка K_{n-1}, которая достаточно мала, чтобы B была расположена вне ограниченного ею пространства.

Вокруг a как центра тоже строим в M_μ сферу $(\mu-1)$-го порядка $K_{\mu-1}$, которая достаточно мала, чтобы:

1) точка b находилась вне этой сферы;

2) непрерывный образ $(\mu-1)$-го порядка, соответствующий в M_n этой сфере, полностью располагался внутри пространства, ограниченного сферой K_{n-1}, что может быть осуществлено ввиду непрерывности отношения в окрестностях точек a и A.

Пусть z — какая-либо точка из $K_{\mu-1}$, ζ — соответствующая точка из $G_{\mu-1}$; проводим прямолинейный радиус $A\zeta$; продолженный в этом направлении, он встречает сферу K_{n-1} в одной и только одной точке Z.

Таким образом, *при помощи данной конструкции* каждой точке z из K_{n-1} сопоставляется *одна* точка Z из $K_{\mu-1}$, изменяющаяся непрерывно вместе с z.

Однако точка Z не может достичь любой точки из K_{n-1}, *так как это будет противоречить нашей теореме, предположенной доказанной в случае* $\nu=n-1$.

Поэтому мы уверенно заключаем, что имеются точки P сферы K_{n-1}, которые недостижимы точкой Z; если мы соединим A с такой точкой P, то радиус AP *не* пересечется с образом $G_{\mu-1}$.

Тогда если мы соединим P с точкой B, расположенной вне K_{n-1}, непрерывной кривой, содержащейся в пространстве M_n, то получим

(II) составную непрерывную линию APB, *не имеющую ни одной точки, общей с образом* $G_{\mu-1}$.

Этой линии ввиду предположенного вначале непрерывного отношения между M_μ и M_n соответствуют одна или несколько кривых расположенных в M_μ, которые непрерывно соединяют a и b и которые

(III) ввиду основной теоремы I должны *необходимо* пересекать сферу $K_{\mu-1}$ *по крайней мере один раз.*

Эти два факта II и III противоречат друг другу. Следовательно, предположение о непрерывном отношении между M_μ и M_n ошибочно и наша теорема доказана для случая $\nu=n$.

Поскольку я недавно избран членом-корреспондентом Гёттингенской академии, а Томе опубликовал свое доказательство в «Gottinger Anzeigen», то я собираюсь послать данное доказательство в тот же журнал [20]. Поэтому-то мне и хотелось знать, что Вы думаете об этом.

XXXIV.
Дедекинд — Кантору

Я тщательно изучил Ваше доказательство и нашел в нем лишь одну деталь, которая могла бы вызвать сомнение. Построив вокруг точки A из M_n сферу K_{n-1} и вокруг точки a из M_μ сферу $K_{\mu-1}$, образ которой в M_n обозначен через $G_{\mu-1}$, Вы отсюда получаете отображение $K_{\mu-1}$ на K_{n-1}: точке z из $K_{\mu-1}$ соответствует определенная точка ζ из $G_{\mu-1}$, причем пересечение Z радиуса $A\zeta$ с K_{n-1} будет тогда рассматриваться как новый образ точки z. Но тогда мыслимо, что ζ совпадет с A, поскольку Вы допускаете, что *нескольким* точкам из M_n соответствует одна и та же точка из M_n; в этом случае образ Z был бы вообще *неопределенным.* Этой трудности, очевидно, легко избежать, когда число точек a' в M_μ, которым соответствует одна и та же точка A в M_n, является *конечным* — можно взять радиус сферы $K_{\mu-1}$ достаточно малым, чтобы остальные точки a' попали вне ее. Если же число точек a' бесконечно, то я пока вижу в этом обстоятельстве подлинную трудность, а последняя встречается в другом месте Вашего доказательства. Действительно, Вы утверждаете, что линии APB будут соответствовать одна или несколько линий в M_μ, непрерывно соединяющих a с b. По моему мнению, это потребовало бы объяснения и более точного обоснования, *даже* если B является лишь образом точки или *конечного* числа различных точек b' из M_μ. Если же бесконечно много точек b' из M_μ обладают одним и тем же образом B в M_n, то существование линии, непрерывно соединяющей a с b и образом которой должна быть линия APB, становится еще сомнительнее. Впрочем, я *считаю*, что теорема остается справедливой, даже если мы предположим, что каждая точка из M_n может быть образом бесконечно многих различных точек из M_μ. Вам, возможно, удастся избежать двух указанных трудностей. Для публикации я считаю желательным, чтобы были точно определены наименования или технические выражения теории многообразий (в связи с этим я решительно предпочитаю термин «область», использовавшийся и Риманом, как значительно более корот-

кий, чем тяжелый термин «многообразие»). Было бы очень хорошо ab avo [21] развить всю эту «теорию областей» без обращения к геометрической интуиции, и тогда пришлось бы явно и точно определить, например, понятие линии, непрерывно соединяющей точку a с точкой b внутри области G. Определения Нетто (мемуар которого мне очень нравится и доказательство которого сделалось бы, как я думаю, вполне корректным после некоторых модификаций) содержат хороший зародыш, но они, как мне кажется, могут быть упрощены и одновременно пополнены [22]. Я не позволил бы себе такое суждение, если бы не занимался много вопросами этого рода на протяжении ряда лет, когда я собирался еще издавать лекции Дирихле по теории потенциала и в этой связи хотел более строго обосновать то, что называют принципом Дирихле [23]. Я даже располагал некоторыми определениями этого рода, которые казались мне дающими удовлетворительную базу, но затем я оставил все это в стороне и сейчас смог бы дать лишь нечто несовершенное, так как я полностью занят переработкой теории чисел Дирихле [24]. Тем не менее, Ваше сообщение — вряд ли мне стоит говорить об этом — заинтересовало меня в высшей степени. Мои сердечные поздравления Вам...

Брауншвейг, 19 января 1879 г.

XXXV.
Кантор — Дедекинду

(открытка с почтовым штемпелем 20.1.1879)

В доказательстве, которое я послал Вам 17 января, я нашел один пункт, правда *несущественный*, который можно улучшить.

Предпочтительнее исходить из двух точек A и B внутри M_n, которым соответствуют внутренние точки из M_μ.

Пусть a — *одна* из внутренних точек, соответствующих точке a, а b, b', b'', ... —*все* точки, соответствующие точке B. Сфера $K_{\mu-1}$ с центром в a будет предполагаться достаточно малой, чтобы $G_{\mu-1}$ содержался в K_{n-1} и чтобы одновременно *все точки* b, b', b'', ... находились *вне* $K_{\mu-1}$. Это возможно ввиду непрерывности, *не позволяющей* точкам b, b', b'', ... неограниченно приближаться к точке a.

Тогда уже не возникает никакого сомнения в том, что *одна* из кривых, соответствующих в M_μ линии APB, идет от a к *одной* из точек b, b', b'', ... и должна, следовательно, пересечь сферу $K_{\mu-1}$.

После написания этой открытки я получил Ваше письмо, за которое очень благодарю. Я отвечу на него позднее, так как я вынужден сейчас отправиться на один званый вечер.

XXXVI.
Кантор — Дедекинду

(открытка с почтовым штемпелем 21.1.1879)

Вчера вечером, уходя, я смог лишь уведомить Вас о получении Вашего письма в конце открытки. Ее содержание предвосхитило одно из Ваших возражений. Что касается другого, согласно которому образ $G_{\mu-1}$

может содержать точку A, то, как мне кажется, здесь действительно имеется трудность, которую я сейчас не умею полностью преодолеть, но которую, по-видимому, можно устранить путем подходящего выбора точки A, возможности которого очень широки. Как бы то ни было, я определенно намереваюсь придать многозначный характер переходу от высших к более низким многообразиям, причем в *такой его общности*, чтобы точке из M_n могло соответствовать и *бесконечно много* точек из M_μ. Следовательно, меня *совсем не устроило бы*, если бы я был вынужден для спасения доказательства ограничить это предположение. Во всяком случае, я предусматриваю публикацию лишь в случае, если мне удастся справиться с этим моментом.

XXXVII.
Кантор — Дедекинду

Берлин, 7 апреля 1882 г.

{... Мои берлинские каникулы завершились, как обычно, работой, к которой я смог приступить менее семестра тому назад.} [25] Позволю себе обратить Ваше внимание на следующий любопытный результат, который, быть может, Вы заметили и сами.

Если мы имеем n-кратно протяженную непрерывно связную область A и в этой области содержится всюду плотное, но *счетное* точечное множество (M_ν), то при $n \geqslant 2$ область A, получаемая удалением (M_ν) из A, тоже остается непрерывно связной в том смысле, что любые две точки N и N' этой области могут быть соединены бесконечным числом аналитически определяемых непрерывных линий, расположенных в этой области A, и на которых, следовательно, нет ни одной точки множества (M_ν). Значит, *движение* возможно в некотором смысле и в таких пространствах A.

Общая справедливость этой теоремы осознается проще всего тогда, когда мы воспользуемся моей теоремой, согласно которой если задана последовательность действительных величин

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots,$$

то в любом интервале $(\alpha \ldots \beta)$ всегда имеются величины η, не равные ни одной из ω_ν. В самом деле, предположим, что $n=2$, а значит, A является плоской. Можно сначала соединить точки N и N' непрерывной линией L, не беспокоясь о (M_ν), затем на L взять конечное число точек $N_1, N_2, \ldots, N_k$, не принадлежащих (M_ν), так, чтобы отрезки NN_1, $N_1N_2, \ldots$ $\ldots N_kN'$ полностью содержались внутри A, и, наконец, *заменить* эти отрезки дугами окружностей с теми же концами, на которых не имеется точек множества (M_ν).

Возьмем, например, отрезок NN_1. Через точки N и N_1 проводим просто бесконечное семейство окружностей, центры которых находятся на прямой g и могут определяться на ней при помощи координаты u. Можно определить такой интервал $(\alpha \ldots \beta)$, что дуги окружностей, соответствующие значениям u, содержащимся в этом интервале, полностью расположены внутри A. Окружностям семейства, проходящим не только че-

рез N и N_1, но и через точки

$$M_1, M_2, M_3, \ldots, M_\nu, \ldots,$$

соответствуют значения u, которые мы будем обозначать через

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots$$

Тогда если внутри $(\alpha \ldots \beta)$ мы возьмем значение η, не равное никакой ω_ν, то, полагая $u=\eta$, получим дугу окружности, соединяющую точки N и N_1, полностью расположенную в A и на которой *не будет ни одной точки* M_ν, что и требовалось доказать.

XXXVIII.
Кантор — Дедекинду

Берлин, 15 апреля 1882 г.

Мне хотелось бы узнать Вашу реакцию на математическое содержание моего последнего письма, если оно уже побывало в Ваших руках, в чем я сомневаюсь.

Вот почему это интересует меня. В ходе наших исследований, проведенных нами независимо друг от друга довольно давно в связи с понятием иррационального числа и его идеальной — в смысле Куммера — природой, было установлено, что для создания понятия пространства нет никакой внутренней необходимости представлять последнее всюду непрерывным. Вы явно обратили внимание на этот момент в Вашем мемуаре о непрерывности [26]. Тогда казалось бы естественным вывести непрерывность пространства из внешних обстоятельств, а именно из возможности непрерывного перемещения, т. е. движения, и таким действительно было мое мнение довольно долго.

Но теперь последнее нельзя защищать, поскольку и в столь всюду разрывном пространстве, каким является пространство обозначенное в моем письме через A, возможно непрерывное перемещение от любой одной точки к любой другой. И можно было бы, следовательно, вообразить модифицированную механику, справедливую для пространства A?

XXXIX.
Кантор — Дедекинду

Галле-на-Заале, 15 сентября 1882 г.

... К этому письму прилагаю попытку сформулировать давно интересующий меня вопрос о том, что следует понимать под наименованием «*континуум*»; если Вы не считаете это бесполезным, то мы можем открыто обсудить его.

Я пытался обобщить Ваше понятие сечения и воспользоваться им для общего определения понятия континуума, но мне это не удалось. Напротив, мой исходный пункт — счетные «фундаментальные последовательности» (под ними я понимаю последовательности, элементы которых неог-

раниченно сближаются *друг с другом*) — кажутся годящимися для этой попытки.

Для линейных точечных многообразий, т. е. содержащихся на прямой, я с помощью моих теорем могу легко доказать, что условиям A и B удовлетворяет только полный интервал.

Точно так же для точечных многообразий, расположенных в плоскости, удается доказать, что если A и B выполняются, то они являются или замкнутыми односвязными кривыми, или площадями, ограниченными такими кривыми.

При этом предполагается, что за $[m, n]$ берется расстояние между двумя точками m, n.

P. S. Счетное множество, несомненно, не может рассматриваться как континуум относительно любого порядка. Напротив, всякое несчетное множество, вероятно, можно рассматривать как континуум относительно некоторого порядка.

I [27]. Пусть M — любое вполне определенное многообразие, состоящее из бесконечно многих элементов $m, n, p, \ldots$

Всякой комбинации двух элементов m, n многообразия M ставим в соответствие некоторым определенным (*но совершенно произвольным*) образом действительное положительное число (отличное от нуля), которое будет обозначаться через $[m, n]$; это соответствие можно рассматривать в известном смысле как функцию комбинаций $[m, n]$. Обратно, эта функция $[m, n]$ введет некоторые отношения между элементами из M, так что $m, n, p, \ldots$, первоначально лишенные взаимных отношений, теперь оказываются расположенными в некоторый порядок 0; этот порядок 0 мы назовем порядком, наведенным в M функцией $[m, n]$. Всякая другая функция $[m, n]'$, лишь бы она отличалась от $[m, n]$ хотя бы одним членом, порождает некий другой порядок $0'$ *в том же многообразии* M.

II. M будет называться континуумом относительно порядка 0, наведенного функцией $[m, n]$, если выполняются два следующих условия.

A. Если m и n — два любых элемента из M и ε — произвольно заданная величина, то всегда можно найти конечное число элементов $m_1, m_2, \ldots$ $\ldots m_k$ из M таких, что все

$$[m, m_1], [m_1, m_2], \ldots, [m_{k-1}, m_k], [m_k, n]$$

будут меньше ε.

B. Если $m_1, m_2, \ldots, m_\nu, \ldots$ —любое счетное многообразие элементов из M, обладающее тем свойством, что

$$\lim[m_{\nu+\mu}, m_\nu]=0 \text{ при } \nu=\infty,$$

то всегда существует *один и только один* такой элемент m из M, что

$$\lim[m, m_\nu]=0 \text{ при } \nu=\infty.$$

III. Отсюда ясно вытекает, что одно и то же многообразие M может образовывать континуум относительно *одного* порядка 0 и быть дисконтинуумом относительно другого порядка $0'$. Так, квадрат, включая его

границы, является континуумом относительно порядка, при котором $[m, n]$ есть расстояние по прямой между точками m и n; напротив, тот же квадрат будет дисконтинуумом относительно порядка, который получится, если мы отобразим его взаимно однозначно и полно на прямолинейный отрезок так, что точкам $m, n, p, \ldots$ будут соответствовать точки $m', n', p', \ldots$. отрезка, и примем $[m, n]$ равным расстоянию двух соответствующих точек $[m', n']$.

XL.
Кантор — Дедекинду

Галле-на-Заале, 30 сентября 1882 г.

... Если Вам в руки попал листок о понятии континуума, то не забудьте вычеркнуть последний абзац, так как он основывается на ошибке.

Квадрат, по-видимому, является тоже континуумом с рассмотренным там порядком, только представляет собой тогда одномерный континуум.

Напротив, можно было бы легко ввести другой порядок, при котором квадрат стал бы дисконтинуумом.

Основные соображения состоят здесь в том, что о континууме можно говорить только *относительно* некоторого определенного порядка элементов, порожденного функцией $[m, n]$. Далее, для континуума должны выполняться относительно заданного порядка два характеристических свойства, сформулированные в A и B. Надеюсь, что вскоре найду время уточнить эти соображения, чтобы выяснить их и, возможно, опубликовать.

XLI.
Кантор — Дедекинду

(открытка с почтовым штемпелем 2.10.1882)

Как я установил, к условиям A и B континуума *относительно заданного порядка* 0, нужно еще добавить условие C, которое ни в коей мере не является следствием предыдущих, а именно:

C (обращение B). Если m является элементом из M, m_ν— такое счетное бесконечное многообразие элементов, что

$$\lim[m, m_\nu] = 0 \text{ при } \nu = \infty,$$

то всегда должно быть $\lim[m_{\nu+\mu}, m_\nu] = 0$ для $\nu = \infty$ при любом μ.

Но тем самым оказывается исчерпанным все, что можно потребовать от континуума.

XLII.
Кантор — Дедекинду

Галле-на-З., 7.10.1882.

{При этом прилагаю обещанное извлечение из «Новых опытов» Лейбница. Одновременно высылаю бандеролью удивительную книжечку Больцано, которую я Вам дарю, так как у меня случайно оказался другой ее экземпляр.

Хотя многое в ней, возможно самое главное, отсутствует, она очень увлекла меня, главным образом из-за духа противоречия, пробужденного ею у меня...} [28].

XLIII.
Кантор — Дедекинду

Галле-на-Заале, 5 ноября 1882 г.

{Высокочтимый друг!

То, что так долго, а именно со времени Вашей тяжелой потери, от Вас нет никаких известий, заставляет меня опасаться, что и сами Вы чувствуете себя не вполне хорошо. Поэтому Вы поймете, что я позволю себе обратиться к Вам с просьбой успокоить меня, если возможно, несколькими строками.} [29]

Перерыв для меня тем более ощутим, что на протяжении многих лет я привык подвергать Вашему испытанному суждению мои математические опыты. А как раз после наших последних встреч в Гарцбурге и Эйзенахе мне с помощью всемогущего бога удалось сделать наиболее удивительные и неожиданные открытия в теории многообразий и в теории чисел, или, скорее, найти нечто, бродившее во мне в течение ряда лет,— то, что я долго искал. Речь идет не об общем определении точечного континуума, о котором мы говорили и которое, как я полагаю, уже развито, а о чем-то значительно более общем, а следовательно, и более важном.

Вы помните, что в Гарцбурге я говорил Вам, что не могу доказать следующую теорему:

«Если M' является составной частью многообразия M, M'' — составной частью M' и если M и M'' могут быть поставлены во взаимно однозначное соответствие друг с другом, т. е. если M и M'' имеют одинаковую мощность, то и M' имеет ту же мощность, что M и M''».

Теперь я нашел исток этой теоремы и могу доказать ее строго и в нужной общности, что восполняет существенный пробел в теории многообразий [30].

Я пришел к ней при помощи естественного расширения — продолжения последовательности реальных целых чисел, что привело меня самым надежным путем к возрастающим мощностям, точного определения которых — за исключением первой, т. е. мощности, даваемой последовательностью $1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots,$ — у меня не было до сих пор.

Последовательность $1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots$ я называю *первым* классом реальных целых чисел и обозначаю ее через (ν).

Ко *второму* классу реальных целых чисел я прихожу следующим образом.

Так же как число ν служит выражением того, что определенное количество единиц объединено в нечто целое, так и я сначала создаю новое число ω, которое должно выражать то, что совокупность (ν) задана нам полностью. Можно даже вообразить себе число ω в виде предела чисел ν, если под этим понимать только то, что ω является первым це-

лым числом, созданным после *всех* ν, т. е. *первым* из тех, которые больше всех ν.

Если теперь прибавить единицу к ω, как ранее к ν, то получим новое число $\omega+1$, выражающее то, что *сначала* взято ω, *затем* добавлена единица и объединена с ω в новое число. Переход от числа ν или ω к *следующему* числу я называю *первым принципом порождения*; напротив, переход от необрывающейся совокупности реальных целых чисел без наибольшего элемента к следующему большему, чем все они, числу, является *вторым принципом порождения.*

Следовательно, создание числа ω вытекает из *второго принципа порождения*, а создание числа $\omega+1$ из *первого.*

Если теперь мы станем повторно применять эти *два* принципа порождения, то придем к расширению нашей последовательности чисел, продолжающейся в определенном порядке следования: $1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots$ $\ldots \omega, \omega+1, \ldots, \omega+\nu, \ldots, 2\omega, 2\omega+1, \ldots, \mu\omega+\nu, \ldots, \lambda\omega^2+\mu\omega+\nu, \ldots$ $\ldots, \sigma\omega^k+\rho\omega^{k-1}+ \ldots +\mu\omega+\nu, \ldots$ и т. д.

Первым впечатлением от этой последовательности будет, несомненно, то, что не видно, как, продолжая ее, можно где-то остановиться, что было бы, однако, необходимым, если нам нужно получить на этом пути *новую* определенную *мощность*, т. е. мощность *второго* класса, *непосредственно следующую* за мощностью первого класса.

Чтобы осуществить эту остановку, нужно к двум определенным выше способам порождения добавить *третий* принцип, который я называю *принципом ограничения.* Этот третий принцип состоит в требовании создавать новые целые числа с помощью одного из двух других принципов лишь в случае, если совокупность всех уже полученных чисел *перечислима* в классе существующих чисел и известна во всем ее объеме.

На этом пути, применяя все эти три принципа, мы приходим с полной уверенностью ко все новым и новым классам чисел и их мощностям, и полученные новые числа будут тогда столь же определенными и иметь ту же реальность, как и прежние. Я поэтому поистине не знаю, что могло бы помешать нам в этой деятельности по созданию новых целых чисел, как только мы убедились, что для прогресса науки введение какого-либо из этих неисчислимых классов чисел разумно или даже неизбежно. И именно так обстоит дело, как мне кажется, в теории множеств, а возможно, и в значительно более обширной области. Я, по крайней мере, не могу продвинуться вперед без этого расширения, а благодаря ему я получаю много совершенно неожиданных результатов.

Сначала, естественно, нужно остановиться на *втором* числовом классе, который я обозначаю через (α). В начале его находится *первый* класс (ν). По предыдущему α характеризуется тем фактом, что числа $1, 2, 3, \ldots, \omega, \omega+1, \ldots, \omega^2, \ldots$, *предшествующие* определенному числу α, всегда образуют множество, которое (отвлекаясь от его естественного упорядочения) имеет мощность *первого* числового класса.

Тогда вполне строго можно доказать, что совокупность (α) неперечислима при помощи чисел первого класса.

Следовательно, совокупность чисел (α) имеет мощность, отличную от мощности (ν) и *непосредственно* бо́льшую, ибо я могу строго доказать такую теорему:

«Если (α') является какой-либо частью совокупности (α), то *или* (α') конечна, *или* она перечислима при помощи чисел первого класса, *или же* она может быть поставлена во взаимно однозначное соответствие с самой (α), т. е. (α') перечислима с помощью чисел *второго* класса; четвертого не дано».

Более того, я полагаю, что можно строго доказать, что совокупность всех наших *действительных чисел*, рациональных и иррациональных, может быть поставлена в однозначное соответствие с (α), а это, принимая во внимание предыдущую теорему, дает *теорему о двух классах* бесконечных линейных множеств (или сводящуюся к ней при помощи отображения) [31].

Вы, быть может, удивитесь той смелости, с какой я назвал объекты $\omega, \omega+1, \ldots, \alpha, \ldots$ тоже *целыми* числами, и даже *реальными целыми числами* второго класса, тогда как до сих пор я при использовании их (в «Annalen», Bd. 17, 20 и 21) называл их скромно «символами бесконечности» [32].

Однако допущенная мною свобода объясняется тем замечанием, что между мысленными объектами α, которые я называю реальными целыми числами второго класса, имеют место соотношения, которые можно свести к основным операциям.

Правда, законы, которым подчиняются эти операции, являются существенно иными и более сложными, более трудно обнаруживаемыми при помощи индукции, нежели законы, относящиеся к старым числам нашей теории чисел. Уже для сложения мы обнаруживаем, что *коммутативный* закон вообще неприменим: $\alpha+\beta$ вообще не равно $\beta+\alpha$.

Это легко видеть из констатации того, что $1+\omega=\omega$, тогда как $\omega+1$ определенно отлично от ω.

Если $\beta>\alpha$, то вычитание определяется равенством

$$\alpha+(\beta-\alpha)=\beta,$$

но *не* уравнением $(\beta-\alpha)+\alpha=\beta$, которое вообще неразрешимо относительно $(\beta-\alpha)$.

Если α — множимое, β — множитель, то существует в (α) и определенное число, являющееся произведением

$$\alpha\beta;$$

но и здесь мы находим, что $\beta\alpha$ вообще отлично от $\alpha\beta$.

Однако закон *ассоциативности* еще справедлив во втором классе как для сложения, так и для умножения:

$$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma,$$

$$\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma.$$

Справедлива лишь половина принципа дистрибутивности:

$$(\alpha+\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma.$$

Среди чисел из (α) устанавливается естественное различие между теми числами α, которые порождаются при помощи *первого* принципа порождения, т. е. имеют, следовательно, *предшествующее* число, обозначаемое мною через α_{-1} (оно вообще отлично от $\alpha-1$, так как $\alpha-1=\alpha$ для $\alpha \geqslant \omega$), и числами α, не имеющими предшествующих в последовательности, для которых, следовательно, α_{-1} не имеет смысла. Среди чисел первого рода следует различать неразложимые числа, которые вполне можно назвать простыми [2].

Насколько я сумел заметить, наши конечные иррациональные числа относительно просто определяются с помощью чисел α; в этом пункте я вскоре продолжу мои исследования [[33]].

Обозначим через P множество чисел, содержащихся в формуле

$$z=\alpha_1 \cdot \frac{1}{3}+\alpha_2 \cdot \frac{1}{3^2}+\ldots+\alpha_\nu \cdot \frac{1}{3^\nu}+\ldots,$$

в которой α_ν могут принимать лишь значения 0 и 2.

Тогда P обладает следующими двумя свойствами:

1) $P \equiv P'$,

2) P не плотно ни в каком интервале [[34]].

Задача. Пусть M — многообразие из любых элементов, M' — правильная часть M, M_2 — правильная часть M_1; предположим, что существует взаимно однозначное отношение между M и M_2. Требуется доказать, что M и M_1, а значит, и M_1 и M_2 имеют *одинаковую мощность.*

{Извините, дорогой друг, что я рассказываю Вам о том, что в данный момент Вас мало интересует. Тогда отложите это, чтобы возможно, возвратиться к этим строкам позднее.

Во всяком случае Вы меня обяжите, если напишите мне, как Вы делаете обычно.

Дружеский поклон Вашей сестре.

Преданный Вам
Георг Кантор.}

---

[2] Мне кажется (но я не вполне уверен в этом), что всякое число α единственным образом представимо в виде

$$\alpha=c_0 \cdot \pi \cdot c_1\pi' \cdot c_2\pi'' \cdot \ \ldots \ \cdot c_{\nu-1}\pi^{(\nu-1)} \cdot c_\nu \rho,$$

где $c_0, c_1, \ldots, c_{\nu-1}, c_\nu$ — целые положительные числа из (ν), $\pi, \pi', \pi'', \ldots$ простые числа из (α) и, наконец, ρ — такое число второго рода (а значит, такое число, что ρ_{-1} не существует), которое *не делится ни на какое число первого рода.* Эти числа второго рода весьма специфичны, ибо, например, $\omega=\omega\cdot\nu$, где ν — число из (ν). Именно поэтому нельзя говорить реально о простых числах *второго* рода.

Следует еще заметить, что когда я говорю о делимости α на β, то я имею в виду возможность равенства

$$\alpha=\beta\gamma,$$

где β является *множимым.* Такое определение понятия делимости мне кажется необходимым для числового класса (α).

XLIV.
Кантор — Дедекинду

(открытка с почтовым штемпелем 6.11.1882)

Думаю, что я совершил существенную ошибку в моем недавнем анализе.

В произведении

$$\alpha=\beta\gamma$$

для меня именно β является множителем, а γ — множимым. Я говорю, что α делится на β, если α может быть представлено в форме произведения, в котором *множителем* является β.

Г. К.

В этом смысле нужно также понимать и разложение

$$\alpha=c_0\pi\cdot c_1\pi' \ \ldots \ c_{\nu-1}\pi^{(\nu-1)}\cdot c_\nu\rho,$$

которое я считаю правильным.

XLV.
Кантор — Дедекинду [35]

Галле, 28 июля 1899 г.

... Вы знаете, что я уже много лет тому назад пришел к вполне упорядоченной последовательности мощностей, или трансфинитных кардинальных чисел, которые я называю «алефами»:

$$\aleph_0,\ \aleph_1,\ \aleph_2,\ \ldots,\ \aleph_{\omega_0},\ \ldots$$

$\aleph_0$ означает мощность «счетных» в обычном смысле множеств, $\aleph_1$— непосредственно следующее по величине кардинальное число; $\aleph_2$ — непосредственно следующее по величине за $\aleph_1$ и т. д.; $\aleph_{\omega_0}$ — непосредственно следующее (по величине) за всеми $\aleph_\nu$ и равное

$$\lim_{\nu\to\omega_0}\aleph_\nu$$

и т. д.

В связи с этим возник важный вопрос: существуют ли, помимо алефов, другие мощности множеств? Уже в течение двух лет я располагаю доказательством того, что таковых не имеется, так что, например, линейному арифметическому континууму (совокупности всех действительных чисел) соответствует в качестве кардинального числа определенный алеф.

Если мы исходим из понятия определенной множественности (системы, совокупности) вещей, то мне представляется необходимым различать множественности двоякого рода (речь всегда идет об *определенных* множественностях).

А именно множественность может обладать тем свойством, что допущение «совместного бытия» *всех* ее элементов приводит к противоречию, так что эту множественность нельзя рассматривать как единство, как «некую завершенную вещь». Такие множественности я назы-

ваю *абсолютно бесконечными* или *неконсистентными множественностями.*

Как легко убедиться, «совокупность всего мыслимого», например, является подобной множественностью; далее появятся и другие примеры.

Напротив, если совокупность элементов некоторой множественности можно без противоречия мыслить как совокупность «совместно существующих» элементов, так что возможно их объединение в «*единую* вещь», то я называю ее *консистентной совокупностью* или «множеством» (на французском и итальянском языках это понятие подходяще выражается словами «ensemble» и «insieme»).

Две эквивалентные совокупности или обе являются «множествами», или обе неконсистентны.

Всякая частичная совокупность множества является множеством.

Всякое множество множеств, если последние разложены на их элементы, также являются множеством.

Если предложено некоторое множество M, то общее понятие, отвечающее ему и всем эквивалентным ему множествам и только им, я называю *кардинальным числом,* или *мощностью*, этого множества и обозначаю через $\mathfrak{m}$. К системе всех мощностей, относительно которой далее будет установлено, что она является *неконсистентной* совокупностью, я прихожу теперь следующим образом.

Множественность называется «просто упорядоченной», если между ее элементами имеет место такое отношение порядка, что из любых двух ее элементов один является предшествующим, а другой — последующим и из любых трех ее элементов один является самым первым по порядку, другой — промежуточным, а третий — последним из них.

Если просто упорядоченная множественность является *множеством*, то под его *типом* μ я понимаю то общее понятие, под которое подпадает как оно, так и все подобные ему множества и только они. (Понятие подобия я употребляю в более ограничительном смысле, чем это имеет место у Вас; две просто упорядоченные множественности я называю подобными, если их можно так взаимно однозначно отобразить друг на друга, что при этом отношение порядка между соответствующими элементами в обеих множественностях остается тем же самым.)

Множественность называется *вполне упорядоченной*, если она удовлетворяет тому условию, что всякая подмножественность имеет *первый* элемент. Такую множественность я коротко называю «последовательностью».

Всякая часть «последовательности» является «последовательностью».

Если теперь имеется последовательность F, обладающая характером множества, то тип у F я называю ее «*порядковым числом*» или, короче, ее «числом». Так что если в последующем я говорю о числах, то имею в виду только порядковые числа, т. е. типы вполне упорядоченных множеств.

Теперь я рассматриваю систему *всех чисел* и обозначаю ее через Ω.

В «Math. Ann.», т. 49, с. 216 [здесь I. 10, § 13] доказано, что из

двух различных чисел α и β одно всегда меньше, а другое больше и что если о трех числах известно, что $\alpha<\beta$, $\beta<\gamma$, то $\alpha<\gamma$.

Следовательно, Ω является просто упорядоченной системой.

Но из доказанных в § 13 теоремах о вполне упорядоченных множествах легко также вытекает, что всякая множественность чисел, т. е. всякая часть системы Ω, содержит *наименьшее число*.

Поэтому система Ω в ее естественном расположении по величине образует «последовательность».

Если к этой последовательности мы присоединим еще элемент 0, поставив его на первое место, то получим последовательность Ω':

$$0, 1, 2, 3, \ldots, \omega_0, \omega_0+1, \ldots, \gamma, \ldots,$$

относительно которой легко убедиться, что *всякое* входящее в нее число γ является *типом последовательности всех предшествующих ему элементов* (включая 0). (Последовательность Ω обладает этим свойством только для $\gamma\geqslant\omega_0$.)

Система Ω' (а потому и Ω) не может быть *консистентной* совокупностью. Если бы Ω' была консистентной, то ей, как вполне упорядоченному множеству, соответствовало бы некоторое число δ, которое было бы больше всех чисел системы Ω. Но в систему Ω входит и число δ, так как она включает *все* числа. Поэтому δ было бы больше δ, что противоречиво. Итак,

А. *Система Ω всех чисел является неконсистентной, она есть некоторая абсолютно бесконечная множественность.*

Так как *подобие* вполне упорядоченных множеств одновременно обеспечивает их *эквивалентность*, то всякому числу γ соответствует определенное кардинальное число $\aleph(\gamma)=\gamma$, а именно кардинальное число вполне упорядоченных множеств, имеющих тип γ.

Кардинальные числа, соответствующие в этом смысле *трансфинитным* числам системы Ω, я называю «алефами», а *систему всех алефов* обозначаю через ת (тау, последняя буква еврейского алфавита).

Систему всех чисел γ, соответствующих одному и тому же кардинальному числу $\mathfrak{c}$, я называю «*числовым классом*» и притом числовым классом $Z(\mathfrak{c})$. Легко видеть, что во всяком числовом классе имеется наименьшее число γ_0 и что вне класса $Z(\mathfrak{c})$ существует такое число γ_1, что условие

$$\gamma_0\leqslant\gamma<\gamma_1$$

равнозначно с принадлежностью числа γ к числовому классу $Z(\mathfrak{c})$. Следовательно, всякий числовой класс является определенным «отрезком» последовательности Ω [3].

Некоторые числа системы Ω образуют — каждое само по себе — числовые классы. Это суть «*конечные*» числа $1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots$, которым

---

[3] Здесь опять-таки используется уже упомянутая теорема, что *всякая* совокупность чисел, а значит и *всякая* подмножественность системы Ω, имеет некий *минимум*, некоторое *наименьшее число*.

соответствуют различные «конечные» кардинальные числа $\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \ldots$ $\ldots, \overline{\nu}, \ldots$

Если ω_0 — наименьшее трансфинитное число, то соответствующий ему алеф я обозначаю через $\aleph_0$, так что

$$\aleph_0 = \overline{\omega_0};$$

$\aleph_0$ является *наименьшим* алефом и определяет числовой класс

$$Z(\aleph_0) = \Omega_0.$$

Числа α из $Z(\aleph_0)$ удовлетворяют условию

$$\omega_0 \leqslant \alpha < \omega_1$$

и этим характеризуются; здесь ω_1 — наименьшее трансфинитное число, кардинальное число которого не равно $\aleph_0$. Если положить

$$\overline{\omega_1} = \aleph_1,$$

то $\aleph_1$ не только отличен от $\aleph_0$, но и является непосредственно следующим по величине алефом, так как можно доказать, что между $\aleph_0$ и $\aleph_1$ вообще не существует никакого кардинального числа. Так получается непосредственно примыкающий к Ω_0 числовой класс $\Omega_1 = Z(\aleph_1)$. Он содержит все числа β, удовлетворяющие условию

$$\omega_1 \leqslant \beta < \omega_2;$$

здесь ω_2 — наименьшее трансфинитное число, кардинальное число которого отлично от $\aleph_0$ и $\aleph_1$.

$\aleph_2$ — непосредственно следующий по величине за $\aleph_1$ алеф и он определяет непосредственно следующий за Ω_1 числовой класс $\Omega_2 = Z(\aleph_2)$, состоящий из всех чисел γ, которые $\geqslant \omega_2$ и $< \omega_3$, где ω_3 — наименьшее трансфинитное число, кардинальное число которого отлично от $\aleph_0$, $\aleph_1$ и $\aleph_2$, и т. д. Отмечу еще, что

$$\overline{\overline{\Omega}}_0 = \aleph_1, \quad \overline{\overline{\Omega}}_1 = \aleph_2, \ldots, \quad \overline{\overline{\Omega}}_\nu = \aleph_{\nu+1},$$

$$\sum_{\nu'=0,1,2,\ldots,\nu} \aleph_{\nu'} = \aleph_\nu$$

— все это легко доказывается.

Среди трансфинитных чисел системы Ω, которым в качестве кардинального числа не соответствует никакой из $\aleph_\nu$ [с конечным ν], опять-таки имеется наименьшее, которое мы обозначаем через ω_{ω_0} и с его помощью получаем новый алеф

$$\aleph_{\omega_0} = \omega_{\omega_0},$$

определяемый равенством

$$\aleph_{\omega_0} = \sum_{\nu=0,1,2,\ldots} \aleph_\nu,$$

и он оказывается кардинальным числом, *непосредственно следующим по величине* за всеми $\aleph_\nu$.

Мы убеждаемся, что этот процесс образования алефов и соответствующих им числовых классов системы Ω является *абсолютно* безграничным.

В. *Система* ת *всех алефов*

$$\aleph_0, \aleph_1, \ldots, \aleph_{\omega_0}, \aleph_{\omega_0+1}, \ldots, \aleph_{\omega_1}, \ldots$$

при их расположении по величине образует подобную системе Ω, *а потому тоже неконсистентную абсолютно бесконечную последовательность.*

Теперь возникает вопрос: *все ли трансфинитные кардинальные числа* содержатся в этой системе ת? Другими словами, существует ли *множество*, мощность которого *не является алефом*?

На этот вопрос следует ответить *отрицательно*, и основанием для этого служит осознанная нами *неконсистентность* систем Ω и ת.

Доказательство. Если мы возьмем определенную множественность V и предположим, что ей не соответствует *никакой алеф в качестве кардинального числа*, то получим, что V должна быть *неконсистентной.*

Действительно, легко видеть [1], что при сделанном предположении вся система Ω проектируется в множественность V, т. е. должна существовать подмножественность V' множественности V, которая эквивалентна системе Ω.

V' *неконсистентна*, так как неконсистентна Ω, поэтому то же самое приходится утверждать и о V.

Следовательно, всякая трансфинитная *консистентная множественность*, каждое трансфинитное множество, имеет в качестве кардинального числа некий определенный алеф. Итак,

С. *Система* ת *всех алефов есть не что иное, как система всех трансфинитных кардинальных чисел.*

Поэтому все множества *«перечислимы» в некотором расширенном смысле*, в частности «перечислимы» все *«континуумы»*.

Далее, из С мы убеждаемся в правильности теоремы, высказанной в «Math. Ann.», Bd. 46 [здесь I.10, § 2]:

«Если $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ – произвольные кардинальные числа, то или $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}$, или $\mathfrak{a}<\mathfrak{b}$, или $\mathfrak{a}>\mathfrak{b}$».

Действительно, алефы, как мы видели, обладают этим свойством величин.

XLVI.
Кантор — Дедекинду

Ханенклее, 28 авг. 1899 г.

... Приходится спросить: откуда же я знаю, что вполне упорядоченные множественности или последовательности, которым я приписываю кардинальные числа

$$\aleph_0, \aleph_1, \ldots, \aleph_{\omega_0}, \ldots, \aleph_{\omega_1}, \ldots,$$

действительно являются «множествами» в объясненном смысле этого

слова, т. е. «консистентными множественностями?» Нельзя ли вообразить, что «неконсистентными» окажутся уже *эти* множественности и что противоречивость предположения о «совместном бытии всех их элементов» осталась *еще незамеченной*? Мой ответ на это состоит в том, что указанный вопрос *относится и к конечным множественностям* и что точное размышление приводит к такому результату: даже для конечных множественностей *нельзя* осуществить «доказательство» их «консистентности». Другими словами, факт «консистентности» конечных множественностей является простой недоказуемой истиной — это *«аксиома* арифметики» (в старом смысле слова). Равным образом «консистентность» множественностей, которым я приписываю алефы в качестве кардинальных чисел, является «аксиомой обобщенной трансфинитной арифметики».

XLVII.
Кантор — Дедекинду

Ханенклее, 31 авг. 1899 г.

... Эквивалентные «множества» мы будем относить в один и тот же *класс* мощностей, а неэквивалентные — в разные классы и будем рассматривать систему

S всех мыслимых классов $\mathfrak{a}$.

Одновременно под $\mathfrak{a}$ я понимаю кардинальное число или мощность множеств соответствующего класса, которая является одной и той же для всех этих множеств.

Пусть $M_{\mathfrak{a}}$ — какое-либо определенное множество класса $\mathfrak{a}$.

Я утверждаю, что вполне определенная система *S не является «множеством»*.

Доказательство. Если бы *S* была множеством, то *множеством* была бы и сумма

$$T = \sum M_{\mathfrak{a}},$$

где суммирование производится по всем классам $\mathfrak{a}$, а значит, *T* принадлежала бы некоторому определенному классу, скажем классу $\mathfrak{a}_0$.

Но справедлива следующая теорема:

«Если *M* — какое-либо множество кардинального числа $\mathfrak{a}$, то из него всегда можно получить другое множество *M'*, кардинальное число которого $\mathfrak{a}'$ больше $\mathfrak{a}$».

Эту теорему я доказал при помощи *регулярного метода* в наиболее доступных для нас случаях, когда $\mathfrak{a}$ равно $\aleph_0$ (счетность в обычном смысле слова) и равно $\mathfrak{c}$, где $\mathfrak{c}$ означает мощность арифметического континуума, в *первом* томе докладов «Немецкого математического общества» [здесь I.9]. Этот метод *без каких-либо трудностей* можно перенести на любое кардинальное число $\mathfrak{a}$. Его смысл можно просто передать формулой

$$2^{\mathfrak{a}} > \mathfrak{a}.$$

Пусть теперь $\mathfrak{a}_0'$ — какое-нибудь кардинальное число, большее $\mathfrak{a}_0$.

Тогда T с мощностью $\mathfrak{a}_0$ содержит как часть множество $M_{\mathfrak{a}_0}'$ большей мощности $\mathfrak{a}_0'$, что противоречиво.

Следовательно, система T, а значит, и система S *не являются множествами. Поэтому существуют определенные* множественности, *одновременно не являющиеся единствами*, т. е. такие множественности, для которых *невозможно* реальное «совместное бытие всех их элементов». Это суть те, которые я называю «неконсистентными системами»; остальные же я называю «множествами».

XLVIII.
Дедекинд — Кантору

29 августа 1899 г.

Теорема из теории систем. Если система U является частью системы T, последняя – частью системы S и S подобна U, то и S подобна T.

Доказательство [2]. Теорема очевидно тривиальна, если T идентична S или U. В противном случае, когда T является правильной частью системы S, пусть A будет системой всех тех элементов из S, которые не содержатся в T, а значит (в обозначениях Дедекинда, Кантора, Шрёдера),

$$S = \mathfrak{M}(A, T) = (A, T) = A + T \text{ [36]}.$$

По предположению S подобна некоторой (правильной) части U системы T. Следовательно, существует подобное отображение φ системы S в себя, при помощи которого S переходит в $S' = \varphi(S) = U$. Пусть A_0 – «цепь системы A» [3] (§ 4 и 8 моего сочинения «Что такое числа и для чего они служат?»), а значит,

$$A_0 = A + A_0'.$$

Так как A_0 является частью системы S, а значит, и $A_0' = \varphi(A_0)$ есть часть системы $S' = \varphi(S) = U$, то и A_0' тоже является правильной частью системы T. Поэтому имеем, что A и A_0' не имеют ни одного общего элемента и A_0 тоже является правильной частью S. Пусть B – система всех тех элементов из S, которые не содержатся в A_0, а значит,

$$S = A + T = A_0 + B, \qquad T = A_0' + B,$$

где A_0', как часть системы A_0, не имеет ни одного общего элемента с B. Теперь определяем отображение ψ системы S, полагая

$$\psi(s) = \varphi(s) \quad \text{или} \quad \psi(s) = s$$

в зависимости от того, содержится ли в A_0 элемент s из S или нет. Это отображение ψ системы S подобно. Действительно, когда s_1, s_2, – два различных элемента из S, то они *или* содержатся в A_0 и тогда $\psi(s_1) = \varphi(s_1)$ отличен от $\psi(s_2) = \varphi(s_2)$, поскольку φ является подобным отображением S (что впервые используется здесь и только здесь); *или же* они содержатся в B и тогда $\psi(s_1) = s_1$ отличен от $\psi(s_2) = s_2$; *или*, нако-

нец, один элемент s_1 содержится в A_0, а другой s_2 — в B и тогда $\psi(s_1)=\varphi(s_1)$ отличен от $\psi(s_2)=s_2$, поскольку $\psi(s_1)$ содержится в A_0', а s_2 в B.

При помощи этого подобного отображения ψ система $S=A_0+B$ переходит в

$$\psi(S)=\psi(B)+\psi(A_0)=\varphi(A_0)+B=T,$$

ибо $\psi(A_0)=\varphi(A_0)=A_0'$ и $\psi(B)=B$, что и требовалось доказать.

XLIX.
Кантор — Дедекинду

Ханенклее, 30 авг. 1899 г.

Большое спасибо за Ваше дружеств. письмо, которое я получил вчера вечером, особенно за набросок простого доказательства, данного Вами теореме С (а тем самым и теореме В) моей работы при помощи вспомогательных средств Вашего сочинения «Что такое числа и для чего они служат?» Если отвлечься от формы, то оно совпадает (если я не ошибаюсь) с доказательством Шрёдера, сообщенном впервые осенью 1896 г. на заседании естествоиспытателей во Франкфурте на Майне и опубликованном полтора года спустя в одном из выпусков «Трудов Леопольдины», которое осенью 1897 г. самостоятельно повторил молодой г-н Феликс Бернштейн на семинаре в Галле [37]. Было бы, однако, очень ценным, если бы Вы при помощи тех же вспомогательных средств доказали и основную теорему А (из которой остальные теоремы В, С, D, Е легко получаются как следствия).

Выясним, что достигли бы мы, кроме уже найденного доказательства теоремы В.

С чисто логической точки зрения для двух произвольных множеств M и N представляются *четыре* взаимно исключающих друг друга случая:

I. Существует часть множества N, которая эквивалентна (в Вашей терминологии «подобна») M, но, напротив, не существует части множества M, которая была бы эквивалентна N;

II. Не существует части множества N, которая была бы эквивалентна M, но зато существует часть M_1 множества M, которая эквивалентна N;

III. Существует часть N_1 множества N, которая эквивалентна M, и существует также часть M_1 множества M, которая эквивалентна N; [4]

IV. Не существует ни части множества N, которая была бы эквивалентна M, ни части множества M, которая была бы эквивалентна N.

Если через $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ обозначить кардинальные числа множеств M и N, то по введенному мною определению для «меньше» и «больше»:

в случае I $\mathfrak{a}<\mathfrak{b}$,

в случае II $\mathfrak{a}>\mathfrak{b}$.

[4] Когда я говорю о «части», то всегда имею в виду «правильную часть».

Поэтому остается доказать, что *как* в случае III, *так и* в случае IV множества M и N эквивалентны, а значит, $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}$. Для случая III это установлено Вами, г-ном Шрёдером и Ф. Бернштейном при помощи прямого доказательства теоремы C. *Остается, следовательно, получить доказательство такой теоремы*: «Если два множества M и N обладают тем свойством, что ни M не эквивалентно никакой части («правильной части» в Вашей терминологии) множества N, ни N не эквивалентно никакой части множества M, то M и N эквивалентны (а потому оба являются конечными множествами)».

Шрёдер категорически заявил, что не может доказать эту теорему; мне *тоже* не удалось это доказательство *при помощи тех простых средств*, которыми Вы пользовались для доказательства теоремы C, соотв. B; я смог доказать ее только косвенным образом — при помощи теоремы A, доказательство которой я набросал в моем письме от 3 авг.

[Примечания]

Помещенная здесь часть переписки (до сих пор неопубликованной) обоих исследователей является существенным и необходимым дополнением сочинений прежде всего потому, что она отражает последние мысли Кантора о системе *всех* порядковых чисел и *всех* алефов, а также о «консистентных» и «неконсистентных» совокупностях вообще. Но для современного читателя может представить интерес и рассмотрение «теоремы эквивалентности», и вопрос о «сравнимости» произвольных множеств, и прежде всего попытка доказать теорему, что всякая мощность является алефом. Дедекиндовское доказательство теоремы эквивалентности [письмо XLVIII] (еще до недавнего времени неизвестное и впервые публикуемое здесь) еще и сегодня можно считать классическим, тогда как попытку Кантора доказать [конец письма XLV], что всякая мощность является алефом, и сам ее автор позднее, по-видимому, признал неудачной.

[1] (к XIV). Именно здесь находится слабое место этого наброска доказательства. То, что весь числовой ряд Ω должен «проектироваться» во всякую множественность V, кардинальное число которой не является алефом, здесь *не* доказано, а заимствовано в некотором смутном «узрении». По-видимому, Кантор представлял себе числа из Ω последовательно и произвольно сопоставляемыми элементами из V, так, что каждый элемент в V берется только *один раз*. Этот процесс *или* когда-то должен завершиться тем, что будут исчерпаны все элементы множественности V, и тогда V оказалось бы поставленной в соответствие с отрезком числового ряда, а ее мощность была бы алефом, вопреки предположению. *Или же* V осталась бы неисчерпанной, и тогда она содержала бы составную часть, эквивалентную всему Ω, а потому неконсистентную. Здесь, следовательно, к процессу, выходящему за пределы всякой наглядности, применяется временно́е представление и придумывается некая сущность с тем, чтобы можно было осмыслить *последовательные* произвольные выборы и тем самым определить подмножество V' множественности V, которое как раз не определяется выставленными условиями. Лишь благодаря применению «аксиомы выбора», в которой постулируется возможность *одновременного* выбора и которую Кантор неосознанно и инстинктивно применял всюду, но нигде явно не сформулировал, можно было бы определить V' как подмножество V. Но и тогда все еще остаются те соображения, что в этом доказательстве фигурируют «неконсистентные» множественности, даже, пожалуй, противоречи-

вые понятия, и уже поэтому оно было бы логически недопустимым. Как раз соображения этого рода выдвинул издатель несколько лет спустя с целью обосновать свое доказательство теоремы о вполне упорядочении (Math. Ann., 1904, Bd. 59, S. 514) только с помощью аксиомы выбора и *без* применения неконсистентных множественностей [38].

[2] (к XLVIII). Настоящее доказательство сформулированной здесь теоремы, фактически равнозначной «теореме эквивалентности» Шрёдера — Бернштейна, осуществляется чисто логически при помощи понятий дедекиндовской теории «цепей» и лишь несущественно отличается от доказательства, опубликованного издателем в 1908 г. в «Math. Ann.», Bd. 65, S. 271—272, не знавшего дедекиндовского [39]. Почему ни Дедекинд, ни Кантор не решились тогда опубликовать это все же немаловажное доказательство — сегодня не очень понятно.

[3] (там же). Если система (=множество) S взаимно однозначно («подобно») отображается на свою часть S' и A — произвольная составная часть системы S, то под «цепью системы A» Дедекинд понимает пересечение всех таких составных частей A_1 системы S, которые: 1) содержат в себе A и 2) вместе с каждым своим элементом s содержат и соответствующий образ s' этого элемента. Тогда эта «цепь» A_0 есть не что иное, как объединение множеств $A, A', A'', \ldots$, полученных из A последовательным применением отображения φ системы S на S'.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПОСЛЕСЛОВИЕ

Когда перевод русского издания теоретико-множественных работ Г. Кантора находился в начальной стадии, предполагалось, что предисловие к нему напишет академик П. С. Александров. В августе 1980 г. П. С. Александров подготовил краткий черновой набросок предисловия [1], который предполагал развить подробнее. Выполнению этого намерения помешала его тяжелая болезнь и последовавшая 16 ноября 1982 г. смерть. В первых словах своего наброска П. С. Александров писал: «Думаю, что во второй половине XIX века не существовало математика, оказавшего большее влияние на развитие математической науки, чем создатель абстрактной теории множеств Георг Кантор», далее он в немногих словах охарактеризовал вклад Кантора как в общую, или абстрактную, теорию множеств, так и в теорию точечных множеств, которая выросла затем в теоретико-множественную топологию.

Идеи бесконечно большой или бесконечно малой величины, а также бесконечного множества появились в древней Греции примерно за полтысячелетия до начала н. э. Эти идеи долгое время не были высказаны в виде сколько-нибудь четких определений, но уже вскоре поставили философов и математиков перед чрезвычайными трудностями так же, как непосредственно с ними связанная проблема свойств континуума в его взаимоотношении с дискретным. Одним из ярких свидетельств этих трудностей, наложивших печать на всю инфинитезимальную математику, явились апории (т. е. в буквальном переводе затруднения или недоумения) Зенона Элейского (V в. до н. э.). Эти апории, известные нам только в изложении более поздних авторов, например жившего приблизительно на сто лет позднее Аристотеля, на протяжении двух с половиной тысяч лет толковались и разрешались по-разному. В настоящее время некоторые авторы усматривают в них трудности, присущие понятию актуально бесконечного множества.

Оставляя полностью в стороне особый вопрос о свойствах инфинитезимальных, т. е. бесконечно больших и бесконечно малых величин, мы из всей богатой предыстории канторовской теории множеств приведем только несколько моментов. В средневековой нутурфилософской и математической литературе интенсивно обсуждались свойства континуума и

---

[1] Этот набросок напечатан в «Историко-математических исследованиях», 1983, вып. 27, с. 290—292, под названием «О вкладе Георга Кантора в математику».

конкурировали три концепции: восходящая к Аристотелю, согласно которой континуум составляется не из неделимых атомов, но из однородных с ним частей, делимых без конца, и две другие, также восходящие к античным первоисточникам, согласно которым континуум образуется либо из конечного, либо из бесконечного количества неделимых элементов. При этом были сопоставлены идеи актуальной и потенциальной бесконечности, и ряд мыслителей в некоторой мере предвосхитили теоретико-множественный подход к количественному сравнению между собой бесконечных множеств. Так, Т. Брадвардин в сочинении, написанном между 1328 и 1335 г., обосновывал свою критику инфинитно-атомистического понимания континуума, устанавливая — в терминологии нашего времени — взаимно однозначное соответствие между элементами бесконечных множеств, например между точками двух отрезков разной длины, и выводя таким образом следствия, представлявшиеся парадоксальными. Другие парадоксы Брадвардин получал, поэлементно сопоставляя площади прямолинейных фигур, рассматриваемых как актуально бесконечные множества образующих их отрезков. Но дело не ограничивалось общими размышлениями о природе трансфинитных объектов. На основе трактовки двухмерного континуума как бесконечной совокупности его одномерных элементов ученые Оксфордской и Парижской натурфилософских школ XIV в. определили путь, проходимый за данное время движущейся равномерно-ускоренно точкой. Сходный вывод предложил почти три века спустя Г. Галилей, который в отличие от своих средневековых предшественников трактовал вопрос не в абстрактном плане, но как конкретную задачу о падении на Землю подброшенных тяжелых тел (без учета сопротивления воздуха).

Тот же Галилей обнаружил парадоксы, возникающие при отображении счетного множества на его бесконечное подмножество. Например, он показал, что можно установить взаимно однозначное соответствие между множеством всех натуральных чисел и его подмножеством, состоящим из одних целых квадратов (1638). Отсюда Галилей сделал заключение, что отношения «равно», «больше» и «меньше» применимы только к конечным количествам, но не к бесконечным.

Здесь не место для изложения истории учения о бесконечном на протяжении эпохи становления и расцвета классического математического анализа, т. е. за XVII, XVIII и первые три четверти XIX вв. Общее мнение математиков было таково, что в анализе приходится и следует иметь дело только с потенциально бесконечно большими и малыми переменными, и хотя они часто по ходу дела оперировали актуально бесконечными классами множеств, но такие множества долгое время не были предметом специального исследования. Первым исключением здесь явился Б. Больцано, который в «Парадоксах бесконечного» (Paradoxien des Unendlichen. Leipzig, 1851), изданных в 1851 г., через три года после кончины автора, со всей отчетливостью высказал мысль о существовании различных градаций актуально бесконечного, вновь использовал процедуру установления взаимно однозначного соответствия, сделал попытку определения континуума и в некоторых пунктах подошел к иде-

ям теории множеств Г. Кантора. Однако Больцано не ввел основных понятий этой теории, начиная с понятия мощности и соответственно не выделил даже основные классы бесконечных множеств[2]. В своей большой работе «О бесконечных линейных точечных многообразиях» (1879—1884) Кантор высоко оценил принципиальные установки Больцано, отметив одновременно и некоторые слабые стороны его учения (см. § 7 и 10 из I.5.5 названного сочинения). Трудно сказать, был ли знаком Кантор с «Парадоксами бесконечного», когда приступал к разработке своей собственной теории. Это вполне возможно, так как одно из важнейших сочинений Больцано (о нулях непрерывной функции, имеющей на концах отрезка разные знаки) получило известность в кругах, близких к К. Вейерштрассу, во второй половине 60-х годов прошлого столетия. Однако это вопрос второстепенного значения, ибо отправнымпунктом исследований Кантора явилась конкретная аналитическая проблема совсем другого рода.



Георг Кантор

В эпоху, когда Кантор приступил к разработке теории множеств, к ее идеям с разных сторон подходили и другие математики, более всего Р. Дедекинд. Истории теории множеств в XIX в. посвящено специальное исследование Ф. А. Медведева, переводчика и комментатора данного собрания сочинений Кантора, и к нему мы отсылаем интересующихся этой историей читателей[3]. Здесь же мы кратко наметим некоторые основные вехи творческого пути Кантора на протяжении 1872—1899 гг., за которые он прошел весь свой путь как создатель теории множеств в ее первоначальной (и во многом сохранившейся) форме, от введения первых понятий до обнаружения новых парадоксов, которые открыли в известном смысле совершенно иной период развития и повлекли за собой бурный расцвет математической логики.

Непосредственный стимул к теоретико-множественным исследованиям сообщили Кантору его занятия теорией тригонометрических рядов. После того как в одной статье 1870 г. он доказал теорему единственности представления функции сходящимся к ней на отрезке тригонометрическим рядом общего вида, его заинтересовал вопрос о возможности

---

[2] *Больцано Б.* Парадоксы бесконечного/Пер. И. В. Слешинского. Одесса, 1911.
[3] *Медведев Ф. А.* Развитие теории множеств в XIX веке. М.: Наука, 1965.

обобщения теоремы на случай, когда сходимость ряда имеет место не во всех точках отрезка. И вот уже в статье 1872 г. [I.1][4] Кантор обобщил теорему единственности на сравнительной простой, но более широкий класс функций, когда сходимость имеет место всюду, за исключением некоторого класса бесконечных точечных множеств. В этой статье вводятся понятия предельной точки множества и производных множеств различных конечных порядков; теорема единственности оказывается верной для случая, когда множеством особых точек является множество, одно из производных множеств которого нулевое. Кроме того, в этой же статье Кантор предложил носящую его имя теорию действительных чисел, по времени практически совпадающую с теориями, разработанными независимо друг от друга Ш. Мерэ, К. Вейерштрассом и Р. Дедекиндом.

Через два года (1874; см. [I.2]) Кантор доказывает счетность множества всех действительных алгебраических чисел и несчетность континуума; впрочем, понятие «счетного» множества он сформулировал позднее в работе [I.3], появившейся в 1878 г. Подчеркнем, что в статье 1878 г. вводится общее понятие мощности, включающее трансфинитные множества, доказывается теорема о равномощности континуумов различного числа измерений, высказывается гипотеза континуума.

В упомянутом уже цикле статей 1879—1884 гг. [I.5] теория множеств разработана в весьма широком плане, и этот цикл является важнейшим по содержанию теоретико-множественным трудом Кантора. Тут появляются различные классы точечных множеств (изолированных, всюду плотных, замкнутых, совершенных и т. д.); в частности, строится знаменитый пример «канторова» совершенного и нигде не плотного множества; вводятся операции суммирования и пересечения для множеств; формулируется и доказывается так называемая теорема Кантора — Бендиксона[5]. Здесь же проводится четкое различение кардинальных и ординальных (порядковых) чисел с обобщением на трансфиниты. Параллельно в 1884 г. доказывается, что всякое совершенное непустое множество имеет мощность континуума [I.7].

В статье [I.8], опубликованной в 1885 г., Кантор распространяет ряд теорем о замкнутых множествах на незамкнутые и среди прочего выражает некоторое сомнение в справедливости гипотезы континуума. Как известно, независимость гипотезы континуума от классической аксиоматики теории множеств была доказана П. Коэном в 1963 г., после того как К. Гёдель в 1940 г. показал непротиворечивость этой гипотезы.

Далее в связи с ухудшением состояния здоровья Кантора его продуктивность заметно ослабевает. Все же в последующие годы выходит из печати заметка ([I.9], 1890—1891) с изложением диагонального ме-

---

[4] Цифры в квадратных скобках обозначают: римская — номер раздела данной книги, арабская — номер соответствующей работы Г. Кантора в этом разделе.

[5] Первоначальная формулировка этой теоремы у Кантора была неточной. Бендиксон в 1883 г. внес необходимое уточнение, после чего оба они привели полное доказательство.

года и несколько философско-математических работ ([II.2, II.3], 1886—1888). После временного выздоровления Кантор дает еще одно, наиболее систематизированное изложение разработанной им теории ([I.10], 1895—1897). Эта работа явилась последней математической публикацией Кантора. Но к этому необходимо добавить, что в письмах 1896 и 1899 гг. (первое из них утеряно) Кантор обнаруживает первые парадоксы теории множеств (см. [Письмо XLV]), которые были в печати сформулированы затем другими математиками, открывшими их независимо. Пути к их решению ему найти не удалось.

Идеи Кантора встречены были его современниками по-разному. К. Вейерштрасс, Р. Дедекинд, У. Дини, первоначально А. Пуанкаре, Д. Гильберт и др. признали их выдающееся значение. Но были и убежденные противники их, как Л. Кронекер, позднее тот же А. Пуанкаре и еще некоторые. Широкое признание теория Кантора получила на I Международном конгрессе математиков в Цюрихе в 1897 г.

Мы не можем описывать дальнейшую судьбу теории множеств сколько-нибудь полно. Укажем лишь, прежде всего, на появление сильной школы теории множеств и функций во Франции конца XIX и начала XX в. Наиболее видными представителями этой школы были Э. Борель, А. Лебег, Р. Бэр, М. Фреше, а за ними многие другие. Выдающееся значение имели также работы немецкого математика Э. Цермело, положившего начало аксиоматизации теории множеств (1908). Работы названных французских математиков сообщили толчок оригинальному и блестящему развитию теории множеств и функций в России, сначала в московской математической школе. В заключение мы несколько подробнее остановимся на первом этапе деятельности этой школы.

Идеи теории множеств и теории функций действительного переменного начали распространяться в России в 90-е годы XIX в. Первым или одним из первых обратил на них внимание одесский математик И. Ю. Тимченко. В предисловии к своему сочинению об основаниях теории аналитических функций, напечатанном в 1892 г., он упомянул возникшую в «новейшее время целую отрасль науки, известную в Германии под названием «Mannigfaltigkeitslehre», добавив, что важнейшие работы по этому предмету принадлежат Георгу Кантору[6]. Опубликовал Тимченко только 1-й том I части этого сочинения, содержащий изложение истории теории аналитических функций, взятой в очень широком плане, до 1825 г. Во второй части Тимченко собирался дать главу о началах геометрии многообразий двух измерений, внушенную, по его словам, чтением работ Кантора[7], однако эта вторая часть света не увидела; первую часть, законченную в 1899 г., он защитил в качестве магистерской диссертации.

---

[6] *Тимченко И.* Основания теории аналитических функций. Ч. 1. Исторические сведения о развитии понятий и методов, лежащих в основании теории аналитических функций. Одесса, 1899, т. 1, с. 11. Продолжение этого труда света не увидело. Первоначально книга была напечатана в XII, XVI и XIX тт. «Записок Математического отделения Новороссийского общества естествоиспытателей» (1892—1899).

[7] Там же, с. 12—13.

В издававшемся в той же Одессе журнале «Вестник опытной физики и элементарной математики» была напечатана в русском переводе С. О. Шатуновского классическая работа Р. Дедекинда «Непрерывность и иррациональные числа» (№ 191—192, 1894) и некоторое время спустя статья Шатуновского «Доказательство существования трансцендентных чисел (по Кантору)» (№ 233, 1896). В 1905 г. Шатуновский начал читать в Одесском (тогда Новороссийском) университете курс введения в анализ, в котором существенно использовал многие основные теоретико-множественные понятия и методы. Этот курс, литографированный в 1906—1907 гг. и оказавший влияние на ряд слушателей, ставших впоследствии видными учеными, как Г. М. Фихтенгольц, Д. А. Крыжановский, И. В. Арнольд, был построен очень оригинально и содержал интересные результаты самого автора,— например, важное обобщение понятия предела, более полно развитое в 1915—1922 гг. Э. Х. Муром и Г. Л. Смитом. Однако печатное издание курса Шатуновского в 1923 г.[8] уже не могло оказать влияние на развитие теоретико-множественных идей в России.

С начала XX в. сведения по теории множеств и теории функций в том или ином объеме включаются в курсы и руководства целого ряда университетов России и вместе с тем начинаются исследования в обоих направлениях, тесно между собой связанных. Петербург, где решающую роль в университетской жизни играли тогда выдающиеся представители школы Чебышева, равнодушно или даже отрицательно относившиеся к некоторым слишком абстрактным в их глазах новейшим течениям математической мысли, еще два десятилетия оставался почти полностью в стороне. В Казани пропагандистом теории множеств явился проф. А. В. Васильев[9], в Москве в 1900—1901 гг. прочитал впервые курс теории функций действительного переменного проф. Б. К. Млодзеевский. Воспитанник Казанского университета В. Л. Некрасов выступил с докладом по теории функций на Киевском 10-м Всероссийском съезде естествоиспытателей и врачей в 1898 г., а затем продолжил занятия в этой области в Томском технологическом институте, где получил профессуру в 1901 г. Здесь он подготовил первый на русском языке обширный труд по теории множеств, содержавший обстоятельный исторический очерк, изложение новейших зарубежных исследований, в том числе по теории меры, а также некоторые собственные результаты автора. Книга, печатавшаяся два с половиной года, была издана под названием «Строение и мера линейных точечных областей» (Томск, 1907) и защищена как магистерская диссертация в Московском университете в 1908 г. В том же году Некрасов опубликовал еще одну статью по теории точечных множеств в «Известиях Томского технологического института».

Основным центром развития теории множеств и теории функций явилась Москва. Как сказано, курс теории функций в Московском универ-

---

[8] *Шатуновский С. О.* Введение в анализ. Одесса, 1923. Как сказано в предисловии, к печати книгу подготовил И. В. Арнольд.

[9] *Васильев А. В.* Введение в анализ. Казань, 1904—1908. Вып. 1—2

ситете начал в 1900—1901 учебном году читать Б. К. Млодзеевский, по специальности дифференциальный геометр. В 1906—1907 гг. приват-доцент (позднее профессор) И. И. Жегалкин также впервые прочитал здесь курс абстрактной теории множеств, которой он посвятил свою магистерскую диссертацию «Трансфинитные числа» (Москва, 1907) [10], защищенную в том же 1908 г., что и диссертация В. Л. Некрасова. Одним из оппонентов в обоих случаях был Б. К. Млодзеевский. Богатая содержанием книга Жегалкина завершалась главой о парадоксах теории множеств и словами о том, что многочисленные попытки решения все неудовлетворительны и это является задачей будущего; впоследствии он занялся математической логикой. Но главную роль в расцвете теоретико-множественных и теоретико-функциональных исследований в Московском университете сыграли профессор Д. Ф. Егоров и его ученик профессор Н. Н. Лузин. Деятельность обоих этих ученых освещалась неоднократно, в том числе в работах ряда крупнейших представителей основанной ими московской математической школы. Отсылая читателя за подробностями к этим работам [11], мы ограничимся немногими замечаниями. Д. Ф. Егоров и Н. Н. Лузин в некотором смысле прекрасно дополняли друг друга. Егорова отличала большая широта интересов и чуткая восприимчивость к новейшим направлениям математической мысли в области вариационного исчисления, интегральных уравнений и теории функций, которые он энергично пропагандировал в Москве, правильно расценивая их решающее значение для всего дальнейшего прогресса математики. Лузин сосредоточил свои усилия на разработке нескольких ветвей теории функций и теории множеств и получил в них результаты первостепенной важности. Оба — при всем различии характеров — были замечательными руководителями студенческой молодежи и начинающих исследователей. Чуть ли не все выдающиеся московские математики первой трети нашего века явились учениками обоих или, по крайней мере, одного из них. Напомним несколько дат, существенных для первого этапа истории Московской школы теории функций и множеств: 1910 г.— начал работать семинар Егорова по большому кругу вопросов современного анализа [12]; 1911 г.— Егоров опубликовал носящую его имя важную теорему о последовательностях измеримых функций; 1912 г.—год публикации известной теоремы Лузина о C-свойстве измеримых функций;

---

[10] Выход в свет этой книги иногда датируют 1908 г. Дело в том, что на титульном листе указан 1907 г., а на обложке — 1908 г.

[11] См.: *Степанов В. В.* Московская школа теории функций.— Уч. зап. Моск. гос. ун-та, 1947, вып. 91, с. 47—52; *Александров П. С., Гнеденко Б. В., Степанов В В.* Математика в Московском университете в XX веке (до 1910 г.).— ИМИ, 1948, вып. 1, с. 9—42; *Александров П. С.* Математика в Московском университете в первой половине XIX века.— ИМИ, 1955, вып. 8, с. 9—54; Математика в СССР за тридцать лет. 1917—1947 г. М.: Л.: Гостехтеориздат, 1948, с. 243—288 (статьи о дескриптивной теории множеств А. А. Ляпунова и П. С. Новикова и о метрической теории функций Н. К. Бари, А. А. Ляпунова, Д. Е. Меньшова и Г. П. Толстова).

[12] Деятельность семинара Егорова в 1914 г. и отдельные моменты становления «Лузитании» ярко описаны в «Страницах автобиографии» П. С. Александрова (УМН, 1979, т. 34, вып. 6, с. 232—237).

1914—1915 гг.— Лузин приступил к чтению факультативного курса теории функций действительного переменного и к руководству семинаром по этому предмету; и 1915 г.— год издания книги Лузина «Интеграл и тригонометрический труд», где он подвел и дополнил итоги первого периода своей деятельности. В следующем году за эту книгу Лузину была присуждена степень доктора чистой математики, хотя представил он ее к защите в качестве магистерской диссертации.

До сих пор речь шла о начале исследований московской школы по метрической теории множеств и функций, базирующейся на понятии меры множества и ставшей основой дальнейшего развития таких областей анализа, как теория интегрирования, тригонометрические ряды и др. В этой области, говоря о первых годах деятельности московской школы, следует хотя бы упомянуть важные результаты А. Я. Хинчина и Д. Е. Меньшова, тогда лишь начинавших свою блестящую научную карьеру.

Н. Н. Лузину же принадлежит первая московская работа по дескриптивной теории множеств (1914) и постановка важного вопроса о мощности борелевских или же B-множеств. Ответом на этот вопрос явилась доказанная в 1915 г. П. С. Александровым теорема, согласно которой всякое несчетное B-множество содержит совершенное подмножество и потому имеет мощность континуума. В доказательстве Александров употребил придуманный им способ задания B-множеств, который тогда же, по предложению М. Я. Суслина, получил название A-операции, по инициалу фамилии ее изобретателя. Вслед за тем в 1916 г. Суслин с помощью A-операции построил новый класс A-множеств, содержащий в себе подкласс B-множеств и тем самым опроверг общепринятое до того мнение, что в математическом анализе не встречаются классы множеств, более обширные, чем класс B-множеств. М. Я. Суслин, скончавшийся в 1919 г., заложил фундамент теории A-множеств, которая на некоторое время оказалась в центре исследований по дескриптивной теории множеств. Несколько лет спустя, в основном начиная с 1925 г., Лузин приступил к разработке теории еще более общих проективных множеств, сразу встретившись при этом с трудностями методологического характера. В последующей разработке дескриптивной теории множеств участвовали ученые многих стран и на первом плане советские математики, — кроме самого Н. Н. Лузина, А. Н. Колмогоров, Л. В. Канторович, П. С. Новиков, Л. В. Келдыш, М. А. Лаврентьев, А. А. Ляпунов и др. С работами по дескриптивной теории множеств и аксиоматизации теории множеств были связаны исследования по математической логике П. С. Новикова и многих других ученых[13].

Здесь мы бегло охарактеризовали только одно из направлений математической мысли, оригинально развившееся в Москве первой трети XIX в. на почве, подготовленной классической теорией множеств и теорией функций. Но значение трудов Кантора вышло далеко за пределы

[13] См. статью: *Яновская С. А.* Математическая логика и основания математики.— В кн.: Математика в СССР за сорок лет. 1917—1957. М.: Физматгиз, 1959, т. 1, с. 13—34.



Фотография барельефа Георга Кантора.
Часть бронзового обелиска (скульптор Г. Гейер), Нойштадт.

построения новой математической дисциплины. Теория множеств быстро заняла прочное место прежде всего в системе математического анализа как фундамент неотделимой теперь от нее теории функций действительного переменного со всеми ее разветвлениями. Теоретико-множественные методы неизменно находили все более широкое применение, содействуя разработке функционального анализа, всей теории вероятностей, начиная с ее аксиоматики, математической логики и т. д. Это и сообщает трудам по теории множеств Георга Кантора непреходящую ценность и жизненность.

П. С. Александров писал в конце упомянутого незавершенного предисловия к настоящему изданию: «Сочинения Кантора принадлежат к самым первым математическим работам, прочитанным автором этого предисловия в ранней юности. Они произвели на него неизгладимое впечатление, и он надеется, что работы Кантора, сделавшись в русском переводе доступными многим и многим тысячам молодых советских читателей, с увлечением будут изучаться ими и помогут выявлению среди них молодых людей, имеющих интерес и способности к математике». Вряд ли следует что-либо добавить к этим словам одного из самых замечательных деятелей московской математической школы.

А. Н. Колмогоров, А. П. Юшкевич

ГЕОРГ КАНТОР

(Биографическая справка)

Георг Фердинанд Людвиг Филипп Кантор родился 19 февраля (3 марта) 1845 г. в Санкт-Петербурге. Происхождение его отца Георга Вольдемара не вполне выяснено; он родился между 1809 и 1814 г., по-видимому, в Копенгагене и в юношеские годы переехал в Петербург, где в 1842 г. женился на Марии Анне Бём, происходившей из одаренной музыкальной семьи. У них было четверо детей: Георг (р. в 1845 г.), Людвиг (р. в 1846 г.), Софья (р. в 1848 г.) и Константин (р. в 1849 г.).



Георг Кантор. Фотография около 1890 г.

В семье были сильными музыкальные традиции — близкие родственники матери были известными музыкантами, а брат Георга, Константин, стал талантливым пианистом. И отец, и мать Кантора были своего рода сильными личностями, и каждый из них оказал заметное влияние на сына — отец, например, в отношении целеустремленности и настойчивости в достижении целей, а также широкого гуманитарного образования, а мать — в отношении культурно-религиозной направленности интересов. Как известно, Георг Кантор был религиозным человеком и его симпатии склонялись то к лютеранству, то к католицизму [С56, с. 379—380]; последнее в некоторой мере отразилось на его отдельных философских высказываниях конца 80-х годов XIX в.

Георг Вольдемар был преуспевающим коммерсантом, владельцем маклерской фирмы, оставившим после своей смерти в 1863 г. немалое наследство в полмиллиона марок [С56, с. 352; С50, с. 276]. Из-за болезни легких он вместе с семьей переехал в 1856 г. в Германию и после нескольких переездов поселился во Франкфурте-на-Майне, начав там жизнь рантье.

Георг окончил начальную школу в Петербурге. После переезда в Германию он учился в гимназии в Висбадене, в частной школе во Франкфурте-на-Майне и еще некоторых учебных заведениях. У него

рано проявилась склонность к математике, однако отец настойчиво рекомендовал ему стать инженером и лишь незадолго до кончины уступил желанию сына избрать профессию математика. В 1863 г. Г. Кантор перешел из Высшей технической школы в Цюрихе, где он учился с 1860 г., в Берлинский университет, где изучал математику, физику и философию. Здесь он оказался в среде молодых товарищей по специальности, ставших впоследствии видными учеными. Из профессоров наибольшее влияние на него оказали такие выдающиеся математики, как Куммер, Кронекер и особенно Вейерштрасс, а из его друзей того времени можно назвать, например, Томе, Мертенса и Шварца. В летний семестр 1866 г. Кантор учился в Гёттингенском университете и из тамошних преподавателей выделял философа Лотце, физика Вебера и математиков Миннигероде и Шеринга [A1, с. 31].

Первоначально математические интересы Кантора были направлены на теорию чисел. К ней относятся его диссертация 1867 г. «О неопределенных уравнениях второй степени» [A1, с. 1—30] и ряд последовавших за ней работ, в том числе и сочинение 1869 г. «О преобразовании тернарных квадратичных форм» [A1, с. 51—62], представленное им на право чтения лекций и доставившее ему звание приват-доцента в университете в Галле.

В Галле интересы Кантора сместились, в основном под воздействием профессора университета Гейне, в сторону теории функций действительного переменного; последовал цикл его работ по этой тематике, одна из которых [I.1] приведена в настоящем издании. По поводу указанного цикла работ следует заметить, что широко распространенное представление, будто исследования по теории функций, в частности по теории тригонометрических рядов, были чуть ли не единственным источником теоретико-множественных идей Кантора, является не вполне правильным. В подготовке перехода Кантора на теоретико-множественные позиции значительную роль сыграли и занятия теорией чисел, и изучение им теории функций комплексного переменного и геометрии, а также его философские интересы.

Семидесятые годы привели ко многим изменениям в жизни Кантора. В личном плане эти изменения выразились в избрании его в 1872 г. экстраординарным профессором университета в Галле, в знакомстве в том же году с Дедекиндом, уже приступившим к разработке теоретико-множественных воззрений (в 1871 г. было опубликовано его «X дополнение» [B58] к лекциям по теории чисел Дирихле, а в 1872 г. появилась его книга [B14]); примерно в то же время он познакомился со своей будущей женой Валли Гуттман и летом 1874 г. состоялась их свадьба; в 1879 г. он был избран ординарным профессором в том же университете. Это десятилетие ознаменовалось и переходом Кантора к построению теории множеств. В течение около полутора десятков лет были подготовлены его основные труды по новой математической дисциплине [I.1—I.8]; остальные переведенные здесь его работы посвящены в основном защите и разъяснениям новой теории или лучшему ее изложению.



Георг Кантор с женой Валли

Исключительно напряженный период жизни и деятельности Кантора завершился драматически. В мае 1884 г. он испытал первый приступ нервной болезни, продолжавшийся около месяца. Причины заболевания остаются не вполне выясненными, но почти несомненно, что на развитие душевного кризиса оказали влияние и чрезвычайно интенсивная научная работа, сочетавшаяся к тому же с педагогической деятельностью, и тщетные усилия решить центральный вопрос созданной Кантором теории — проблему континуума. К этому следует добавить непонимание многими современниками развивавшихся Кантором идей и даже нападки отдельных видных математиков и философов того времени, особенно Кронекера (правда, в некотором роде закулисные), а также известная неудовлетворенность местом работы в провинции при осознании себя создателем основополагающей математической теории, которой Кантор придавал и широкое философское значение.

В результате наметился явный отход Кантора от математики, чему, в частности, вероятно, способствовала и неудача со статьей [II.1]: из-

датель журнала «Acta mathematica» Миттаг-Леффлер, в то время друг и последователь Кантора, сделавший многое в распространении канторовских идей, *отказался напечатать II.1 из-за ее философской направ*ленности. В 1885 г. Кантор временно отказывается от преподавания математики и начинает читать лекции по философии Лейбница; эти лекции оказались неудачными — все 25 слушателей, записавшихся в начале курса, постепенно перестали посещать их, и лектор, по свидетельству Ковалевской [С50, с. 313], дал обещание впредь не читать лекций по философии. Но последняя все же сильно притягивала Кантора. Увлекавшийся ею и ранее, он начал работать в этой области более энергично. Тому, несомненно, способствовало то, что созданная им теория фактически примыкала к философии, а некоторые философы и философствующие теологи (Ренувье, Гербарт, Изенкрае, Францелин и др.) повели атаку против основного в новой математической теории понятия актуальной бесконечности; кое-кто из них стал выражать сомнения в отдельных соображениях Кантора, связанных с трансфинитными числами. Особенно чувствительными для Кантора были упреки католических авторитетов. Поэтому для него оказалась ценной поддержка одного из ведущих томистов того времени Гутберлета. Последний, видимо независимо от Кантора, пришел к идее необходимости рассмотрения актуально бесконечных множеств, считал актуальную бесконечность необходимым условием рассмотрения потенциальной бесконечности, подобрал свидетельства теологов в пользу своих взглядов [В75], хотя и отрицал существование актуально бесконечных чисел. После ознакомления с работами Кантора он установил с ним связи, выступил в защиту его учения и оказал на него определенное влияние в смысле ориентации Кантора на католических мыслителей и на последующие теологические толкования некоторых сторон его учения, уже разработанного к тому времени на чисто математической почве. Эти толкования нашли свое выражение в публикуемых здесь работах Кантора [II.2, II.3], а также в ряде его писем, опубликованных Мешковским [С74; С75, с. 257—264]. Вместе с тем работы [II.1—II.3] исторически интересны блестящей защитой нового учения и первыми подходами к разработке теории порядковых типов.

Отвлекали Кантора от математики и семейные заботы — в 1886 г. в семье появился шестой ребенок и пришлось хлопотать о приобретении нового дома — и некоторые новые интересы. Около 1884 г., возможно под воздействием своей сестры Софьи, он начал интересоваться историко-литературной проблемой Шекспир — Бэкон и пришел к убеждению, что автором шекспировских произведений был Френсис Бэкон. Итогом его многолетней интенсивной работы над ней явились ценная коллекция книг по этой проблеме, а также три собственные работы 1896—1897 гг.

Следует отметить и научно-организационную деятельность Кантора. Он был одним из основателей Немецкого математического общества, его первым председателем (1890—1893) и издателем двух первых томов его печатного органа «Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-

Vereinigung». У него был грандиозный план объединения математиков мира в некую международную организацию. План этот не был осуществлен, но способствовал тому, что Кантор внес значительный вклад в подготовку и проведение первого Международного конгресса математиков в Цюрихе в 1897 г., на котором, в частности, были высоко оценены как теория множеств, так и вклад в нее Кантора.

Все это привело к резкому ослаблению математической продуктивности Кантора. Помимо упомянутых работ [II.2, II.3] и их совместной публикации [A20] до середины 90-х годов появились лишь важная статья [I.9], посвященная диагональному методу, небольшая заметка 1889 г. [A1, с. 114] с защитой канторовской теории действительных чисел да статья об эмпирической проверке гипотезы Гольдбаха о представлении четных чисел в виде суммы двух простых чисел (о последней см. [C75, с. 168—171; C56, с. 360—361]).

В 1895—1897 гг. Кантор опубликовал свою фундаментальную работу «К обоснованию учения о трансфинитных множествах» [I.10]. В ней, без каких-либо теологических реминисценций [1], систематически и в классически прозрачном стиле были изложены все его основные результаты по общей теории множеств. Существенно новых открытий она не содержит, но одна ее особенность весьма выразительна. Если предшествующий цикл статей [I.5] и примыкающие к нему работы характеризуются тем, что создаваемая в них теория строилась как верхний этаж здания математической науки,— в том смысле что, например, арифметика, теория чисел, алгебра, геометрия, анализ бесконечно малых считались заданными и их результаты постоянно использовались при разработке теории множеств, то теперь положение вещей было обернуто. Возможно, под влиянием Дедекинда, выдвинувшего идею построения теории множеств как фундамента арифметики (а через программу арифметизации и всей математики), Кантор тоже попытался переделать свою прежнюю теорию как нечто независимое и, более того, как нечто предшествующее всей математике. При этом арифметику он, как и Дедекинд, попытался сделать очень узким частным случаем создаваемого учения.

Однако на этом пути Кантор вскоре столкнулся с еще более трудным препятствием, чем та же гипотеза континуума при первоначальном подходе. Как свидетельствуют его письма Дедекинду 1899 г. [XLV—XLVII], а еще ранее — несохранившееся письмо Гильберту 1896 г., Кантор вплотную подошел к парадоксам теории множеств, и криком души выступает письмо от 28 августа 1899 г. [XLVI], в котором он признает недоказуемость непротиворечивости существования основных объектов своей теории — вполне упорядоченных множеств и алефов, включая конечные, и предлагает принять факт их непротиворечивости за простую недоказуемую истину, за аксиому. Кантор еще пытается найти какой-то

---

[1] Данью прежним теологическим экскурсам является лишь один третий эпиграф к [I.10].

выход, в некотором смысле заглядывая в будущую теорию классов (его неконсистентные множественности), но силы его уже на исходе. С 1899 г. начали учащаться приступы нервной болезни, в 1890 г. он освобождается от университетских обязанностей на целый семестр, а затем делает это в 1902—1903, 1904—1905, 1907—1908 учебных годах, почти в течение всего следующего учебного года, в 1911 г. В 1913 г. он, наконец, уходит в отставку. Вместе с тем в первые годы XX в. неудовлетворенный своим положением в Германии, отсутствием, как ему казалось, интереса к его идеям в этой стране, он пытается получить место профессора в одном из университетов Великобритании и даже заводит речь о переезде в Америку [С57, с. 119, 121]. Однако он все чаще попадает в специальные больницы, в том числе в нервную клинику в Галле, где и умер 6 января 1918 г.



Фотография Кантора последних лет (фото: Баллин и Рабе, Галле/З)

О жизни и научной деятельности Георга Кантора, о созданной им теории множеств существует обширная литература. Не собираясь характеризовать ее, ограничимся очень кратким описанием наиболее важных, на наш взгляд, работ. Его первым биографом собирался стать Журден; он готовил материалы о жизни и творчестве Кантора, имел с ним в 1901—1910 гг. интересную переписку, теперь частично опубликованную [С57], но написать биографию ему не удалось. Зато он опубликовал цикл статей по истории теории множеств [С65], перевел на английский язык [А22] и во введении к переводу сообщил краткие биографические сведения о Канторе. До сих пор не потеряли значения воспоминания Шёнфлиса [С78] и особенно изложение им переписки Кантора с Миттаг-Леффлером [С79]. Первой серьезной биографией Кантора была работа Френкеля 1930 г. [С54], сокращенный вариант которой включен в собрание сочинений [А1, с. 452—483]. В 1937 г. Нётер и Кавайес опубликовали значительную часть переписки Кантора с Дедекиндом [А24], причем Кавайес перевел ее на французский язык, а Граттан-Гиннес уточнил и пополнил [С58]. Значительную работу по изучению жизни Кантора, его дневниковых записей, неопубликованной переписки, его трудов и связанных с ними сочинений проделали Мешковский [С74, С75], Граттан-Гиннес [С55—С58], Даубен [С50]. Следует также указать хорошую популярную книгу о Канторе и его теории множеств, подготовленную А. Кертецем и недавно изданную с ценными до-



Мемориальная доска на доме Георга Кантора в Галле, Хендельштрассе, 13 (фото Рейнгарда Гентце)

полнениями М. Штерном: *Kertész A.* Georg Cantor. 1845—1918. Schöpfer der Mengenlehre/Bearbeitet von Manfred Stern. Halle (Saale): Dt. Akad. Naturforsch. Leopoldina, 1983; большинство фотографий, воспроизведенных в настоящем издании, заимствованы оттуда. Можно упомянуть и переиздание с некоторыми дополнениями книги Мешковского [C75] с другим названием: *Meschkowski H.* Georg Cantor: Leben, Werk und Wirkung. Mannheim; Wien; Zürich: Bibliogr. Inst., 1983. Из книг, посвященных истории теории множеств, в том числе канторовскому творению, назовем, помимо уже указанных, книги Кавайеса [C49], Мангейма [C72] и автора этих строк [C30]. В приведенной историко-научной литературе содержатся дальнейшие указания, в частности, Мешковский составил отдельный перечень работ о Канторе [C75, с. 277—278], правда далекий от полноты.

Ф. А. Медведев

БИБЛИОГРАФИЯ

А. Работы Кантора

1. Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts. Mit erläuterenden Anmerkungen sowie mit Ergänzungen aus dem Briefwechsel Cantor — Dedekind/Hrsg. von E. Zermelo; Nebst einem Lebenslauf Cantors von A. Fraenkel. Berlin: Springer, 1932. Переизд.: Hildesheim, 1962; Berlin etc., 1980.
2. Beweis, daß eine für jeden reellen Wert von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Funktion $f(x)$ sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen läßt.— J. reine und angew. Math., 1870, Bd. 72, S. 139—142. [A1, с. 80—83].
3. Notiz zu dem Aufsatze: Beweis, daß eine für jeden reellen Wert von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Funktion $f(x)$ sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen läßt.— J. reine und angew. Math., 1871, Bd. 73, S. 294—296. [A1, с. 84—86].
4. Über trigonometrische Reihen.— Math. Ann., 1871, Bd. 4, S. 139—143. Sur les séries trigonométriques.— Acta math., 1883, vol. 2, p. 329—335. [A1, с. 87—91].
5. Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen.— Math. Ann., 1872, Bd. 5, S. 123—132. Extension d'un théorème de la théorie des séries trigonométriques.— Acta math., 1883, vol. 2, p. 336—348. [A1, с. 92—101].
6. Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen.— J. reine und angew. Math., 1874, Bd. 77, S. 258—262. Sur une propriété du système de tous les nombres algébriques.— Acta math., 1883, vol. 2, p. 305—310. [A1, с. 115—118].
7. Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre.— J. reine und angew. Math., 1878, Bd. 84, S. 242—258. Une contribution à la théorie des ensembles.— Acta math., 1883, vol. 2, p. 311—328. [A1, с. 119—133].
8. Über einen Satz aus der Theorie der stetigen Mannigfaltigkeiten.— Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1879, S. 127—135. [A1, с. 134—138].
9. Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten. N 1—6.— Math. Ann., 1879, Bd. 15, S. 1—7 (N 1); 1880, Bd. 17, S. 355—358 (N 2); 1882, Bd. 20, S. 113—121 (N 3); 1883, Bd. 21, S. 51—58 (N 4); S. 545—586 (N 5); 1884, Bd. 23, S. 453—488 (N 6). Sur les ensembles infinis et linéaires de points. I—IV.— Acta math., 1883, vol. 2, p. 349—380 (N 1—4); Fondaments d'une théorie générale des ensembles.— Acta math., 1883, vol. 2, p. 381—408 (N 5). [A1, с. 139—244].
10. Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre: Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen. Leipzig: Teubner, 1883. 47 S. (№ 5 из [A9] является сокращенным вариантом этой работы; еще более сокращен ее перевод на французский язык в [A9]; русский перевод, указываемый ниже, является промежуточным по объему между № 5 из [A9] и данной публикацией). Основы общего учения о многообразиях. Математически-философский опыт учения о многообразиях/Пер. П. С. Юшкевича.— В кн.: Новые идеи в математике. СПб.: Образование, 1914, вып. 6, с. 1—77. Foundations of the theory of manifolds/Transl. U. Parpart.— Campaigner, 1976, vol. 9, p. 69—96.
11. Sur divers théorèmes de la théorie des ensembles de points situés dans un espace continu à n dimensions. Première communication. Extrait d'une lettre addressée à l'éditeur.— Acta math., 1883, vol. 2, p. 409—414. [A1, с. 247—251].
12. De la puissance des ensembles parfaits de points: Extrait d'une lettre adressée à l'éditeur.— Acta math., 1884, vol. 4, p. 381—392. [A1, с. 252—260].
13. Principien einer Theorie der Ordnungstypen: 1. Mitt.; Auszug eines Schreibens an den Herausgeber (6. Nov. 1884).— Acta math., 1970, vol. 124, p. 83—101.

14. Über verschiedene Theoreme aus der Theorie der Punktmengen in einem n-fach ausgedehnten stetigen Raume G_n. 2. Mitt.— Acta math., 1885, vol. 7, p. 105—124. [A1, c. 261—276].
15. Die Grundlagen der Arithmetik: Rez. der Schrift von G. Frege «Die Grundlagen der Arithmetik», Breslau, 1884.— Dt. Literaturzeitung, 1885, N 20, S. 728—729. [A1, c. 440—441].
16. Über die verschiedenen Ansichten in bezug auf die actualunendlichen Zahlen.— Bih. Kgl. sven. vetenskapsakad. handl., 1885, bd. 11, N 19.
17. Über die verschiedenen Standpunkte in bezug auf das actuelle Unendliche (Aus einem Schreiben des Verf. an Herrn G. Eneström in Stockholm vom 4. Nov. 1885).— Ztschr. Philos. und philos. Kritik, 1886, Bd. 88, S. 224—233. [A20, c. 1—10]. О различных точках зрения на актуально бесконечное/Пер. П. С. Юшкевича.— В кн.: Новые идеи в математике. СПб.: Образование, 1914, вып. 6, с. 78—89. [A1, c. 370—376].
18. Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten.— Ztschr. Philos. und philos. Kritik, 1887, Bd. 91, S. 81—125; 1888, Bd. 92, S. 240—265. [A20, c. 11—94]. К учению о трансфинитном/Пер. П. С. Юшкевича.— В кн.: Новые идеи в математике. СПб.: Образование, 1914, вып. 6, с. 90—184. [A1, c. 378—439].
19. Bemerkung mit Bezug auf den Aufsatz: Zur Weierstrass — Cantorschen Theorie der Irrationalzahlen.— Math. Ann., 1889, Bd. 33, S. 476. [A1, c. 114].
20. Gesammelte Abhandlungen zur Lehre vom Transfiniten. I. Abt. Halle (Saale): Pfeffer, 1890. 94 S.
21. Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre.— Jahresber. Dt. Math. Ver., 1890/1891, Bd. 1. S. 75—78. [A1, c. 278—280].
22. Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre.— Math. Ann., 1895, Bd. 46, S. 481—512; 1897, Bd. 49, S. 207—246. Contribuzione al fondamento della teoria degli insiemi transfiniti/Trad. di F. Gerbaldi (пер. 1-й части).— Riv. mat., 1895, vol. 5, p. 129—162. Sur les fondements de la théorie des ensembles transfinis/Trad. par F. Marotte.— Mém. Soc. sci. phys. et natur Bordeau. Sér. 5, 1899, vol. 33, p. 343—437. Отдельное изд.: Paris: Hermann, 1899. 97 p. Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers/Transl. and provided with introd. and notes by Ph. E. B. Jourdain. Chicago: Open Court, 1915. Переизд.: New York: Dover, 1952. VII+211 p. [A1, c. 283—351].
23. Sui numeri transfiniti: Estratto d'una lettera di Georg Cantor a G. Vivanti.— Riv. mat., 1895, vol. 5, p. 104—108.
24. Briefwechsel Cantor — Dedekind/Hrsg. von E. Noether, J. Cavaillès. Paris: Hermann, 1937. Correspondance Cantor — Dedekind/Trad. par J. Cavaillès.— In: Cavaillès J. Philosophie mathématique. Paris: Hermann, 1962, p. 177—252.

В. Работы, на которые ссылался Кантор

1. *Августин.* О граде Божием.— Творения Блаженного Августина, епископа Иппонийского. 2-е изд. Киев: Горбунов, 1905. Ч. 4, кн. 8—13.
2. *Аристотель.* Метафизика.— Соч.: В 4-х томах. Т. 1/Ред. тома и авт. вступ. ст. В. Ф. Асмус. М.: Мысль, 1975, с. 63—368.
3. *Аристотель.* Физика.— Соч.: В 4-х томах. Т. 3/Ред. тома, авт. вступ. ст. и примеч. И. Д. Рожанский. М.: Мысль, 1981, с. 59—262.
4. *Аристотель.* О небе.— Соч.: В 4-х томах. Т. 3, с. 263—378.
5. *Архимед.* О квадратуре параболы.— Соч./Пер. И. Н. Веселовского М.: Физматгиз, 1962, с. 77—94.
6. *Архимед.* О шаре и цилиндре. Кн. 1.— Соч. М.: Физматгиз, 1962, с. 95—141.
7. *Беркли Д.* Трактат о принципах человеческого познания, в котором исследованы главные причины заблуждений и затруднений в науках, а также основания скептицизма, атеизма и безверия.— Соч./Общ. ред. и вступ. ст. И. С. Нарского. М.: Мысль, 1978, с. 149—248.
8. *Больцано Б.* Парадоксы бесконечного, изданные по посмертной рукописи автора др. Фр. Пржигонским/Пер. под ред. и с предисл. проф. И. В. Слешинского. Одесса: Mathesis, 1911.
9. *Гельмгольц Г.* О фактах, лежащих в основаниях геометрии/Пер. А. В. Васильева.— В кн.: Об основаниях геометрии: Сб. классических работ по

геометрии и развитию ее идей/Ред. и вступ. ст. А. П. Нордена. М.: Гостехтеориздат, 1956, с. 366—382.
10. *Гельмгольц Г.* О происхождении и значении геометрических аксиом.— В кн.: Философские науки/Под ред. проф. А. К. Тимирязева. Л.: Гос. изд-во, 1924, ч. 1. Физика, вып. 2, с. 79—107.
11. *Гельмгольц Г.* Счет и измерение/Пер. А. В. Васильева. Казань, 1893.
12. *Гоббс Т.* Основ философии часть первая. О теле.— Избр. произведения: В 2-х томах. Т. 1/Ред. и вступ. ст. В. В. Соколова. М.: Мысль, 1964, с. 42—214.
13. *Гофман Г.* Степка-растрепка: Рассказы для детей. СПб.: Вольф, 1867.
14. *Дедекинд Р.* Непрерывность и иррациональные числа: 4-е испр. изд./Пер. С. О. Шатуновского. Одесса: Mathesis, 1923.
15. *Декарт Р.* Размышления, касающиеся первой философии, в которой ясно доказывается существование бога и реальное различие души и тела человека.— Избр. произведения/Пер., ред. и вступ. ст. В. В. Соколова. М.: Госполитиздат, 1950, с. 335—407.
16. *Декарт Р.* Начала философии.— Избр. произведения. М.: Госполитиздат, 1950, с. 409—544.
17. *Дирихле П. Г. Л.* Лекции по теории чисел/В обр. и с добавл. Р. Дедекинда. М.; Л.: ОНТИ, 1936.
18. *Евклид.* Начала: Книги I—VI/Пер. и коммент. Д. Д. Мордухай-Болтовского, при ред. участии М. Я. Выгодского и И. Н. Веселовского. М.: Гостехтеориздат, 1950.
19. *Евклид.* Начала: Книги VII—X/Пер. и коммент. Д. Д. Мордухай-Болтовского, при ред. участии И. Н. Веселовского. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1949.
20. *Зигварт Х.* Логика. СПб.: Обществ. польза, 1908. Т. 2. Вып. 1. Учение о методе.
21. *Кант И.* Критика чистого разума.— Соч.: В 6-ти томах. Т. 3/Ред. тома Т. И. Ойзерман. М.: Мысль, 1964.
22. *Кирхгоф Г.* Механика. Лекции по математической физике/Пер. с 4-го нем. изд. под ред. А. Т. Григорьяна и Л. С. Полака. М.: Изд-во АН СССР, 1962.
23. *Коссак Е.* Основы арифметики: Исторический очерк введения в арифметику различного рода чисел (дробных, неизмеримых, отрицательных и мнимых) и современно-научная на этот предмет точка зрения. Киев, 1885.
24. *Коши О. Л.* Алгебраический анализ. Leipzig, 1864.
25. *Коши О. Л.* Семь лекций общей физики, читанных Августином Коши, с приложениями: «О невозможности в действительности бесконечно большого числа, «Древность человеческого рода», «Наука в соотношении с верой», составленными аббатом Муаньо. СПб.: Обществ. польза, 1872.
26. *Кронекер Л.* Понятие о числе/Пер. А. В. Васильева. Казань, 1893.
27. *Лейбниц Г. В.* Письмо к Якобу Томазию о возможности примирить Аристотеля с новой философией.— Соч.: В 4-х томах. Т. 1/Ред. и сост. тома, авт. вступ. ст. и примеч. В. В. Соколов. М.: Мысль, 1982, с. 85—102.
28. *Лейбниц Г. В.* Начала природы и благодати.— Соч.: В 4-х томах. Т. 1, с. 404—412.
29. *Лейбниц Г. В.* Монадология.— Соч.: В 4-х томах. Т. 1, с. 413—429.
30. *Лейбниц Г. В.* Новые опыты о человеческом разумении автора системы предустановленной гармонии/Пер. П. С. Юшкевича.— Соч.: В 4-х томах. Т. 2/Ред., авт. вступ. ст. и примеч. И. С. Нарский. М.: Мысль, 1983, с. 47—545.
31. *Лейбниц Г. В.* Размышления об «Опыте о человеческом разумении» г-на Локка/Пер. П. С. Юшкевича.— Соч.: В 4-х томах. Т. 2, с. 546—551.
32. *Локк Д.* Опыт о человеческом разуме.— Избр. философские произведения. М.: Соцэкгиз, 1960.
33. *Муаньо Ф.* О невозможности в действительности бесконечно большого числа. Древность человеческого рода. Наука в соотношении с верой.— В кн.: *Коши О. Л.* Семь лекций общей физики... [В25, с. 59—82].
34. *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии/Пер. с примеч. и поясн. А. Н. Крылова.—Собр. трудов акад. А. Н. Крылова. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1936. Т. 7.
35. *Ориген.* О началах.— В кн.: Творения Оригена, учителя александрийского, в русском переводе. Казань, 1899.
36. *Паскаль Б.* Мысли. 3-е изд. М., 1905.
37. *Платон.* Филеб.— Соч.: В 3-х томах/ /Под общ. ред. А. Ф. Лосева и В. Ф.

Асмуса. М.: Мысль, 1971, т. 3, ч. 1, с. 9—88.
38. *Риман Б.* О гипотезах, лежащих в основании геометрии.— Соч./Пер. под ред. с предисл. и обзор. ст. проф. В. Л. Гончарова. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1948, с. 279—293.
39. *Риман Б.* О возможности представления функции посредством тригонометрического ряда.— Соч. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1948, с. 225—261.
40. *Риман Б.* Фрагменты, относящиеся к Analisys Situs.— Соч. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1948, с. 294—296.
41. *Секст Эмпирик.* Три книги Пирроновых положений.— Соч.: В 2-х томах/ Общ. ред. А. Ф. Лосева. М.: Мысль, 1976, т. 2, с. 205—380.
42. *Спиноза Б.* Приложение, содержащее метафизические мысли, в которых кратко объясняются более трудные вопросы, встречающиеся как в общей, так и в специальной части метафизики, относительно сущности и ее определений, бога и его атрибутов, а также человеческой души.— Избр. произведения/Общ. ред. и вступ. ст. В. В. Соколова. М.: Госполитиздат, 1957, т. 1, с. 265—315.
43. *Спиноза Б.* Этика, доказанная в геометрическом порядке и разделенная на пять частей.— Избр. произведения. М.: Госполитиздат, 1957, т. 1, с. 359—618.
44. *Спиноза Б.* О природе бесконечного: Письмо 12. Ученейшему и высокоопытному мужу Людовику Мейеру, доктору философии и медицины.— Избр. произведения/Общ. ред. и вступ. ст. В. В. Соколова. М.: Госполитиздат, 1957, т. 2, с. 423—429.
45. *Ascoli G.* Nuove ricerche sulla serie di Fourier.— Atti Reale Accad. Lincei. Mem. Cl. sci. fis., mat. e natur. Ser. 2, 1877/1878, vol. 2, p. 584—651.
46. *Ballauf L. Dr.* Georg Cantor ord., Prof. an der Univer. Halle — Wittenberg. Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre: Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen. Leipzig: Teubner, 1883. 47 S.— Ztschr. exakte Philos., 1883, Bd. 12, S. 375—395.
47. *Bayle P.* Dictionnaire historique et critique. Paris: Desoer, 1820. T. 1—16. Издавался много раз. 1-е двухтомное изд.: Rotterdam: Leers, 1697. Рус. пер.: *Бейль П.* Исторический и критический словарь: В 2-х томах/Сокращ. пер. под общ. ред. и вступ. ст. В. М. Богуславского. М.: Мысль, 1968.
48. *Bendixon I.* Quelques théorèmes de la théorie des ensembles.— Acta math., 1883, vol. 2, p. 415—429.
49. *Bendixon I.* Sur la puissance des ensembles parfaits de points.— Bih. Kgl. sven. vetenskapsakad. handl., 1884, bd 9, N 6, s. 1—15.
50. *Berkeley G.* Berkeley's Abhandlungen über die Principien der menschlichen Erkenntnis: In's Deutsche übersetzt und mit erläuternden und prüfunden Anmerkungen versehen von Dr. Friedrich Ueberweg. 2. Aufl. Leipzig: Kochny, 1879.
51. *Bertrand L.* Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques. Genève: Aux dépens de l'Auteur, 1778.
52. *Boeckh A.* Philolaos des pythagoreers Lehren nebst den Bruchstücken seines Werkes. Berlin: Vossischen Buchhandlung, 1819.
53. *Boetius A. M. T. S.* De institutione arithmetica libri duo, de institutione musica libri quinque. Accedit geometria quae fertur Boetii/Ed. G. Friedlein. Leipzig, 1867.
54. *Boetius A. M. T. S.* De consolatione philosophicae. Libri V. T. 3. Parisiis: Sumpt. Lami, 1783.
55. *Boščović R. J.* Philosophicae naturalis theoria redacta ad unicam legem virium in natura existentium. Venetiis: Bernard, 1759.
56. *Brunnhofer H.* Giordano Bruno's Weltanschauung und Verhängnis: Aus der Quellen dargestellt. Leipzig: Fues, 1883.
57. *Cicero M. T.* De finibus bonorum et malorum. Libri 5. Leipzig: Teubner, 1873.
58. *Dedekind R.* Ueber die Composition der binären quadratischen Formen: Supplement X zu «Vorlesungen über Zahlentheorie» von P. G. Lejeune Dirichlet. 2. Aufl. Braunschweig: Vieweg, 1871, S. 423—497.
59. *Dini U.* Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali. Pisa: Nistri, 1878.
60. *Dirichlet P. G. Lejeune.* Vorlesungen über Zahlentheorie/Hrsg. von R. Dedekind. 2. Aufl. Braunschweig: Vieweg, 1871.

61. *Du Bois-Reymond P.* Die allgemeine Funktionenlehre. Tübingen: Laupp, 1882.
62. *Dühring E.* Natürliche Dialektik: Neue logische Grundlegungen der Wissenschaft und Philosophie. Berlin: Witter, 1865.
63. *Erdmann B.* Die Axiome der Geometrie: Eine philosophische Untersuchung der Riemann—Helmholtz'schen Raumtheorie. Leipzig, 1877.
64. *Fechner G. T.* Ueber die physikalische und philosophische Atomlehre. 2. verm. Aufl. Leipzig: Mendelson, 1864.
65. *Fischer K.* System der Logik und Metaphysik oder Wissenschaftslehre. 2. vollig umbearb. Aufl. Heidelberg: Vossermann, 1865.
66. *Fontenelle B.* Élémens de la géométrie de l'infini. Paris: l'Imprimerie Royal, 1727.
67. *Frege G.* Die Grundlagen der Arithmetik: Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl. Breslau: Koeber, 1884.
68. *Fries J. F.* System der Metaphysik: Ein Handbuch für Lehrer und zum Selbstgebrauch. 2. Aufl. Heidelberg: Winter, 1865.
69. *Fullerton G. S.* The conception of the infinite. Philadelphia, 1887.
70. *Gauss C. F.* Brief von Gauss an Schumacher von 12. Juli 1831.— In: Werke. Leipzig: Teubner, 1900, Bd. 8, S. 215—216.
71. *Gerdil G. S.* Essai d'une démonstration mathématique contre l'existence éternelle de la matière et du mouvement infinie, déduite de l'impossibilité démontrée d'une suite actuellement infinie de termes, soit permanents, soit successifs.— In: Opere edite et inedite. Rome, 1806, vol. 4, p. 261.
72. *Gerdil G. S.* Mémoire de l'infini absolu considéré dans la grandeur.— Opere edite ed inedite. Rome, 1807, vol. 5, p. 1.
73. *Goudin A.* Philosophia juxta inconcussa tutissimaque divi Thomae dogmata. Paris: Ovieto, 1851. Vol. 2.
74. *Grassmann H.* Lehrbuch der Arithmetik. Berlin: Enselin, 1861.
75. *Gutberlet C.* Das Unendliche metaphysisch und mathematisch betrachtet. Mainz: Frey, 1878.
76. *Gutberlet C.* Das Problem des Unendlichen.— Ztschr. Philos. und philos. Kritik, 1886, Bd. 88, S. 179—223.
77. *Harnack A.* Die Elemente der Differential- und Integralrechnung. Leipzig: Teubner, 1881.
78. *Harnack A.* Vereinfachung der Beweise in der Theorie der Fourier'schen Reihen.— Math. Ann., 1882, Bd. 19, S. 235—279.
79. *Heine E.* Die Elemente der Functionenlehre.— J. reine und angew. Math., 1872, Bd. 74, S. 172—188.
80. *Helmholtz H.* Ueber die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie.— Verh. natur.-med. Vereins Heidelberg, 1868, Bd. 4, S. 197—202; Zusatz.— Ibid., 1869, Bd. 5, S. 31—32; Wiss. Abh. Leipzig, 1883, Bd. 2, S. 610—617.
81. *Herbart J. F.* Sämmtliche Werke: Schriften zur Metaphysik/Hrsg. von G. Hartenstein. Leipzig: Voss, 1851. T. 2. Bd. 4.
82. *Hermite Ch.* Sur la fonction exponentielle.— C. r. Acad. sci. Paris, 1873, vol. 77, p. 18—24, 74—79, 226—233, 285—293; Oeuvres. Paris: Gauthier-Villars, 1912, vol. 3, p. 150—181.
83. *Jourdain C. B.* La philosophie de Saint Thomas d'Aquino. Paris: Hachette, 1858. Vol. 1, 2.
84. *Jourdain C.* (Ed.) Logique de Port-Royal. Paris: Hachette et Co, 1877.
85. *Jürgens E.* Über eindeutige und stetige Abbildung von Mannigfaltigkeiten.— In: Tageblatt der 51. Versammlung der Deutscher Naturforscher und Aerzte in Cassel. Cassel, 1878, S. 137—140.
86. *Killing W.* Bemerkungen über Veronese's transfiniten Zahlen.—In: Index Lectionum in Academia Monasteriensi, 1895.
87. *Kirchmann J. H. von.* Katechismus der Philosophie. Leipzig: Weber, 1877.
88. *Kronecker L.* Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen.— In: Festschrift zu Herrn Ernst Eduard Kummer's fünfzigjährigen Doctor-Jubiläum. 10. Sept. 1881. Berlin: Reimer, 1882; J. reine und angew. Math., 1882, Bd. 92, S. 1—122; Werke. Leipzig: Teubner, 1899, Bd. 2, S. 237—387.
89. *Kronecker L.* Ueber einige Anwendungen der Modulsysteme auf elementare algebraischen Fragen.— J. reine und angew. Math., 1886, Bd. 99, S. 329—371; Werke. Leipzig: Teubner, 1899, Bd. 3, 1. Halbband, S. 145—208.
90. *Leibniz G. W.* Dissertatio de Arte

Combinatoria, in qua ex Arithmeticae fundamentis Complicationum ac Transpositionum Doctrina novis praeceptis exstruitur, et usus ambarum per universum scientiarum orbem ostenditur, nova etiam Artis Meditandi seu Logicae Inventionis semina sparguntur. Praefixa est Synopsis totius Tractatus, et additamenti loco Demonstratio Existentiae Dei ad Mathematicam certitudinem exacta. Lipsiae, 1666; Leibnizens gesammelte Werke aus den Handschriften der K. Bibliothek zu Hannover/Hrsg. von G. H. Pertz. 3. F. Mathematik. Bd. 5. (Leibnizens mathematische Schriften/Hrsg. von C. J. Gerhardt. 2. Abt. Bd. 1), S. 7—79.

91. *Leibniz G. W.* Réponse de Mr. Leibniz à l'extrait de la lettre de Mr. Foucher, chanoine de Dijon, insérée dans le journal du 16 Mars.— J. Sçavans, 1693, 3 août; Godofridi Guillelmi Leibnitii Opera philosophicae quae existant latina, gallica, germanica omnia/Ed. J. F. Erdmann. Berolini: Eicherleri, 1840, p. 117—118.

92. *Leibniz G. W.* Considération sur la différence qu'il y a entre l'analyse ordinaire et le nouveau calcul des transcendances.— J. Sçavans, 1694; Leibnizens gesammelte Werke.../Hrsg. von G. H. Pertz. 3. F. Mathematik, Bd. 5, S. 306—308; Частичный рус. пер.: *Юшкевич А. П.* Избранные отрывки из математических сочинений Лейбница.— УМН, 1948, т. 3, вып. 1, с. 165—204; с. 180.

93. *Leibniz G. W.* Responsio ad nonnullas difficultaties a Dn. Bernardo Niewentijt circa methodum differentialem seu infinitesimalem motas.— Acta Erudit., 1695; Leibnizens gesammelte Werke.../Hrsg. von G. H. Pertz. 3. F. Mathematik. Bd. 5, S. 320—328.

94. *Leibniz G. W.* Leibniz an Fardella. 3.— 13. Sept. 1696.— In: Leibnizens gesammelte Werke.../Hrsg. von G. H. Pertz. 2. F. Philosophie. Bd. 1 (Briefwechsel zwischen Leibniz, Arnauld und dem Landgrafen Ernst von Hessen-Reinfels aus den Handschriften der K. Bibliothek zu Hannover). Hannover: Hansch, 1846, S. 207—210.

95. *Leibniz G. W.* Ad reverendissimum Patrem des Bosses epistolae octo. 1706 et 1707. Epistola II.— In: Godofridi Guillelmi Leibnitii Opera philosophicae.../Ed. J. E. Erdmann. Berolini: Eicherleri, 1840, S. 435—437.

96. *Leibniz G. W.* Observatio quod rationes sive proportiones non habeant locum circa quantitatis nihilo minores, et de vero sensu methodi infinitesimalis.— Acta Erudit., 1712; Leibnizens gesammelte Werke.../Hrsg. von G. H. Pertz. 3. F. Mathematik. Bd. 5, S. 387—389.

97. *Leibniz G. W.* Leibniz an Grandi. 6. Sept. 1713.— In: Leibnizens gesammelte Werke.../Hrsg. von G. H. Pertz. 3. F. Mathematik. Bd. 4. Halle: Schmidt, 1859, S. 217—221.

98. *Leibniz G. W.* Deux lettres à M. Bourget, 1716. Lettre VI.— In: Godofridi Guillelmi Leibnitii Opera philosophicae.../Ed. J. E. Erdmann. Berolini: Eicherleri, 1840, S. 743—744.

99. *Leibniz G. W.* Specimen Geometriae luciferae.— In: Leibnizens gesammelte Werke.../Hrsg. von G. H. Pertz. 3. F. Mathematik. Bd. 7. Halle: Schmidt, 1863, S. 260—299.

100. *Liberatore M.* Compedium Logicae et Metaphysicae. Napoli: Manfredi, 1869.

101. *Liberatore M.* Della conoscenza intellettuale. 3 ed. Napoli: Giaunini, 1879. Vol. 1, 2.

102. *Liberatore M.* Institutiones philosophicae. 2 ed. novae formae. Prati: Giachetti filii, 1883. Vol. 1. Logica.

103. *Liebmann O.* Zur Analysis der Wirklichkeit: Philosophische Untersuchungen. Strassburg; Darmstadt: Grübner, 1876.

104. *Liouville J.* Sur les classes très-étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques.— J. math. pures et appl., 1851, vol. 16, p. 133—142.

105. *Lipschitz R.* Grundlagen der Analysis. Bonn: Cohen und Sohn, 1877.

106. *Lotze H.* L'infini actuel est il contradictoire? Réponse à M. Renouvier.— Rev. philos. France et l'Étranger 1880, vol. 9, N 5, p. 481—492.

107. *Lotze H.* Mikrokosmus: Ideen zur Naturgeschichte und Geschichte der Menschheit. 3. Aufl. Leipzig: Hirschel, 1876.

108. *Lüroth J.* Ueber gegenseitig eindeutige und stetige Abbildung von Mannigfaltigkeiten verschiedener Dimensionen aufeinander.— Sitzungsber. Phys.-med. Soz. Erlangen, 1878, Bd. 10, S. 190—195

109. *Maclaurin C.* A treatise of fluxions. Edinburgh: Ruddimenas, 1742. Vol. 1, 2; Traité des fluxions/Trad. dt R. P. Pezenas. Paris: 1749. Vol. 1, 2.
110. *Maignan E.* Cursus philosophicus. Lugduni, 1673.
111. *Minnigerode B.* Bemerkung über irrationale Zahlen.— Math. Ann., 1871, Bd. 4, S. 497—498.
112. *Mittag-Leffler G.* Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes d'une variable indépendente.— Acta math., 1884, vol. 4, p. 1—79.
113. *Molk J.* Sur une notion qui comprend celle de la divisibilité et sur la théorie d'élimination.— Acta math., 1885, vol. 6, p. 1—166.
114. *Müller J. H. T.* Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik für höhere Lehranstalten. 1. H. Die Arithmetik bis einschlisslich zu der quadratisch Gleichungen mit 2000 Uebungsaufgaben enthaltend. Halle: Buchhdl. des Weinhaus, 1855.
115. *Netto E.* Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre.— J. reine und angew. Math., 1879, Bd. 86, S. 263—268.
116. *Neumann C.* Über die nach Kreis-, Kugel- und Zylinderfunktionen fortschreitenden Entwicklungen, unter durchgängiger Andwendung des Du Bois-Reymond'schen Mittelwerthsatzes. Leipzig: Teubner, 1881.
117. *Nicomachus.* Introductionis arithmeticae/Hrsg. von R. Hocke. Leipzig, 1866. *Nicomachos of Gerasa.* Introduction to arithmetic. Ann Arbor, 1938.
118. *Pascal B.* Traité du triangle arithmétique. Paris, 1665; Oeuvres complètes. Paris: Hachette, 1877, 1908, vol. 3, p. 243—251.
119. *Pesch T.* Institutiones philosophicae naturalis secundum principia S. Thomae Aquinatis. Griburgi brisgoviae: Herder, 1880.
120. *Phragmen E.* Beweis eines Satzes aus der Mannigfaltigkeitslehre.— Acta math., 1884/1885, vol. 5, p. 47—48.
121. *Poisson S. D.* Traité de mécanique. 2 éd., considérablement augm. Paris: Bachellier, 1833. Vol. 1, 2.
122. *Renouvier Ch.* Esquisse d'une classification systematique des doctrines philosophiques. Paris: Au Büreau de la critique philosophique, 1885—1886. Vol. 1, 2.
123. *Rosanes J.* Über die neuesten Untersuchungen in betreff unserer Anschauung vom Raume: Ein Vortrag. Breslau: Maruscke und Berend, 1871.
124. *Saguens J.* De perfectionibus divinis. Coloniae, 1718.
125. *Saint-Venant A. J. C.* Barre de. Sur la question: «Si la matière est continue ou discontinue?».— Proc. Verb. Soc. Philos., 1844, p. 3—16.
126. *Saint-Venant A. J. C. Barre de.* De la constitution des atomes.— Ann. Soc. sci. Bruxelles, 1878, vol. 2, p. 417—456, 1—39 (suppl.).
127. *Schröder E.* Ueber zwei Definitionen der Endlichkeit und G. Cantorsche Sätze.— Abh. Leopoldische-Carolinischen Dt. Akad. Naturforsch., 1898, Bd. 71, H. 6, S. 303—362.
128. *Steiner J.* Vorlesungen über synthetische Geometrie. 2. T. Die Theorie der Kegelschnitte gestützt auf projectivische Eigenschaften/Bearb. von H. Schröter. Leipzig: Teubner, 1867.
129. *Stolz O.* B. Bolzano's Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung— Math. Ann., 1881, Bd. 18, S. 255—279.
130. *Stolz O.* Zur Geometrie der Alten, insbesondere über ein Axiom des Archimedes.— Ber. naturwiss.-med. Ver. Insbruck, 1881/1882, Bd. 12, S. 74—89; Math. Ann., 1883, Bd. 22, S. 504—519.
131. *Stolz O.* Die unendlich kleine Grössen.— Ber. naturwiss.-med. Ver. Insbruck, 1884, Bd. 14, S. 21—43.
132. *Stolz O.* Vorlesungen über allgemeine Arithmetik. Leipzig: Teubner, 1885. T. 1, 2.
133. *Tannery J.* Acta mathematica. Journal rédigé par M. G. Mittag-Leffler. Stockholm.— Bull. sci. math. et astron. Deuxième sér., 1884, vol. 8, pt 2, p. 136—171.
134. *Thomae J.* Abriss einer Theorie der complexen Functionen und der Thetafunctionen einer Veränderlichen. 2. verm. Aufl. Halle: Nebert, 1873.
135. *Thomae J.* Sätze auf der Functionentheorie.— Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1878, S. 466—468.
136. *Thomas Aquinas.* Summa theologica. Pars prima seu summa naturalis.— In: Opera omnia. Editio nova. Parisiis: Vivès, 1895. Vol. 1.
137. *Thomas Aquinas.* Da aeternitate mundi contra murmurantes. Suppositio secundum fidem catholicam.— In: Opus-

cula filosofica. Torino, 1954, p. 105—108.
138. *Thomas Aquinas*. De natura materiae et de dimensionibus interminatis.— In: Opuscula filosofica. Torino, 1954, p. 131—145.
139. *Thomas Aquinas*. De natura generis.— In: Opuscula filosofica. Torino, 1954, p. 177—204.
140. *Thomas Aquinas*. De fallaciis. Quia łogica est rationalis scientia.— In: Opuscula filosofica. Torino, 1954, p. 225—240.
141. *Überweg F*. System der Logik und Geschichte der logischen Lehren. 4. Aufl. Bonn: Marcus, 1874.
142. *Veronese G*. Fondamenti di geometria a più specie di unità rettilinee espositi in forma elementare. Padova, 1891. Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen und mehreren Arten gradliniger Einheiten in elementarer Form entwickelt. Mit Genehmigung des Verfassers nach einer neuen Bearbeitung des Originals/Übers. von A. Schepp. Leipzig: Teubner, 1894.
143. *Weber H*. Die Elemente der Differential- und Integralrechnung. Zur Einführung in das Studium dargestellt von Axel Harnack, o. Professor der Mathematik am Polytechnikum zu Dresden. Leipzig: Teubner, 1881; Ztschr. Math. und Phys. Historischlit. Abt., 1882, Bd. 27, S. 161—164.
144. *Werner K*. Der helige Thomas von Aquino. Regensburg: Wanz, 1858—1859. Bd. 1—3.
145. *Wundt W*. Logik. Eine Untersuchung der Principien des Erkenntnis und der Methoden wissenschaftlicher Forschung. 2. umgearb. Aufl. Stuttgart: Enke, 1894. Bd. 2. Methodenlehre. Logik der Mathematik und Naturwissenschaften.
146. *Wundt W*. Kant's kosmologische Antinomien und das Problem des Unendlichen.— Philos. Stud., 1885, Bd. 2, S. 495—538.
147. *Zeller E.* Die Philosophie der Griechen: Eine Untersuchung über Charakter, Gang und Hauptmomenten ihrer Entwicklung. 3. Aufl. Leipzig, 1879. T. 2.
148. *Zeller E*. Philosophische Aufsätze. Eduard Zeller zu seinem funfzigjährigen Doktor-Jubiläum gewidmet. Leipzig: Fues, 1887.
149. *Zigliara T. M*. Summa philosophica usum scholarum. 6 ed. Parisiis: Delhomme et Briguet, 1887. Vol. 1—3.
150. *Zimmermann R*. Der Cardinal Nicolaus von Cusa als Vorgänger Leibnizens.— Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien. Philos.-hist. Kl., 1852, Bd. 8, S. 306—328.

С. Работы, использованные в примечаниях и послесловии

1. *Александров П. С*. Математика в Московском университете в первой половине XX века.— Ист.-мат. исслед., 1955, вып. 8, с. 9—54.
2. *Александров П. С*. Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Наука, 1977.
3. *Александров П. С*. Страницы автобиографии.— УМН, 1979, т. 34, вып. 6 (20), с. 220—249.
4. *Александров П. С., Гнеденко Б. В., Степанов В. В*. Математика в Московском университете в XX веке (до 1910 г.).— Ист.-мат . исслед., 1948, вып. 1, с. 9—42.
5. *Бари Н. К., Ляпунов А. А., Меньшов Д. Е., Толстов Г. П*. Метрическая теория функций действительного переменного.— В кн.: Математика в СССР за тридцать лет. 1917—1947. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1948, с. 256—288.
6. *Бирюков Б. В., Бирюкова Л. Г*. «Учение о формах [величинах]» Германа и Роберта Грассманов как предвосхищение конструктивного направления в математике.— В кн.: Вопросы кибернетики: Кибернетика и логическая формализация. Аспекты истории и методологии. М.: ВИНИТИ, 1982, с. 36—92.
7. *Боргош Ю*. Фома Аквинский. 2-е изд. М.: Мысль, 1975.
8. *Быков Г. В*. История классической теории химического строения. М.; Изд-во АН СССР, 1960.
9. *Ван-дер-Варден Б. Л*. Современная алгебра. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1947. Ч. 1.
10. *Васильев А. В*. Введение в анализ. Казань: Изд. Казан. ун-та, 1904—1908. Вып. 1—2.
11. *Гайденко П. П*. Эволюция понятия науки. Становление и развитие первых научных программ. М.: Наука, 1980.
12. *Гегель Г. В. Ф*. Наука логики: В 3-х томах. М.: Мысль, 1970. Т. 1.
13. *Гёдель К*. Совместимость аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипо-

тезы с аксиомами теории множеств/Пер. А. А. Маркова.— УМН, 1948, т. 3, вып. 1 (23), с. 96—149.
14. *Гельфонд А. О.* Очерк истории и современное состояние теории трансцендентных чисел.— Естествознание и марксизм. 1930, т. 1, с. 33—55; Избр. труды. М.: Наука, 1973, с. 16—37.
15. *Гильберт Д.* Основания геометрии. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1948.
16. *Дедекинд Р.* Что такое числа и для чего они служат? Казань, 1905.
17. *Дженокки А.* Дифференциальное исчисление и начала интегрального исчисления: Изд. с дополн. и примеч. проф. Giuseppe Peano/Пер. с итал. проф. К. А. Поссе. Пг.: Academia, 1922.
18. *Жегалкин И. И.* Трансфинитные числа. М.: Изд-во ун-та, 1907.
19. *Зубов В. П.* Аристотель. М.: Изд-во АН СССР, 1963.
20. *Кант И.* Всеобщая естественная история и теория неба.— В кн.: *Кант, Иммануил.* Соч.: В 6-ти томах Т. 1/Ред. тома А. В. Булыга. М.: Мысль, 1963, с. 115—262.
21. *Коэн П. Дж.* Независимость континуум-гипотезы.— Математика, 1965, т. 9, № 4, с. 142—155.
22. *Коэн П. Дж., Херш Р.* Неканторовская теория множеств.— Природа, 1969, № 4, с. 43—55.
23. *Кузичева З. А.* Логическая программа Лейбница и ее роль в истории логики и арифметики.— В кн.: Вопросы кибернетики: Кибернетика и логическая формализация. Аспекты истории и методологии. М.: ВИНИТИ, 1982, с. 3—36.
24. *Кузнецов Б. Г.* Джордано Бруно и генезис классической науки. М.: Наука, 1970.
25. *Лузин Н. Н.* Интеграл и тригонометрический ряд. М.: Изд. Моск. ун-та, 1915; Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР, 1953, т. 1, с. 48—212.
26. *Лурье С. Я.* Теория бесконечно малых у древних атомистов. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1935.
27. *Ляпунов А. А., Новиков П. С.* Дескриптивная теория множеств.— В кн.: Математика в СССР за тридцать лет. 1917—1947. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1948, с. 243—255.
28. *Маркушевич А. И.* К статье Ф. А. Медведева «О канторовской теории действительных чисел».— Ист.-мат. исслед., 1978, вып. 23, с. 71—76.
29. Математика XIX века: Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей /Под ред. А. Н. Колмогорова и А. П. Юшкевича М.: Наука, 1978.
30. *Медведев Ф. А.* Развитие теории множеств в XIX веке. М.: Наука, 1965.
31. *Медведев Ф. А.* Французская школа теории функций и множеств на рубеже XIX—XX вв. М.: Наука, 1976.
32. *Медведев Ф. А.* Ранняя история аксиомы выбора. М.: Наука, 1982.
33. *Некрасов В. Л.* Строение и мера линейных точечных областей. Томск.: Изд во Томск. ун-та, 1907.
34. *Николай Кузанский.* Соч.: В 2-х томах/ /Общ. ред. В. В. Соколова и З. А. Тажуризиной. М.: Мысль, 1979—1980. Т. 1, 2.
35. *Ожигова Е. П.* Шарль Эрмит. 1822—1901. Л.: Наука, 1982.
36. *Паплаускас А. Б.* Тригонометрические ряды от Эйлера до Лебега. М.: Наука, 1966.
37. *Рожанский И. Д.* Анаксагор: У истоков античной науки. М.: Наука, 1972.
38. *Степанов В. В.* Московская школа теории функций.— Уч. зап. МГУ, 1947, т. 91, с. 47—52.
39. *Тимченко И. Ю.* Основания теории аналитических функций: Ч. 1. Исторические сведения о развитии понятий и методов, лежащих в основании теории аналитических функций. Т. 1.— Зап. мат. отд-ия Новорос. о-ва естествоиспытателей, 1892, т. 12, с. 1—256; 1896, т. 16, с. 1—216; 1899, т. 19, с. 1—183. Отдельное изд. под тем же назв.: Одесса, 1899,
40. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств/Под ред. и с дополн. П. С. Александрова и А. Н. Колмогорова. М.; Л.: ОНТИ, 1937. (Книга представляет собой комбинацию из [C59] и ее значительно переработанного второго издания 1927 г.).
41. *Шатуновский С. О.* Доказательство существования трансцендентных чисел (по Кантору).— Вестн. опытной физики и элементарной математики, 1896, № 233; [B14, с. 34—44].
42. *Шатуновский С. О.* Введение в анализ. Одесса: Mathesis, 1923.
43. *Яновская С. А.* Математическая логика и основания математики.— В кн.: Математика в СССР за сорок лет. 1917—1957. М.; Л.: Гостехтеориздат, с. 13—34.

44. *Яновская С. А.* Преодолены ли в современной науке трудности, известные под названием «апории Зенона»? — В кн.: Проблемы логики. М.: Изд-во АН СССР, 1963, с. 116—136; Методологические проблемы науки. М.: Мысль, 1972, с. 214—234.
45. *Bolzano B.* Rein analitischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege. Prag: Haase, 1817. Фотокопия в кн.: *Bolzano, Bernard* (1781—1848). Bicentenary. Early mathematical works.— In: Acta hist. rerum natur. nechon techn. Spec. issue 12/Ed. L. Nový. Prague, 1981, s. 420—476.
46. *Borel É.* Leçons sur la théorie des fonctions. Paris: Gauthier-Villars, 1898.
47. *Brouwer L. E. J.* Beweis der Invarianz der Dimensionzahl.— Math. Ann., 1911, Bd. 70, S. 161—165.
48. *Carathéodory C.* Vorlesungen über reellen Funktionen. Leipzig; Berlin: Teubner, 1918; 2. Aufl., 1927.
49. *Cavaillès J.* Remarques sur la formation de la théorie abstraite des ensembles. I, II. Paris: Hermann, 1938; Philosophie mathématique. Paris: Hermann, 1962, p. 23—176.
50. *Dauben J. W.* Georg Cantor: His mathematics and philosophy of the infinite. Cambridge (Mass.); London: Harvard Univ. press, 1979.
51. *Dedekind R.* Ähnliche (deutliche) Abbildung und ähnliche Systeme.— Gesammelte mathematische Werke/Hrsg. von R. Fricke, E. Noether und O. Ore. Braunschweig: Vieweg und Sohn, 1932, Bd. 3, S. 447—448.
52. *Dugac P.* Richard Dedekind et les fondaments des mathématiques (avec de nombreux textes inédites). Paris: Vrin, 1976.
53. *Dugac P.* Histoire du théorème des accroissement finis.— Arch. intern. hist. sci., 1980, vol. 30, N 5, p. 86—101.
54. *Fraenkel A.* Georg Cantor.— Jahresber. Dt. Math. Ver., 1930, Bd. 39, S. 189—266. Отдельное изд.: Leipzig: Teubner, 1930. Сокращенный вариант: Das Leben Georg Cantors.— In: *Cantor, Georg.* Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts [A1, с. 452—483].
55. *Grattan-Guinness I.* An unpublished paper of Georg Cantor: Principien einer Theorie der Ordnungstypen. 1. Mitt.— Acta math., 1970, vol. 124, p. 65—107.
56. *Grattan-Guinness I.* Towards a biography of Georg Cantor.— Ann. sci., 1971, vol. 27, p. 345—392.
57. *Grattan-Guinness I.* The correspondence between Georg Cantor and Philip Jourdain.— Jahresber. Dt. Math. Ver., 1971, Bd. 71, H. 3, S. 111—130.
58. *Grattan-Guinness I.* The rediscovery of the Cantor-Dedekind correspondence.— Jahresber. Dt. Math. Ver., 1974, Bd. 76, H. 3/4, S. 104—130.
59. *Hausdorff F.* Grundzüge der Mengenlehre. Leipzig: Veit, 1914.
60. *Hawkins T.* Lebesgue's theory of integration: Its origins and development. Madison: Univ. Wisc. press, 1970.
61. *Hessenberg G.* Grundbegriffe der Mengenlehre. Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht, 1906.
62. *Illigens E.* Zur Weierstrass' — Cantor'schen Theorie der Irrationalzahlen.— Math. Ann., 1889, Bd. 33, S. 155—160.
63. *Illigens E.* Zur Definition der Irrationalzahlen.— Math. Ann., 1890, Bd. 35, S. 451—455.
64. *Johnson D. M.* The problem of the invariance of dimension in the growth of topology. Pt I.— Arch. hist. exact sci., 1979, vol. 20, N 2, p. 97—188.
65. *Jourdain P. E. B.* The development of the theory of transfinite numbers.— Arch. Math. und Phys., 1906, Bd. 10, S. 254—281; 1909, Bd. 14, S. 289—311; 1910, Bd. 16, S. 21—43; 1914, Bd. 22, S. 1—21.
66. *Jürgens E.* Der Begriff der *n*-fachen stetigen Mannigfaltigkeiten.—Jahresber. Dt. Math. Ver., 1899, Bd. 7, S. 50—55.
67. *Kennedy H. C.* Peano: Life and works of Giuseppe Peano. Dordrecht etc.: Reidel Publ. Co, 1980.
68. *Klaua D.* Allgemeine Mengenlehre: Ein Fundament der Mathematik. Berlin: Akad.-Verl., 1964.
69. *Lasswitz K.* Geschichte der Atomistik von Mittelalter bis Newton. Hamburg; Leipzig, 1889—1890. 2. Aufl. 1926. Bd. 1, 2.
70. *Lejeune-Dirichlet P. G.* Über die im umgekehrten Verhältnis des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte/Hrsg. von F. Grube. Leipzig, 1876; 2. Aufl. 1887.
71. *Lindemann F.* Über die Zahl π.— Math. Ann., 1882, Bd. 20, S. 213—225.
72. *Mannheim J. H.* The genesis of point set

topology. New York: Pergamon press, 1964.

73. *Mathews J.* William Rowan Hamilton's paper of 1837 on the arithmetization of analysis.— Arch. hist. exact sci., 1978, vol. 19, p. 177—200.

74. *Meschkowski H.* Aus den Briefbüchern Georg Cantors.— Arch. hist. exact sci., 1965, vol. 6, p. 503—519.

75. *Meschkowski H.* Probleme des Unendlichen: Werk und Leben Georg Cantors. Braunschweig: Vieweg und Sohn, 1967.

76. *Peano G.* Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale. Torino: Bocca, 1887.

77. *Scheffer L.* Allgemeine Untersuchungen über Rectification der Kurven.— Acta math., 1884/1885, vol. 5, p. 49—82.

78. *Schoenflies A.* Zur Erinnerung an Georg Cantor.— Jahresber. Dt. Math. Ver., 1922, Bd. 31, S. 97—106.

79. *Schoenflies A.* Die Krisis in Cantors mathematischen Schaffen.— Acta math., 1927, vol. 50, S. 1—23.

80. *Schröder E.* Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logik). Leipzig: Teubner, 1890. Bd. 1.

81. *Sperner E.* Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionenzahl und des Gebietes.— Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg, 1928, Bd. 6, S. 265—272.

82. *Tarski A.* Sur les ensembles finis.— Fund. math., 1924, vol. 6, p. 45—95.

83. *Torretti R.* Philosophy of geometry from Riemann to Poincaré. Dordrecht etc.: Reidel Publ. Co, 1978.

84. *Zermelo E.* Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann.—Math. Ann., 1904, Bd. 59, S. 514—516.

85. *Zermelo E.* Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre.I.— Math. Ann., 1908, Bd. 65, S. 261—281.

86. *Zermelo E.* Über das Maß und die Diskrepanz von Punktmengen.— J. reine und angew. Math., 1927, Bd. 158, S. 154—167.

ПРИМЕЧАНИЯ *

При подготовке «Собрания сочинений» Кантора издатель — видный математик Цермело, внесший существенный вклад в разработку теории множеств, в частности, ее первой аксиоматизацией,— прокомментировал его работы. Эти комментарии помещены после соответствующих статей, а иногда непосредственно в тексте в квадратных скобках; их перевод аналогично размещен и в настоящем издании с несущественными изменениями, относящимися к нумерации работ Кантора, а также к номерам страниц или параграфов и обусловленными характером русского перевода (так, например, вместо цермеловской отсылки III.9., § 14 ff., означающей работу № 9 из раздела III книги [A1], приводится I.10, § 14 и след.). Нижеследующие примечания имеют в основном справочное назначение, кроме небольшого числа кратких данных, связанных с новейшим развитием теории множеств и с изучением ее истории. Для сокращения их текста приводится список литературы, распределенной по трем разделам: A. Работы Кантора (переведенные здесь или упоминаемые в переводах); B. Труды, на которые ссылался Кантор; C. Работы, на которые делаются ссылки в комментариях Цермело и в примечаниях. Первые из них размещены в хронологическом порядке, кроме немецкого издания «Собрания сочинений», помещенного под № 1 и указываемого далее как [A1]; здесь же отмечены переиздания и переводы на другие языки. В разделах B и C литература дается по фамилиям авторов, сначала в порядке русского, а затем латинского алфавитов. При этом работы иностранных авторов, имеющиеся в переводах на русский язык, приводятся только по их русским изданиям, поскольку в последних обычно указаны оригиналы; соответственно ссылки на них в тексте переадресованы в примечаниях к переводам. Каждой из работ присвоен порядковый номер внутри соответствующего раздела; например, ссылка [B3, с. 000] означает работу № 3 из раздела B с нужной страницей. Комментируемое место отмечено в тексте надстрочной цифрой в квадратных скобках с нумерацией внутри каждой статьи.

Приведенная выше краткая справка о жизни и деятельности Кантора составлена в основном по работе Френкеля [C54]. Указатель основных понятий теории множеств представляет собой приспособленную для русского перевода переработку соответствующего указателя из [A1, с. 484—486]. В именном указателе (отсутствующем в [A1]) приводятся фамилии и инициалы цитировавшихся авторов (что позволяет опускать их в тексте примечаний), а также годы жизни.

Наличие в текстах работ Кантора значительного числа цитат, высказываний и отдельных выражений на греческом и латинском языках вынудило переводчика обратиться за помощью к специалистам. Такая помощь была оказана ему И. Г. Башмаковой, И. Д. Рожанским (греческий язык) и Т. Ю. Бородай (латинский язык); кроме того, при переводе некоторых выражений оказались полезными консультации П. П. Гайденко и В. П. Визгина. В поисках нужной литературы и данных об отдельных ученых ценными были советы и рекомендации Вл. П. Визгина, В. Г. Гайденко и особенно А. П. Огурцова. Всем перечисленным лицам автор выражает искреннюю благодарность.

Ф. А. Медведев

---

* Примечания составлены Ф. А. Медведевым.

I. РАБОТЫ ПО ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1. Обобщение одной теоремы из теории тригонометрических рядов

[1] (с. 9). Эта работа помещена Цермело в [A1] в разделе II «Труды по теории функций», не включенные в настоящее издание. Поскольку в ней содержатся интересные теоретико-множественные и топологические идеи в их зачаточном выражении, то сочтено целесообразным поместить ее здесь.

[2] (с. 9). Имеются в виду статьи [A2] и [A3].

[3] (с. 12). В этом и следующем абзацах Кантор выражается не вполне ясно. Оригинальный текст абзаца таков: «Während sich nun die Gebiete *B* und *A* so zueinander verhalten, dass zwar jedes *a* einem *b*, nicht aber umgekehrt jedes *b* einem *a* gleichgesetzt werden kann, stellt es sich hier heraus, dass sowohl jedes *b* einem *c*, wie auch umgekehrt jedes *c* einem *b* gleichgesetzt werden kann» [A1, с. 95].

Другой вариант перевода см. в [C28, с. 74].

[4] (с. 12). К своей теории действительных чисел Кантор обращался еще дважды: в публикуемой здесь работе I. 5. 5, § 9, и в заметке (*A19*).

[5] (с. 16). [A4].

[6] (с. 16). [B39, § 8].

[7] (с. 16). [A2].

[8] (с. 18). Цермело указывает здесь [A3], в которой теорема единственности тригонометрического разложения функций доказана для случая конечного множества исключительных точек и обещано ее «далеко идущее обобщение» [A1, с. 85].

2. Об одном свойстве совокупности всех действительных алгебраических чисел

[1] (с. 19). В 1844 г. французский математик Лиувилль нашел специфическую характеристику разложений алгебраических чисел в цепные дроби, что позволило ему обнаружить существование трансцендентных чисел. Эти результаты изложены им детальнее в 1851 г. [B104]. Об истории трансфинитных чисел см. [C14].

[2] (с. 21). [B111]. Миннигероде — приват-доцент по математике Гёттингенского университета, лекции которого Кантор слушал в 1866 г.; с 1874 г.— экстраординарный, а с 1885 г.— ординарный профессор университета в Грейфсвальде.

3. К учению о многообразиях

[1] (с. 23). Кантор ссылается на X дополнение ко второму изданию «Лекций по теории чисел» выдающегося немецкого математика Дирихле [B60], написанное Дедекиндом [B58]. Начиная с издания 1879 г. названных лекций, Дедекинд выделил часть этого дополнения (которую имел в виду Кантор), существенно расширив ее, в самостоятельное XI дополнение. В русском переводе [B17] последнее отсутствует.

[2] (с. 23). Имеется в виду работа Римана [B38].

[3] (с. 23). [B80], [B9], [B10]. Исторический анализ двух последних работ Гельмгольца см. в [C83, с. 156—168].

[4] (с. 23). [B123], [B103], [B63]. Розанес — немецкий математик, профессор университета в Бреслау. Либман — немецкий философ, профессор университетов в Страссбурге и Йене. Эрдман — известный философ, профессор университетов в Киле, Бреслау, Галле, Бонне и Берлине.

[5] (с. 35). functio ips. словообразование, введенное Кантором для характеристики того, что рассматриваемое множество можно поставить во взаимно однозначное соответствие непосредственно с множеством натуральных чисел или с множеством всех действительных чисел отрезка [0,1]. Оно дословно означает «функция самого». Это словообразование не привилось.

[6] (с. 35). Здесь она является третьей.

4. Об одной теореме из теории непрерывных многообразий

[1] (с. 36). В этом абзаце речь идет о работах немецких математиков Люрота [B108], Томе [B135], Юргенса [B85] и Нетто [B115]. Они общим образом охарактеризованы Цермело в примечании к I.4 и подробно рассмотрены Джонсоном [C64, с. 146—157].

[2] (с. 37). [B24]. В русском переводе эта теорема и ее доказательство находятся на с. 437—439.

[3] (с. 39). [C66].

[4] (с. 39). [C47].

[5] (с. 39). [C81].

5.1.—5.6. О бесконечных линейных точечных многообразиях

[1] (с. 40). Общая характеристика этого цикла статей [A9] дана Цермело после окончания работы I.5.2. Входящая в него работа 5.5 опубликована и отдельно [A10].

[2] (с. 40). [B59]. Эта книга итальянского математика Дини является лучшей монографией по теории функций действительного переменного в XIX в. О ней см. [C30, с. 101—102]; [C31, с. 146]; ряд его теоретико-функциональных результатов описан Хокинсом [C60, с. 47—54, 111 и др.].

[3] (с. 40). [B45].

[4] (с. 46). Кантор еще не вводил понятие замкнутого множества — оно появится в 1884 г. в I.5.6,— и вспомогательное множество Q служит здесь, как и в ряде последующих формулировок, для выражения замкнутости множества P.

[5] (с. 46). Множество, не содержащее элементов, теперь называют пустым множеством и чаще всего обозначают символом $\varnothing$. Кантор обычно его называл просто нулем.

[6] (с. 49). Это примечание Цермело относится не только к № 1—2 настоящей работы, но и ко всему циклу статей [A9]. Цермеловские ссылки «(№ 5, § 9)» и «(№ 5, § 4)» относятся к [A9, № 5] или отдельному ее изданию [A10]. Последняя ссылка примечания изменена: вместо «IV.3 и IV.4» в [A1, с. 148] поставлено «II.1—II.3»; это вызвано, во-первых, изменением нумерации разделов и нумерации статей в них, а во-вторых, включением в перевод работы II.1, о которой Цермело не знал. Далее аналогичные изменения не оговариваются.

[7] (с. 50). Значительно ранее эта теорема была высказана и не вполне корректно доказана чешским математиком, логиком и философом Больцано [C45, с. 457—461]. Вейерштрасс знал эту работу Больцано — см. [C53, с. 96].

[8] (с. 51). [B82]. Об Эрмите см. [C35]. О его статье [B82] см. [C14, с. 17—19; C35, с. 84—94]

[9] (с. 51). [B128, с. 1].

[10] (с. 56). [B14].

[11] (с. 56). Липшиц — немецкий математик XIX в.; Кантор ссылается на его книгу [B105]. Здесь в гл. III (с. 28—60) изложены элементы теории действительных чисел, напоминающей канторовскую. Авторы теорий действительных чисел не упоминаются, а само изложение далеко не безупречно.

[12] (с. 56). По поводу последней из доказанных Кантором теорем и его соображений, связанных с нею, см. также письма Кантора Дедекинду от 7 и 15 апреля 1882 г. (здесь XXXVII, XXXVIII).

[13] (с. 57). Имеется в виду работа немецкого математика Линдемана [C71]. О нем и его результате см. [C29, с. 181—182].

[14] (с. 57). Эту формулу Кантор дал в заключение следующей статьи цикла [A9, № 4]. В [A1] его исправление опущено. В первоначальной публикации [A9, № 4] имеется дополнение: «В заключение я хотел бы исправить указание на константу, содержащееся в предшествующем номере этого сочинения (т. 20, с. 118), хотя его цель не зависит от ее точности. n-Мерный объем пространственного образа, обозначенного там через B, при более точном исследовании оказывается равным

$$\frac{2\pi^{(n+2)/2}}{\Gamma((n+1)/2)}$$

— числу, совпадающему с $2^n\pi$ только в случаях $n=1$ и $n=2$, но меньшему, чем $2^n\pi$, в остальных случаях» (Math. Ann., 1883, Bd. 21, S. 57—58).

[15] (с. 60). В этом абзаце Кантор, по-видимому, пишет о работах немецких математиков Дюбуа-Реймона [B61, с. 188—189] и Гарнака [B77, с. 259; B78]. Введенные ими типы множеств описаны в [C30, с. 113—115; C60, с. 58—60]; более подробно эти множества и относящиеся к ним соображения Кантора рассмотрены Даубеном [C50, с. 89—94], но кое-где не вполне корректно.

[16] (с. 63). Нижеследующий текст перевода принадлежит П. С. Юшкевичу (библиографические данные в [A10]). Перевод проверен по [A1, с. 165—208] и в него внесены лишь несущественные изменения. К тексту в [A1, с. 165—208] добавлено предисловие, содержащееся в первоначальной публикации данного труда [A10] и опущенное в [A1].

[17] (с. 63). Речь идет о I.5. 1—4.

[18] (с. 63). Т. е. I.2 и I.3.

[19] (с. 70). Доказательство появилось в I.6, с. 116—117. Кантор ведет здесь речь об основанном в 1882 г. шведским математиком Миттаг-Леффлером журнале «Acta mathematica» и его работе [B112]. Относительно содержания указанной работы Миттаг-Леффлера см. [C30, с. 197—203].

[20] (с. 71). К числу этих «новейших философов» определенно относился Гегель.— См. [C12, с. 306].

[21] (с. 71). В частности, эту концепцию поддерживали и развивали крупнейшие математики XIX в. Лежен-Дирихле, Вейерштрасс, Дедекинд и другие.

[22] (с. 72). Актуальная бесконечность не существует (лат.).

[23] (с. 72). Т. е. «(предрешающее) желание основания» (лат.) — логический термин для характеристики понятия некоторого вывода без доказательства или получения его из посылок, вытекающих из него; в последнем случае эта ошибка носит название ошибки ложного (порочного) круга и как раз ее имеет в виду Кантор. Ссылается он на [B2, с. 291—294].

[24] (с. 73). Кантор имеет в виду тот же труд Аристотеля [B2, с. 292].

[25] (с. 74). Указанные в тексте и в сноске места из сочинений Локка, Декарта, Спинозы относятся соответственно к [B32, с. 219—237; B15; B16, с. 437—438; B44; B42]. Указанный Кантором в тексте номер письма Спинозы своему другу, голландскому врачу и литератору Мейеру, соответствует публикации этого письма в «Посмертных сочинениях» Спинозы; обещанное в следующем абзаце «подробное и исчерпывающее рассмотрение» письма Спинозы не последовало. Работы Лейбница — [B31; B30, с. 157—159; B95, с. 436; B98, с. 744; B94, с. 209; B97, с. 218; B92, с. 307]. В переводе на русский язык отрывка из работы [B92] указанное Кантором место отсутствует; он, по-видимому, имел в виду утверждение Лейбница о непостижимости бесконечности воображением: «Таким образом, не приходится удивляться, если наше новое исчисление разностей и сумм, приводящее к рассмотрению бесконечности, а значит отдаляющееся от того, что может постичь воображение, не сразу достигло совершенства». Далее — [B93, с. 322; B96, с. 389; B99, с. 273]. Работа Гоббса — [B12, с. 131—132] (Кантор ссылается здесь на гл. VII, § 11). Работа Беркли — [B7, с. 233—235, п. 128—131].

[26] (с. 74). Определение всего является отрицанием (лат.).

[27] (с. 74). См. примеч. 22 и 23.

[28] (с. 74). Бесконечное (трансфинитное); сверхконечное (лат.).

[29] (с. 75). Разумному определению доступно все, как конечное, так и определенно бесконечное, за исключением бога (лат.).

[30] (с. 77). Не существует бесконечного числа, или линии, или какой-нибудь другой бесконечной величины, если брать их как настоящие целые. Истинная бесконечность не есть вовсе модификация, она — абсолют; наоборот, лишь только мы начинаем модифицировать, так начинаем ограничивать или образуем конечное (фр.). Эти высказывания находятся соответственно в [B30, с. 157].

[31] (с. 77). Я настолько за актуальную бесконечность, что вместо того, чтобы допускать, как это делают обычно, что природа ее ненавидит, считаю, что эта бесконечность проявляется в природе всюду, чтобы выразить совершенства ее творца. Так, я думаю, что не существует никакой части материи, которая не была бы не только делима, но и фактически разделена, а значит, и наименьшую частицу нужно рассматривать как некий мир, заполненный многими различными творениями (фр.) [B91, с. 118].

[32] (с. 77). [B8].

[33] (с. 78). Дано (лат.).

[34] (с. 78). Говоря философски, я не считаю бесконечно малые величины меньшими, чем бесконечно большие, т. е. инфинитезимальное не меньше, чем кратно бесконечное. Как те, так и другие я рассматриваю, в двух словах, вымыслами ума, приспособленными для вычислений, вроде мнимых корней в алгебре. Вместе с тем я показал, что эти выражения в высшей степени полезны для сокращения рассуждений и для открытий и что они не могут привести к ошибке, ибо достаточно вместо бесконечно малой подставить сколь угодно малую величину, чтобы ошибка стала меньше заданной, из чего следует, что ошибки быть не может [В95, с. 436].

[35] (с. 81). Здесь указываются книги [В74] и [В114]. О первой из них см. [С6, с. 67—86].

[36] (с. 81). Во второй части этого абзаца речь идет о работах [В23, В14, А5 (здесь I.1)], в которых изложены соответственно вейерштрассовская, дедекиндовская и канторовская теории действительных чисел. Вебер в рецензии на книгу Гарнака [В77] написал по поводу содержащейся в ней теории действительных чисел лишь следующее: «Свое изложение автор начинает с краткого обзора операций над рациональными числами, а затем, побуждаемый проблемой извлечения корня, переходит к введению иррациональных чисел, осуществляемому в форме, которая восходит к Вейерштрассу и сообщена Гейне» [В143, с. 163]; Вебер, разумеется, имел в виду работу Гейне [В79]. По поводу теории действительных чисел у Липшица см. примеч. 11.

[37] (с. 83). [В79]. См. примеч. 24 к статье II.3.

[38] (с. 85). Кантор имеет в виду здесь заключительное предложение предисловия Дедекинда в [В14, с. 11]: «Какую же пользу представит выделение, хотя бы только в понятии, вещественных чисел более высокого порядка, я согласно с моим пониманием системы вещественных чисел, как совершенной в самой себе, еще признать не в состоянии».

[39] (с. 88). Из частей, делимых до бесконечности (лат.).

[40] (с. 88). Характеристика Кантора представлений Левкиппа, Демокрита, Аристотеля и Лукреция излишне упрощенна. В связи с этим можно отослать читателя, например, к книгам [С26, С19, С37, С11].

[41] (с. 91). К сущности вещи относится то, что, будучи дано, делает необходимым наличие самой вещи, а если оно упразднено, то необходимым образом исчезает и сама вещь; или же то, без чего вещь и, наоборот, что без вещи не может ни существовать, ни мыслиться (лат.).

[42] (с. 91). Речь идет о книге Дедекинда [В14], в которой на с. 17 характеризуется непрерывность. Пояснение Цермело (в квадратных скобках) относится к книге Хаусдорфа [С40, с. 56].

[43] (с. 97). Четвертого не дано (лат.).

[44] (с. 101). Первые слова примечаний Кантора, набранные курсивом, представляют собой повторение слов текста работы 1.5.5, к которым делается соответствующее разъяснение.

[45] (с. 101). Греческие слова «εἶδος» и «ἰδέα» — синонимы и переводятся на русский язык словом «идея». Ссылаясь на диалог Платона «Филеб» [В37], Кантор, по-видимому, имел в виду [В37, 18 b—d (с. 17—18); 24, b—e (с. 27—28), 25, b—e (с. 28—29), 26, b—e (с. 30—31)]. Имеющееся некоторое терминологическое различие в переводах канторовского примечания и указанных мест из «Филеба» обусловлено несколько отличающимися переводами ключевого слова «πέρας», означающего «границу», «предел», которому на немецком языке соответствует слово «Grenze». В [В37] в качестве значения для него взято слово «предел», а отсюда слова «беспредельное», «беспредельность» и т. д. П. С. Юшкевич выбрал для этого слово «граница», из которого получилось «безграничное» не в смысле «не имеющее предела», а в смысле «не имеющее границы, неопределенное». Вследствие того что слово «предел» получило в математике смысл, не отвечающий тому, что подразумевали под этим древние греки, здесь в качестве русского слова для «Grenze» взято «граница». Слово «μικτόν» переведено в «Филебе» словами «мера» [В37, с. 28] или «соразмерность» [В37, с. 28—29]. Относительно пифагорейского происхождения этих понятий Платон прямо не говорит. Кантор, вероятно, имел в виду то место из «Филеба», где речь идет о «наших предшественниках» [В37, с. 19]. В цитируемой им книге Боека как раз отмечается [В52, с. 54] пифагорейское

происхождение указанных понятий. Из литературы на русском языке можно сослаться на книгу Гайденко [C11, с. 164—169].

46 (с. 101). К работам немецких философов Целлера [B147], Циммермана [B150] и Брунгофера [B56] можно добавить книги Гайденко [C11, с. 315—325, 517—528] и Кузнецова [C24, с. 106—156]. Сочинения Николая Кузанского имеются в русском переводе.

47 (с. 101). Альбрехт фон Галлер — швейцарский натуралист, врач и поэт XVIII в. Кантор цитирует заключительную строку его незаконченного стихотворения «Über die Ewigkeit» («О вечности»): «Ich zieh'sie ab und du liegst ganz vor mir». Отрывки из этого стихотворения цитировал Кант [C20, с. 209, 217, 259]; он воспользовался им и в «Критике чистого разума» [B21, с. 531], за что его критиковал Гегель [C12, с. 308].

48 (с. 102). См. примеч. 22.

49 (с. 102). [B62] и [B87]. Дюринг и Кирхман — немецкие философы XIX в.

50 (с. 102). Речь идет о примечаниях немецкого философа и логика Ибервега к переводу трактата Беркли [B50, с. 108—150], изданного в виде двенадцатого выпуска обширной серии «Philosophischer Bibliothek, oder Sammlung der Hauptwerke der Philosophie, alter und neuer Zeit», основанной Кирхманом и включившей за 1868—1886 годы 319 выпусков.

51 (с. 103). Кантор ссылается здесь на первую часть второго тома «Логики» Зигварта с дополнительным названием «Учение о методе». Первый том с подзаголовком «Учение о суждении, понятии и умозаключении» вышел в 1873 г. Русский перевод осуществлен с третьего издания 1905 г. и процитированное Кантором предложение находится в [B20, с. 45]. Слова на латинском языке означают «противоречие в прилагательном».

52 (с. 103). [B68] и [B65]. Фриз и Фишер — немецкие философы.

53 (с. 103). Под адекватной идеей (idea adaequata) я разумею такую идею, которая, будучи рассматриваема сама в себе без отношения к объекту (objectum), имеет все свойства или внутренние признаки истинной идеи (лат.) [B43, с. 403].

54 (с. 103). [B147].

55 (с. 103). Порядок и связь идей те же, что порядок и связь вещей (лат.) [B43, с. 407].

56 (с. 104). Фома Аквинский — один из «учителей» католической церкви, систематизатор и крупнейший представитель западно-европейской схоластики. Кантор ссылается на его работы [B138, B139] и еще одну («De natura loci»), которую не удалось найти. Кроме названных Кантором книг томистов Журдена [B83] и Вернера [B144], можно указать книгу Боргоша [C7] на русском языке.

57 (с. 105). В русском переводе все это предложение таково: «Механика есть наука о движении; мы охарактеризуем ее так: описать полно и простейшим образом происходящее в природе движение» [B22, с. 5]

58 (с. 105). Теперь данный вопрос можно считать в известном смысле решенным. Намерение Кантора и его последователей доказать, что мощность континуума равна $\aleph_1$ (мощности множества порядковых чисел второго числового класса), не могло быть осуществлено вследствие доказанных Гёделем [C13] и Коэном [C21] соответственно непротиворечивости и независимости этого утверждения от остальных аксиом Цермело—Френкеля — результатов, распространенных и на другие важнейшие аксиоматические системы теории множеств.

59 (с. 105). В этом примечании Цермело речь идет о не вполне корректном доказательстве Шрёдера [B127] и о доказательстве Бернштейна, сообщенном им на семинаре Кантора в Галле в 1897 г. и опубликованном в следующем году в книге Бореля [C46, с. 105—106].

60 (с. 106). Цермело указывает здесь первое издание книги Хаусдорфа [C59]. В русском переводе [C40], скомпонованном из двух изданий книги Хаусдорфа, данный результат отсутствует.

61 (с. 106). [C61].

62 (с. 108). История этого метода доказательства еще не изучена. Отдельные исторические сведения о нем содержатся в [C53]. В русском переводе «Курса анализа» Коши соответствующее рассуждение находится в [B24, с. 437—439].

63 (с. 109). Кантор имеет в виду парадоксы Зенона и ссылается на «Физику» Аристотеля [B3, с. 199—201]. Его оценка этих парадоксов как простых паралогизмов ошибочна. О них см., например, статью Яновской [C44].

[64] (с. 109). Мере — французский писатель, оратор, салонный философ XVII столетия. Бейль — французский философ и публицист. «Исторический и критический словарь» Бейля издавался начиная с 1697 г. (*Baile P.* Dictionnaire historique et critique. Rotterdam: Leers, 1697. Vol. 1, 2) многократно и в разном количестве томов. Кантор не указывает, каким изданием он пользовался. Скорее всего, он обращался к изданию 1820 г. [B47]; в нем статьи о Зеноне Сидонском и Зеноне Элейском помещены в т. 15. Русский перевод значительно сокращен.

[65] (с. 120). Речь идет о статье Бендиксона [B48]. Он обнаружил ошибочность утверждения Кантора в [A10, с. 31 (здесь I.5.5)] и написал ему письмо с изложением своих результатов. Кантор посоветовал опубликовать их, что Бендиксон и сделал.

[66] (с. 140). Эту теорему в 1887 г. передоказал Пеано [C76, с. 165—166], не сославшись на Кантора. Оригинал указываемой Цермело книги Дженокки—Пеано [C17], вышедший под авторством одного Дженокки, был фактически написан Пеано [C67, с. 11—15] и не содержал указаний на данную теорему. Переводчики последней книги на немецкий язык Больман и Шепп в указанном Цермело месте добавили ее, опираясь на [C76], и назвали свойство γ, фигурирующее в теореме Кантора (у Пеано в [C76] оно названо «свойством *q*»), дистрибутивным свойством. Когда Цермело в статье [C86] применял это свойство, то, следуя Больману и Шеппу, приписал указанную теорему Пеано. Теперь он признал свою ошибку.

[67] (с. 140). Вряд ли можно согласиться с Цермело в его оценке долебеговских мероопределений — достаточно вспомнить определения меры по Пеано—Жордану и по Борелю. Ссылается он здесь на [C48] и [C86].

[68] (с. 141). См. примеч. 58.

6. О различных теоремах теории точечных множеств, расположенных в непрерывном пространстве *n* измерений. Сообщение первое

[1] (с. 141). Эта публикация представляет собой извлечение из письма Кантора издателю журнала «Acta mathematica» Миттаг-Леффлеру [A11].

[2] (с. 144). Название журнала в круглых скобках — переведенное на французский язык (и сокращенное) название немецкого журнала «Mathematische Annalen».

[3] (с. 145). См. примеч. 65 к статье I.5.6.

7. О мощности совершенных точечных множеств

[1] (с. 146). Данная публикация — тоже извлечение из письма Миттаг-Леффлеру (см. примеч. 1 к статье I.6).

[2] (с. 146). Здесь Кантор ссылается на перевод своей работы [A9, № 4], помещенный в «Acta mathematica».

[3] (с. 147). Здесь тоже ссылка на перевод [A7], помещенный там же.

[4] (с. 148). Тоже ссылка на перевод [A9, № 4].

[5] (с. 149). [B116].

[6] (с. 149). Ссылка на перевод [A9, № 5].

[7] (с. 150). В 1882 г. Гарнак высказал теорему: если непрерывная на $[a, b]$ функция $f(x)$ удовлетворяет тому условию, что для всех $x \in [a, b]$, за исключением дискретного множества значений x (т. е. линейного точечного множества, точки которого можно заключить в конечное число интервалов, общая длина которых сколь угодно мала), можно задать такую верхнюю границу приращений Δx, что

$$\left| \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right|$$

меньше сколь угодно малой величины δ, то $f(x)$ постоянна на всем $[a, b]$ [B78, с. 241]. Эту теорему и указывает Кантор. Как следует из дальнейшего текста работы Кантора, он беседовал на эту тему с Шеффером, который тогда подготовил к печати статью [C77], где, в частности, указана ошибочность другой теоремы в той же работе Гарнака (следствием последней была у него приведенная выше теорема).

8 (с. 150). Шеффер опубликовал свою работу [С77] в следующем номере «Acta mathematica».

9 (с. 151). Ссылка на перевод [А9, № 5] в «Acta mathematica». По поводу сформулированной здесь теоремы см. примеч. [5] Цермело к 1.5.5. Можно заметить, что хронологически первым доказательством этой теоремы в ее общем виде было доказательство Дедекинда 1887 г., опубликованное только в 1932 г. [С51], но сообщенное Кантору в 1899 г. (см. письмо XLVIII).

10 (с. 151). Ссылка на перевод [А9, № 5] в «Acta mathematica». По поводу этого утверждения см. примеч. [2] Цермело к I.5. 5 и примеч. 58 к статье I.5.5.

11 (с. 152). Ссылка на тот же перевод [А9, № 5]. Три последующие аналогичные ссылки в этой статье имеют такой же характер.

12 (с. 154). В заключительном абзаце Кантор говорит о теореме единственности тригонометрического разложения функций, доказанной им в [А2] для случая, когда тригонометрический ряд сходится к рассматриваемой функции в каждой точке области ее задания, и обобщенной им сначала на тот случай, когда множество P исключительных точек, в которых тригонометрический ряд или расходится, или сходится не к значению функции, является конечным [А3], а затем и на тот, когда P бесконечно, но его производное множество $P^{(\nu)}$ пусто при некотором конечном ν [А5 (здесь I.1)]. Цермело правильно заметил, что обещанного здесь продолжения исследований со стороны Кантора не последовало. Их продолжили другие математики, но в указанной Кантором общности эта проблема не решена до сих пор. Историю вопроса см. в [С36, с. 215—225]; следует заметить, что теорему единственности для случая приводимого множества P доказал не Гобсон в 1907 г., как это сказано в [С36, с. 224], а Лебег в 1903 г.— см. [С31, с. 71].

8. О различных теоремах из теории точечных множеств в n-кратно протяженном непрерывном пространстве G_n. Сообщение второе

1 (с. 154). Здесь указываются статьи шведских математиков Бендиксона [В48] и Фрагмена [В120].

2 (с. 157). [В49].

3 (с. 168). [В29] и [В28]. Кантор указал первые страницы соответствующих изданий.

4 (с. 169). По поводу этого замечания Цермело можно сказать следующее. Кантор, впервые сформулировав гипотезу континуума в 1878 г. в виде предположения, что всякое бесконечное точечное множество или счетно, или имеет мощность континуума (см. с. 34), почти всегда считал ее справедливой, пользовался ею и неоднократно объявлял, что ему вот-вот удастся или даже удалось доказать ее (см. с. 89—90, 361). В указанном Цермело месте Кантор, напротив, исходит из предположения, не встречающегося в других его работах и в переписке, что могут существовать бесконечные точечные множества не только счетной и континуальной мощностей, но и множества любой мощности $\aleph_\alpha$, где α — произвольное порядковое число первого или второго числовых классов. Другими словами, Кантор допускал здесь, что гипотеза континуума не выполняется, и пытался изучить структуру произвольных точечных множеств в предположении несправедливости этой гипотезы. Данное направление исследований не привлекло внимание математиков, воспринявших веру Кантора в истинность гипотезы континуума; даже те из них, которые продолжали изучать адхеренции и кохеренции точечных множеств, например Юнг и Некрасов, не обратили внимание на этот аспект канторовской работы I.8 — об этом см. [С32, с. 125—135]. Между тем после доказательства независимости гипотезы континуума от других аксиом теории множеств на эти результаты Кантора можно смотреть и как на первые шаги в построении так называемой неканторовской теории множеств, о которой теперь начали писать (см., например, [С22]).

5 (с. 169). Цермело ссылается здесь на письма Кантора Дедекинду и свои комментарии к ним, помещенные в «Приложении» к [А1]. В данной книге см. письма XLV—XLVII и XLIX.

10. К обоснованию учения о трансфинитных множествах

[1] (с. 173). Три эпиграфа, предпосланные Кантором этой работе и означающие соответственно в русском переводе:

Гипотез не измышляю (лат.).

Мы приписываем законы разуму или вещам не по нашему произволу, а, как добросовестные писцы, слушаем и записываем то, что дает и диктует нам голос природы (лат.).

Наступит время, когда то, что сейчас скрыто, будет вынесено на дневной свет стараниями будущих поколений (лат.).

— заимствованы им у Ньютона [B34, с. 662], Бэкона [C50, с. 238—239] и библии.

[2] (с. 188). В настоящее время термин «отображение» («Abbildung») множеств друг на друга понимается в более широком смысле — см., например, [C2, с. 14]. Кантор здесь принял для него тот смысл, который передается теперь словами «соответствие подобия» или «подобное соответствие» [C2, с. 25—26], а на немецком языке «Ahnlichkeitsabbildung» (понимаемое, впрочем, и в более расширенном смысле).— См., например, [C68, с. 105—106].

[3] (с. 191). [B142, с. 30 немецкого перевода]. Веронезе — известный итальянский математик. Отношение Кантора к введенным Веронезе трансфинитным числам описано в [C50, с. 233—236].

[4] (с. 192). [B66]. Фонтенель — французский философ, ученый и писатель, один из первых популяризаторов науки, член Парижской академии наук и ее непременный секретарь (1699—1740). Представление, которое может сложиться о его книге [B66] только из этих слов Кантора, было бы односторонним. В ней есть и соображения, заслуживающие внимания с точки зрения предыстории теории множеств, вроде различия, напоминающего канторовское, абсолютной бесконечности (которую Фонтенель называл «Infini Métaphisique») и бесконечности, доступной математическому изучению (и названном им «Infini Géometrique») [1], или той же идеи актуально бесконечного числа. Да и сам Кантор в другом месте [A23, с. 108] рекомендовал эту книгу как «заслуживающую всяческого внимания», хотя здесь же характеризовал ее математические основы как «абсурдные». Резко отрицательное отношение Кантора к «бесконечным числам» Фонтенеля в значительной мере было обусловлено тем, что в [B66] наряду с актуально бесконечно большими числами рассматривались и актуально бесконечно малые числа, а последние Кантор не хотел признавать. Возможно, небезынтересным было бы прочтение книги Фонтенеля и с точки зрения нестандартного анализа.

[5] (с. 192). [B86].

[6] (с. 198). Обещанного здесь продолжения не последовало.

[7] (с. 241). Следует подчеркнуть объективный характер отмеченных Цермело трудностей. Как утверждение, что континуум имеет вторую бесконечную мощность (т. е. $\aleph_1$), так и утверждение о возможности вполне упорядочить всякое множество (указать для всякого множества эквивалентное ему вполне упорядоченное множество) или его эквивалент — аксиома выбора, оказались математическими предложениями, принадлежащими к основным принципам современной математики: они не противоречат другим ее принципам и не зависят от них. См. также примеч. 58 к статье I.5.5.

[8] (с. 241). [C59, § 2], [C40, с. 26—27].

[9] (с. 242). Приговор Цермело излишне суров. Указанное им «корректное доказательство» опирается в конечном счете на аксиому выбора. Но ею же пользуется и Кантор в своем рассуждении, не сформулировав ее явно. Различие заключается лишь в способах выборов элементов в множествах рассматриваемого семейства множеств»: Цермело предпочитает *одновременный* выбор элементов во всех множествах семейства, а Кантор выбирает их *последовательно* один за другим.

[10] (с. 242). [C16, с. 29].

[11] (с. 242). Здесь Цермело ссылается на опубликованные им извлечения из переписки Кантора и Дедекинда в [A1]. В настоящем издании см. письма XLV—XLIX.

[12] (с. 242). Здесь ссылка на те же письма, что в предыдущем примеч.

[13] (с. 242). Ссылка на [A1]. В настоящем издании с. 191, абз. 2 св.

---

[1] Относительно этого различения у Кантора см. с. 264, 268.

14 (с. 243). В настоящем издании с. 196, строка 19 св.

15 (с. 243). В настоящем издании с. 90, 122, 123.

16 (с. 243). [С59; С40, с. 56].

17 (с. 244). [С61; С59; С40, с. 62—63]. Гессенберг в указанном Цермело месте отметил принадлежность этой леммы Цермело.

18 (с. 244). Это примечание Цермело относится к [А1]. В связи с этим можно заметить, что проблема определения конечного множества не столь проста, как это представлено у Цермело. Имеется много различных подходов к понятию конечного множества и указанный им — лишь один из них; см., например, [С82].

19 (с. 245). В этом абзаце Цермело ссылается на первое издание книги Хаусдорфа [С59]. Определение при помощи трансфинитной индукции имеется в русском переводе [С40, с. 66], а понятие нормальной функции отсутствует. Можно отметить, что канторовское доказательство теоремы А содержит пробел, отмеченный и устраненный Жегалкиным [С18, с. 257].

20 (с. 245). [С59]; см. предыдущее примечание.

II. РАБОТЫ ПО ФИЛОСОФСКИМ ВОПРОСАМ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1. Принципы теории порядковых типов. Первое сообщение

1 (с. 264). Нижеследующий перевод по публикации Граттан-Гиннеса [С55, с. 83—101]. Данная работа была подготовлена Кантором для опубликования в седьмом томе «Acta mathematica». Однако издатель этого журнала Життаг-Леффлер отказался напечатать ее. Объясняя Кантору причину отказа, он, в частности, писал:

«Я убежден, что публикация Вашего нового труда до того, как Вы сможете изложить новые позитивные результаты, окажется серьезной угрозой для Вашей репутации среди математиков. Я вполне понимаю, что это для Вас в сущности безразлично. Однако если тем самым Ваша теория будет дискредитирована, то потребуется много времени, прежде чем она привлечет внимание математиков. Вполне может случиться, что Вам и Вашей теории не будет отдано должное при нашей жизни. Тогда эта теория будет открыта кем-либо через сто или более лет и окажется, что вся она была уже у Вас, и справедливость в отношении Вас будет восстановлена. Однако на этом пути (публикации данной работы Кантора.— *Ф. М.*) Вы не окажете того существенного влияния на развитие нашей науки, которое Вы, естественно, хотели бы оказать как всякий работающий для науки. Поэтому я считаю, что для дела и для Вас будет лучше всего отложить публикацию теории типов, пока Вы не сможете дать применений для нее» [С55, с. 102].

Граттан-Гиннес тщательно рассмотрел обстоятельства написания и отклонения этой статьи во введении к [С55, с. 66—74], подтвердив свои соображения извлечениями из переписки Кантора с Миттаг-Леффлером [С55, с. 74—82, 101—105]. См. также [С50, с. 137—140, 150—156].

2 (с. 246). [В133]. Здесь французский математик Таннери прореферировал два первых тома «Acta mathematica», в частности на с. 162—171 статью Бендиксона [В48] и переводы работ Кантора [А4—А7, А9, № 1—5, А11], помещенные во втором томе.

3 (с. 247). Греческие слова в тексте означают соответственно «тип», платоновские «умозрительные» или «идеальные числа». Тексты в фигурных скобках здесь и далее в этой статье представляют собой добавления, сделанные Кантором при последующей обработке статьи [С55, с. 82].

4 (с. 247). Здесь с. 67 и след.

5 (с. 248). О теории типов известного химика Жерара см. [С8, с. 20—25].

6 (с. 248). Латинский и греческий тексты означают общего представителя класса эквивалентных множеств.

7 (с. 249). В настоящее время на французском языке употребляется термин «puissance», на английском — «power», на итальянском — «podesta».

8 (с. 249). Здесь статья I.5.5, § 12 и примеч. 2) Кантора к этой работе.

[9] (с. 249). См. примеч. 2 к статье I.10.

[10] (с. 249). Кантор, по-видимому, готовил или даже написал вариант переведенной здесь статьи и на французском языке, см. [C55, с. 74, 81]. Французские слова в тексте — перевод названия ее.

[11] (с. 250). Тем самым (лат.).

[12] (с. 251). Здесь ссылка на работы Миттаг-Леффлера [B112] и Кантора [A11, A12, A9].

[13] (с. 257). См. примеч. 2 к статье I.10.

2. О различных точках зрения на актуально бесконечное

[1] (с. 262). Нижеследующий текст перевода принадлежит П. С. Юшкевичу (библиографические данные в [A17]). Перевод проверен по [A1, с. 370—376] и в него внесены лишь несущественные изменения. Энестрём — шведский историк математики.

[2] (с. 262). Видели ли Вы и изучили ли сочинение аббата Муаньо, озаглавленное: «Невозможность актуально бесконечного числа; наука в соотношении с верой» (Париж: Готье—Вилларс, 1884)? (фр.). Муаньо — французский священник, издавший многие труды Коши, в том числе его «Семь лекций общей физики» [B25]. В качестве приложений к этим лекциям Коши помещены и указанные сочинения Муаньо [B33].

[3] (с. 262). О Жердиле см. сказанное Кантором; названы его работы [B71] и [B72].

[4] (с. 262). Выражения на латинском языке означают соответственно «бесконечные числа противоречивы» и «актуальная величина противоречива». Данных о работах итальянского философа Тонджоржи найти не удалось. На указанные здесь места из «Логики» Зигварта [B20] и «Системы логики и метафизики или наукоучения» Фишера [B65] Кантор уже ссылался (см. примеч. 51 и 52 к статье I.5.5.).

[5] (с. 263). О Фоме Аквинском см. примеч. 56 к статье I.5.5. О его основном сочинении «Теологическая сумма» [B136] см. [C7, с. 27—29 и след.], в частности об упомянутых Кантором пяти аргументах [C7, с. 70—75]; в книге Фомы Аквинского [B136] эти аргументы на с. 17—19.

[6] (с. 263). Гутберлет — немецкий теолог и философ, представитель томистической философии. Был лично знаком с Кантором и оказал влияние на его интерес к теологии вообще и философии Фомы Аквинского в частности. Книга Гутберлета [B75] была написана до ознакомления с теоретико-множественными идеями Кантора. Впоследствии Гутберлет защищал канторовскую теорию множеств от нападок на нее теологов и философов.

[7] (с. 263). О Липшице см. примеч. 11 к статье I.5.3. Речь здесь идет о письме Гаусса [B70], многократно рассматривавшемся в математической и историко-математической литературе; см., например, [C30, с. 24].

[8] (с. 263). См. примеч. 23 к статье I.5.5.

[9] (с. 263). Греческий текст означает то же самое, что и в примеч. 23 к статье I.5.5.

[10] (с. 264). Арно — французский философ и теолог, последователь Декарта. Кантор ссылается здесь на «Мысли» Паскаля [B36, с. 121] и изданную французским томистом Журденом книгу [B84].

[11] (с. 264). Латинские выражения означают соответственно: «во внемировом вечном и всемогущем боге или в творящем начале», «в конкретном или в сотворенной природе», «трансфинитным», «абстрактным образом», а греческие — «умозрительные» или «идеальные числа».

[12] (с. 264). Ренувье — французский философ XIX в., глава школы так называемых неокритицистов. Кантор ссылается на его книгу [B122].

[13] (с. 264). Лотце — немецкий философ-идеалист XIX в. Речь идет о его статье [B106].

[14] (с. 264). Послание папы римского Льва XIII, известное под наименованием «Aeterni Patris» и направленное на возрождение неотомизма. О нем см., например, [C50, с. 140—142] и [C7, с. 135—136].

[15] (с. 265). Кантор ссылается здесь на книгу известного югославского ученого XVIII столетия Бошковича [B55], лекции Коши [B25], лекции французского физика и математика Ампера, статьи [B125] и [B126] другого французского физика и математика Сен-Венана (статьи под указанным Кантором названием в перечне работ Сен-Ве-

нана не значится, а оригинал журнала оказался недоступным; вместо нее в список литературы включена близкая по названию статья [B125]), а также на книги немецких философов Лотце [B107] и Фехнера [B64]. Год издания [B107] он не указал, а эта книга издавалась с 1856 по 1896 гг. пять раз; в списке литературы выбрано третье издание.

[16] (с. 265). Это намерение Кантора осталось неосуществленным.

[17] (с. 266). [B95, с. 436].

[18] (с. 266). Боязнь бесконечности, страх перед нею (лат.).

[19] (с. 266). Имеются в виду знаменитые антиномии Канта [B21, с. 389—500]. См. также примеч. Цермело.

[20] (с. 267). Гербарт — известный немецкий философ и педагог, профессор Гёттингенского и Кенигсбергского университетов. Аллин и Флюгель — немецкие философы, издатели журнала «Zeitschrift für exakte Philosophie». В конце абзаца упомянуто их редакционное примечание к рецензии Баллауфа [B46, с. 389—390, сноска] на канторовскую работу [A10].

[21] (с. 267). Вундт — немецкий логик и философ. Упоминаются его работы [B145, B146].

[22] (с. 268). Цермело имеет в виду работы Кантора [A17] и [A18], первоначально опубликованные в форме извлечений из своих писем разным корреспондентам в журнале «Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik», издававшемся в то время Фихте, а затем перепечатанные в форме небольшой книги [A20].

3. К учению о трансфинитном

[1] (с. 268). Нижеследующий перевод принадлежит П. С. Юшкевичу (библиографические данные в [A18]). В него внесены лишь некоторые исправления и отдельные добавления в сносках, содержащиеся в [A1, с. 378—439].

[2] (с. 270). [B76]. Гутберлет описал здесь отдельные идеи канторовской теории множеств и рассмотрел возражения ее противников. Он, в частности, ввел общее понятие линейно упорядоченного множества [B76, с. 183—184], которое, как утверждал несколько далее Кантор (подстрочное примеч. 7), заимствовал из одной его рукописи. Характер этой рукописи остается не вполне ясным; другое примечание Кантора к данной работе (подстрочное примеч. 25) дает повод высказать предположение, что ею была опубликованная Граттан-Гиннесом рукопись [A13] [здесь II. 1]. В письме Кантора Гутберлету (здесь раздел II) рассмотрены взгляды последнего на понятие актуальной бесконечности.

[3] (с. 271). «Единица есть то, через что каждое из существующих считается единым» и «число же — множество, составленное из единиц» (греч.). Перевод из [B19, с. 9].

[4] (с. 271). Никомах из Геразы — неопифагореец, автор широко распространенного в свое время «Введения в арифметику» [B117]. Приводимое Кантором определение в русском переводе: «Число есть определенное множество, или система единиц, или сплав из единиц».

[5] (с. 271). Боэций — римский государственный деятель, писатель и ученый. Приводимое Кантором определение из [B53] в русском переводе: «Число есть коллективная единица или величина, образованная накоплением единиц» (лат.).

[6] (с. 271). Речь идет о Введении к «Рассуждению о комбинаторном искусстве» [B90] — диссертации Лейбница на степень лиценциата, в которой была выдвинута программа создания универсального логико-математического метода познания (об этой программе см., например, [C23, с. 5—12]). Цитируемое Кантором место из этой диссертации в русском переводе таково: «Всякое *отношение* есть либо *соединение*, либо *соответствие*. В соединении вещи, между которыми имеется отношение, называются частями, а взятые вместе с соединением, они образуют целое. Такое (отношение) имеет место всякий раз, когда множество одновременно мыслится как нечто одно. Под *одним* же понимается то, что постигается *единым актом мышления*, т. е. сразу, как, например, какое-нибудь сколь угодно большое число мы часто охватываем мгновенно какой-то слепой мыслью, хотя для того, чтобы представить себе это же самое число в развернутом виде, не хватило бы и мафусаиловой жизни. Это абстрагирование одного есть единица, а само целое, *состоящее из таких абстрактных единиц*, или целостность, называется числом» (лат.).

[7] (с. 271). Томасиус или Томазий — немецкий философ, филолог и математик, профессор Лейпцигского университета во время учебы там Лейбница и впоследствии один из корреспондентов последнего. В русском переводе упоминаемого Кантором письма Лейбница к нему латинская фраза передана словами: «Число я определяю так: единица+единица+единица и т. д., т. е. как совокупность единиц» [В27, с. 97]. Возможно, следует предостеречь читателя от слишком узкого понимания знака «+» в этом переводе как арифметического сложения. Латинское «et» в тексте Лейбница по его смыслу ближе к логико-математической конъюнкции.

[8] (с. 271). Гамильтон — шотландский математик XIX в. О нем и его трудах существует обширная литература. Ограничимся указанием статьи Мэтьюса [С73], где проанализированы взгляды Гамильтона на затронутый Кантором вопрос и приведен большой список соответствующей литературы, в частности, рассмотрено понимание Гамильтоном арифметики как «науки о чистом времени».

[9] (с. 272). [В148]. Целлер — немецкий теолог и философ — гегельянец. В указанном сборнике помещены, в частности, статьи Гельмгольца [В11] и Кронекера [В26] соответственно на с. 14—52 и 263—274.

[10] (с. 272). «Порядковый знак», т. е. знак, отмечающий порядковое расположение (лат.).

[11] (с. 272). Дословно «потом — раньше» (лат.).

[12] (с. 272). Кантор ссылается здесь на латинский текст книги [В41]. В [А1, с. 382] здесь опечатка: вместо «cap. 18» нужно «cap. 20», так как именно в 20 главе этой работы Секста Эмпирика речь идет о числе [В41, с. 352—355].

[13] (с. 273). Бертран — швейцарский математик. Речь идет о его книге [В51]. Перевод процитированного отрывка: «Первоначально люди были охотниками или пастухами. *Им и пришлось начать считать*: для них важно было не терять своих животных, а для этого нужно было убедиться вечером, все ли они возвратились с пастбища. Тот, у которого их было только четыре или пять, мог заметить с одного взгляда, все ли они возвратились; *однако для того, у кого их было двадцать, одного взгляда было недостаточно*. Поэтому, смотря на этих животных, возвращающихся *одно за другим*, он вынужден был изобрести *последовательность слов* для подобного числа, и, *храня эти слова в памяти*, он повторял их на следующий день по мере возвращения животных; если же они переставали входить до того, как он закончил свои слова, то становилось ясным, что *животных не хватает столько, сколько слов ему осталось произнести*».

[14] (с. 273). При надлежащем изменении (лат.).

[15] (с. 273). Бен Акиба — еврейский теолог и философ.

[16] (с. 273). Т. е. [А16].

[17] (с. 273). [В89] и [В113]. Кронекер — немецкий математик и один из противников теории множеств; в указанной Кантором работе он выступил, в частности, против дедекиндовской теоретико-множественной трактовки теории делимости алгебраических чисел и против теорий действительных чисел [В89, с. 336]. Французский математик Мольк последовал в этом за Кронекером.

[18] (с. 274). Т. е. [В26].

[19] (с. 274). В расширенном виде (лат.).

[20] (с. 274). Кантор ссылается здесь на книгу немецкого физика Кирхгофа [В22] и статью Кронекера [В88] в ее журнальном варианте. Процитированное им выражение содержится во фразе, приведенной в примеч. 57 к статье 1.5.5.

[21] (с. 274). Это стихотворение Шиллера на языке оригинала и в русском переводе имеется в [В26, с. 34]. Отнесение его Кантором в разряд юмористических вряд ли оправдано. Оно, скорее, имеет идеалистически-пифагорейскую направленность.

[22] (с. 274). [В54]. См. примеч. 5.

[23] (с. 274). О логическом круге Кантор говорит в связи с рассуждением Кронекера в [В26, с. 37—38].

[24] (с. 275). В указанном здесь и в примеч. 17 месте Кронекер, возражая против теорий действительных чисел, сослался лишь на статью Гейне [В79]. Кантор характеризует теперь последнюю несколько односторонне. Гейне во введении к ней писал, что та часть его работы [В79], в которой излагается теория действительных чисел, завершена уже давно и что ее содержание подсказано соображениями других математиков особенно Вейерштрасса, ставшими известными Гейне главным образом из устных сооб-

щений. И лишь после этого он продолжал: «Особой благодарностью я обязан г-ну Кантору из Галле за его устные сообщения, которые оказали значительное влияние на форму моей работы тем, что я заимствовал у него соображения о способе введения произвольных чисел при помощи тех особенно удобных последовательностей, которые здесь (A, § 1, Def. 1) названы числовыми последовательностями (т. е. фундаментальными последовательностями в смысле Кантора.— *Ф. М.*)» [B79, с. 172—173]. Ссылка в скобках означает первое определение из § 1 раздела A статьи [B79].

[25] (с. 275). К числу этих теологов принадлежал, в частности, кардинал Францелин — ведущий философ и папский теолог при Ватиканском совете. Нижеследующие письма III и IV были направлены Кантором именно ему.

[26] (с 275). Статьи под таким названием у Кантора не имеется. Речь здесь идет о второй половине его работы II.2, начиная со слов «Несмотря на существенные различия...» (с. 265). На это указал сам Кантор в отдельном примечании к [A17], но при перепечатке статьи в [A1, с. 370—376] это его примечание было опущено.

[27] (с. 275). Как бы (лат.).

[28] (с. 276). Лассвиц — немецкий философ и историк науки. Наибольшую известность ему доставила книга «История атомистики от средних веков до Ньютона» [C69].

[29] (с. 276). См. примеч. 7 к статье II.2.

[30] (с. 277). На немецком языке соответственно «Mächtigkeit» и «Valenz».

[31] (с. 277). См. примеч. 2.

[32] (с. 280). В толковании этих греческих слов Кантором далее в том же абзаце первое из них означает неопределенную, незаконченную, потенциальную бесконечность, а второе — определенную, завершенную, актуальную бесконечность. У древних греков они имели более расплывчатый характер.— См., например, [C37, с. 51—53] и указанную там литературу.

[33] (с. 280). [B145].

[34] (с. 281). [B46]. В переводе канторовской работы [A18] П. С. Юшкевичем эта сноска обрывается здесь. Продолжение сноски дается в соответствии с [A1, с. 392—393].

[35] (с. 281). См. примеч. 20 к статье II.2.

[36] (с. 281). Латинские выражения означают соответственно «не каждому человеку удается добраться до Коринфа» и «противоречие в терминах».

[37] (с. 281). Во всем, совершенно, полностью (лат.).

[38] (с. 281). [B81, с. 88 и след.]. О Гербарте см. примеч. 20 к статье II.2.

[39] (с. 281). Кантор обращается здесь к образу ротозея Ганса Гука из стихотворения для детей немецкого писателя, одного из основателей юношеской психологии Гофмана. В русском переводе начало этого стихотворения таково:

Жил мальчик некогда Андрей
Престрашный-страшный ротозей;
На крыши, облака, ворон
Заглядывался вечно он;
Что ж под ногами у него,
Совсем не замечал того.
Что тут мудреного, что всякий
И называл его зевакой

[B13, с. 14—15].

[40] (с. 282). Кантор ссылается на работы философов Ренувье [B122], Пеша [B119] и итальянского философа Тонджорджи, которую не удалось найти. В переводе П. С. Юшкевича эта сноска ограничена текстом второго предложения. Продолжение сноски дается в соответствии с [A1, с. 393—395].

[41] (с. 282). Можно ли на одной и той же линии задать точки, которые будут отстоять от X на актуально бесконечном расстоянии или нет? Если такие точки задать нельзя, то линия конечна (лат.).

[42] (с. 282). Линия, все точки которой отстоят друг от друга на конечном расстоянии, сама конечна (лат.). В отношении частей (лат.).

[43] (с. 282). Применительно к целому (лат.).

[44] (с. 282). Речь идет о работе Фомы Аквинского [B140]; латинское выражение означает: «заблуждением относительно сущности и простым заблуждением».

[45] (с. 282). Пусть бесконечное множество образовано из единиц. Оно будет бесконечным числом, и это число будет больше непосредственно предшествующего ему числа на одну единицу. Было ли предшествующее число уже бесконечным или еще нет? Бесконечным его назвать нельзя, ибо оно еще могло расти, и в действительности возросло после прибавления единицы. Следовательно, оно было конечным, а после прибавления единицы стало бесконечным. Это значит, что из двух конечных (чисел) получилось бесконечное, что абсурдно (лат.).

[46] (с. 282). См. примеч. 6 к статье II.2. По мнению Гутберлета [B75, с. 18], говорить о бесконечном числе некорректно, ибо вычисления можно производить только с конечными числами. Он, однако, считал необходимым рассмотрение бесконечных множеств, не доходя до операций над множествами.

[47] (с. 283). Любзен, Гоппе и Клюгель — немецкие математики. Гутберлет привлекает в [B75, с. 69, 92] для подтверждения своих соображений учебники по анализу первых двух и известный «Математический словарь» последнего. Книга Пеша — та же [B119].

[48] (с. 283). В частности, § 3 раздела I книги Гутберлета [B75, с. 11—15] так и озаглавлен: «Понятие потенциальной бесконечности предполагает актуальную бесконечность того же вида»; утверждение о существовании только потенциальной бесконечности характеризуется здесь как противоречие.

Штёкль — немецкий философ, неотомист, автор многих книг. Латинские выражения, использованные в этом абзаце, означают соответственно «в действительности» и «сущность, созданная разумом (пустое понятие без предмета)».

[49] (с. 283). Латинские выражения Кантор применяет здесь соответственно в смысле «попеременно (не различая)» и «совершенно (во всех отношениях)».

[50] (с. 283). Приводимые здесь определения понятия бесконечности: «бесконечным называется то, часть чего всегда остается за пределами» и «бесконечное — это то, больше чего (ничего) нет и быть не может» взяты Кантором из книги Пеша. В четвертой главе третьей книги «Физики» Аристотеля [B3, с. 109—112, в частности с. 110, п. 203а] и в пятой главе книги первой работы Аристотеля «О небе» [B4, с. 274—277] нет в точности таких определений, но их можно вычитать там при желании сделать это. В частности, слова Аристотеля: «...бесконечность не только имеет значение принципа, но к тому же еще и *самое большое количественное значение* (курсив наш.— *Ф. М.*)» [B4, с. 274] — можно, вопреки Кантору, истолковать в смысле второго определения. Первое из определений Пеша соответствует тому, что Кантор понимал под актуальной бесконечностью, а второе — канторовскому абсолютно бесконечному (см. с. 268).

[51] (с. 284). В переводе [A18] эта сноска ограничена указанием первой из книг, представляющей собой, по-видимому, комментарии к «Физике» Аристотеля, опубликованные в конце XVI в., группой иезуитов университета португальского города Коимбра. Продолжение сноски дается по [A1, с. 396]. Ссылка на Аристотеля означает восьмую главу третьей книги его «Физики» [B3, с. 122, п. 208, а6]; греческие слова соответствуют по Кантору актуальной и потенциальной бесконечности (в русском переводе «бесконечное как [нечто] отдельное» и «бесконечное в возможности»). Специально к этому вопросу Кантор не обращался, но вся его научная деятельность была направлена на утверждение актуальной бесконечности. Далее он ссылается на книгу, которую обнаружить не удалось. «ἄπειρον ἀφωρισμένον» тоже означает актуальную бесконечность («завершенный апейрон»). См. также примеч. 45 к статье I.5.5.

[52] (с. 284). Т. е. [B76] см. примеч. 6 к статье II.2 и примеч. 2.

[53] (с. 284). Гутберлет противопоставлял друг другу «актуальную бесконечность, существующую в реальной действительности» (лат.) и «возможную актуальную бесконечность» (фр.), отрицая законность первой и защищая целесообразность рассмотрения второй.

[54] (с. 284). Принципиальное заблуждение (ошибка) (греч.).

[55] (с. 285). Трансфинитное или сотворенная актуальная бесконечность (лат.).

[56] (с. 286). Суарес — испанский теолог и философ, поздний схоласт и комментатор трудов Фомы Аквинского.

[57] (с. 286). Это примечание Гутберлета не содержится в переводе [A18]. Здесь оно приводится в соответствии с [A1, с. 398].

[58] (с. 287). Т. е. в [B75].

[59] (с. 287). См. примеч. 25.

[60] (с. 287). См. примеч. 11 к статье II.2.

[61] (с. 287). «Вечная бесконечность в творении или абсолютное» и «сотворенная бесконечность или трансфинитное» (лат.).

[62] (с. 287). Фуше — французский философ XVII в., склонившийся к скептицизму, один из корреспондентов Лейбница. Кантор указывает ответ Лейбница [B91] на письмо Фуше.

[63] (с. 287). Все расположил по весу, числу и мере (лат.). Канонизированный перевод см. в тексте примеч. 67.

[64] (с. 288). Со стороны бога (лат.).

[65] (с. 288). Упорядоченного конечного, но и упорядоченного трансфинитного (лат.).

[66] (с. 288). Эйленбург — немецкий врач, один из корреспондентов Кантора.

[67] (с. 290). В русском переводе [A18, с. 123] эта сноска оборвана латинским названием главы книги Августина. Она продолжена по [A1, с. 401—404]. Августин — крупнейший представитель латинской патристики, святой у католиков. Цитируется его труд «О граде божием», глава XVIII (а не XIX, как указано у Кантора) «Против тех, которые говорят, что бесконечное не может быть обнято даже божественным ведением»: «Что же касается другого мнения их, по которому бесконечное не может быть обнято даже божественным ведением, то им остается дерзость сказать, что бог не знает всех чисел, и погрузиться и в эту бездну глубокого нечестия. Всем известно, что числа бесконечны, потому что, какое бы число ты ни признал составляющим конец их, оно, не говорю, увеличивается через прибавление другого числа, но как бы велико ни было и какое бы большое количество ни обнимало в самом счете и в науке счисления, не только может удвояться, но даже умножаться. Но всякое число ограничивается своими свойствами, что никакое из них не может быть равным какому-либо другому. Таким образом, они не равны одно другому и различны, каждое из них в отдельности конечно, но все вместе бесконечны. Итак, неужели бог не знает всех чисел вследствие их бесконечности и неужели ведение божие простирается лишь на некоторую сумму, а остальные числа не знает? Кто даже из самых безрассудных людей скажет это? Но не решаться презирать числа и признать их не подлежащими божественному ведению те, для которых имеет значение авторитет Платона, внушающего, что бог на основании чисел сотворил мир; да и у нас часто читается о боге: *Вся мерою и числом и весом расположил еси* (прем. Сол. XI, 21). О чем говорит и пророк: «производящий по исчислению век» (Ис. XL, 26); и спаситель в евангелии говорит: *Вам же и власи главнии вси изочтены суть* (Матф. X, 30). Итак, мы не должны сомневаться в том, что ему известно всякое число. *Разуму его*, поется в псалме, *несть числа* (Псал., 146, 5). Поэтому бесконечность числа, хотя бы и не было числа бесконечным числам, не может быть необъемлемою для того, у кого нет числа разуму. Все, что объемлется знанием, ограничивается сознанием познающего; так же точно и всякая бесконечность бывает некоторым неизреченным образом ограниченною в боге, потому что не необъятна для его ведения. Поэтому если бесконечность чисел не может быть бесконечною для ведения божия, коим она обнимается, то кто такие мы, людишки, дерзающие положить предел его ведению, говоря, что если бы в одни и те же кругообращения времен не повторялись одни и те же временны́е явления, то бог не мог бы все созданное им ни предвидеть, чтобы создать, ни знать, когда уже создал, — бог, премудрость которого, простая в многоразличии и однообразная в многообразии, обнимает все необъятное столь необъятным ведением, что если бы он восхотел постоянно все создавать новое и несходное с предшествующим, то и это для него не могло бы быть беспорядочным и непредвиденным? И предвидел бы он это не с ближайшего времени, но содержал бы в вечном предвидении» (лат.) [B1, с. 268—270].

[68] (с. 290). Каков здесь смысл обозначения (IIb) комментатору не вполне ясно: скорее всего это опечатка, и речь идет о II^b на с. 292.

[69] (с. 290). «Некоторым неизреченным образом» со стороны бога (лат.).

[70] (с. 290). Латинские выражения означают: «понятие вещи самой по себе, составленное на основе собственных ее признаков (т. е. положительных свойств, присущих ей и только ей)» и «собственное понятие, составленное на основе общих признаков» (лат.).

[71] (с. 290). Т. е. в I.5.5 и I.1; вместо 1871 г. во втором случае нужно 1872.

[72] (с. 291). В этом абзаце Кантор ссылается на Оригена — крупнейшего античного теолога и философа, одного из главных представителей греческой патристики; на Цицерона — римского государственного деятеля, оратора и философа; Квинтилиана — главу риторической школы в Риме в I в. н. э., автора «Наставления в ораторском искусстве»; Тацита — римского государственного деятеля и историка. Латинские и греческие выражения фактически истолкованы в тексте. Из-за неопределенности указаний Кантора при ссылках на Квинтилиана и Тацита локализация этих выражений в трудах последних затруднительна. Что же касается труда Цицерона, то это его известное сочинение, многократно издававшееся в Германии, например [B57]. Цитата из труда Оригена [B35] означает в русском переводе: «...рассмотрим начало твари, каким бы ни создал это начало ум творца бога. Должно думать, что в этом начале бог сотворил такое число разумных, или духовных (Intellectualium), тварей (или как бы ни назвать те твари, которые мы наименовали выше умами), сколько, по его предведению, могло быть достаточно. Несомненно, что бог сотворил их, наперед определив у себя некоторое число их. Ведь не должно думать, что тварям нет конца, как это желают некоторые, потому что, где нет конца, там нет и никакого познания и невозможно никакое описание. Если бы это было так, то бог, конечно, не мог бы содержать сотворенное или управлять им, потому что бесконечное по природе — непознаваемо (incomprehensibile). И писание говорит: Бог сотворил все *мерою и числом* (премудр. Сол. XI, 21), и, следовательно, число правильно прилагается к разумным существам или умам в том смысле, что их столько, сколько может распределить, управлять и содержать божественный промысел. Сообразно с этим нужно приложить меру и к материи, которая,— нужно веровать,— сотворена богом в таком количестве, какое могло быть достаточно для украшения мира» [B35, с. 150—151].

Кантор процитировал здесь полный текст соответствующего места из указанного им издания. В русском переводе [B35] параллельно приводится и критически переработанный текст этого отрывка: «В умопостигаемом начале бог, по своей воле, установил такое число разумных существ, какое могло быть достаточным. Ибо,— нужно сказать,— и божие могущество ограничено, и под предлогом прославления бога не должно отвергать ограниченность могущества (его). В самом деле, если бы могущество божие было безграничным, то оно по необходимости не знало бы само себя, потому что по природе безграничное — непознаваемо. Итак, он сотворил столько, сколько мог познать и содержать в своих руках, и управлять своим промыслом. Равным образом он сотворил столько материи, сколько мог украсить» [B35, с. 150—151]. Цитата из «Теологической суммы» Фомы Аквинского [B136, с. 48]: «1) Актуально бесконечного множества быть не может, поскольку всякое множество должно содержаться в *каком-либо виде* множеств. *Но виды множеств соответствуют видам чисел, а ни один вид чисел не может быть бесконечным*, поскольку всякое число есть множество, измеренное единицей [буквально: одним]. Следовательно, актуально бесконечное множество существовать не может, как само по себе, так и по совпадению. 2) Кроме того, всякое существующее в природе множество сотворено; всякая же сотворенная вещь понимается как одно из проявлений *какого-то намерения творца*, ибо создатель ничего не делает бесцельно. Следовательно, необходимо, чтобы всякая созданная вещь понималась как число. Поэтому существование актуального множества невозможно даже по «совпадению» (лат.).

По поводу этой цитаты можно заметить, что в издании [B136] первое предложение несколько отличается от процитированного Кантором. Оно таково: «Sed hoc est impossibile., quia omnem multitudinem oportet esse in aliqua specie multitudinis». Кроме того, в [B136] текст цитаты не содержит цифр 1) и 2), а также нет курсива.

[73] (с. 291). Видов чисел (лат.).

[74] (с. 291). Альберт Великий — крупнейший представитель ортодоксальной схоластики, богослов и естествоиспытатель.

[75] (с. 291). Кроме того, до сих пор не доказано, что бог не может сделать так, чтобы существовало актуально бесконечное (лат.),— цитата из [B137, с. 108]. Мюрмюранты — ропчущие, ворчащие, недовольные (чем-либо в католическом учении).

[76] (с. 292). Синкатегорематическое (потенциально бесконечное).

[77] (с. 292). Эта сноска отсутствует в русском переводе [A18]. Здесь она воспроизведена по [A1, с. 405].

[78] (с. 292). О Бейле и его «Словаре» см. примеч. 64 к статье I.5.6.

[79] (с. 292). [B124].

[80] (с. 292). Картезий — Декарт, Мерсенн — французский философ и ученый, приверженец учения Декарта и его корреспондент.

[81] (с. 292). Авиценна — латинизированное написание фамилии философа, ученого-энциклопедиста и врача арабоязычного средневековья Ибн Сины. Пеш — профессор теологии в Валькенбеке (Голландия), представитель так называемого теистического витализма; речь идет о его книге [B119]. Васкец — испанский теолог, иезуит, профессор в Риме и Алкале. Сведения о других авторах и их книгах оказались комментатору недоступными.

[82] (с. 294). О Фонтенеле и его книге «Элементы геометрии бесконечного» см. примеч. 4 к статье I.10.

[83] (с. 294). Маклорен — известный шотландский математик XVIII в. Речь идет о переводе на французский язык его трактата [B109]. О Жердиле и его работах [B71] и [B72] см. примеч. 3 к статье II.2.

[84] (с. 295). Кантор ссылается здесь на работы немецкого математика XIX в. Штольца [B129—B131] и первую часть его книги [B132]. Работ другого немецкого математика того же времени Дюбуа-Реймона он здесь не указывает, имея в виду, возможно, его книгу [B61], а быть может, просто ссылки Штольца на работы Дюбуа-Реймона по теории роста функций. Проблема актуально бесконечно малых величин и чисел имеет длительную и сложную историю, которая еще не изучена. См. также примеч. 3 и 4 к статье I.10

[85] (с. 295). Кантор цитирует здесь определение 4 из V книги «Начал» Евклида: «Говорят, что величины имеют отношение между собой, если они, взятые кратно, могут превзойти друг друга» [B18, с. 143],— и ссылается на первое предложение X книги «Начал» [B19, с. 102]: «Для двух заданных неравных величин, если от большей отнимается больше половины и от остатка больше половины и это делается постоянно, то останется некоторая величина, которая будет меньше заданной меньшей величины»,— а также на работы Архимеда «О шаре и цилиндре» и «Квадратура параболы», в первой из которых «Допущение 5» сформулировано так: «Далее, большая из двух неравных линий, поверхностей или тел превосходит меньшую на такую величину, которая, будучи складываема сама с собой, может превзойти любую заданную величину из тех, которые могут друг с другом находиться в определенном отношении» [B6, с. 96],— а в предисловии ко второй имеется в виду вариант аксиомы, сформулированной следующим образом: «Если имеются две неравные площади, то, постоянно прибавляя к самому себе избыток, на который большая площадь превосходит меньшую, можно получить площадь, которая была бы больше любой заданной ограниченной площади» [B5, с. 77].

[86] (с. 296). См. примеч. 18 к статье II.2.

[87] (с. 296). Виванти — итальянский математик второй половины XIX — первой половины XX столетия, переписывавшийся с Кантором. Извлечение из указанного письма Кантора было первоначально включено в [A16], являющуюся вариантом переведенной здесь работы II.2.

[88] (с. 296). Пуассон — французский математик и механик. Речь идет о его книге [B121].

[89] (с. 297). Речь идет о статье Гейне [B79]; см. примеч. 24.

[90] (с. 297). О Мольке и его работе [B113] см. примеч. 17. Наверное, Кантор имеет в виду работу Кронекера [B89], о которой говорилось в том же примечании.

[91] (с. 298). По-видимому, речь идет о публикуемой здесь работе II.1; см. примеч. 1 к статье II.1. Латинская фраза в конце канторовской сноски означает: «Книги имеют свою судьбу».

[92] (с. 298). Термин «universale» объяснен в тексте. Два других латинских выражения можно передать так: «единое в разном» и «единое, внутренне способное ко многому».

[93] (с. 298). В переводе [A18] последнее предложение не закончено; оно дополнено по [A1, с. 411]. Либераторе — итальянский неотомист. Названные его книги переиздавались неоднократно; Кантор цитирует издания [B102, B100, B101].

[94] (см. 298). Т. е. [B118].

[95] (с. 302). Целое больше его части (лат.).

[96] (с. 303). Фуллертон — профессор философии в Пенсильванском, а затем в Колумбийском университетах США; его книга [B69] — первая из десятка книг, изданных им. О Ренувье и его книге [B122] см. примеч. 12 к статье II.2; о Муаньо и его книге

[B33] — примеч. 2 к статье II.2; о Жердиле — примеч. 3 к той же статье; о книге Коши [B25] — там же, примеч. 2; о Тонджорджи и его книге — примеч. 40; Сансеверино — неотомист, профессор Неаполитанского университета (о его книге, указанной Кантором, более подробных данных не найдено); о Пеше и его книге [B119] см. примеч. 40; Зиглиара и Жердиль — кардиналы католической церкви, а их работы соответственно — [B149, B71, B72]; указываемые здесь работы Лейбница — это [B31, B30], в примеч. 30 к статье I.5.5 дан перевод характерных цитат из [B30]; Гуден — католический философ XVII в., а его книга — это [B73]. О Перериусе и его книге других данных не найдено.

[97] (с. 305). Об Августине см. примеч. 67; предложения на латыни в русском переводе: «Но всякое число ограничивается своими свойствами, что никакое из них не может быть равным какому-либо другому. Таким образом, они не равны одно другому и различны, каждое из них в отдельности конечно, но все вместе бесконечны» [B1, с. 469].

[98] (с. 305). См. первое предложение примеч. 3 к статье II.1.

[99] (с. 306). Свое обещание Кантор выполнил в 1895—1897 гг. [A22] (здесь I.10).

[100] (с. 306). Греческий текст означает «раньше и потом по порядку».

[101] (с. 310). См. примеч. 2 к статье I.10.

[102] (с. 315). Винер — немецкий математик, профессор математики в Высшей технической школе в Дармштадте; некоторое время работал с Кантором в Галле.

[103] (с. 324). В русском переводе [C9, с. 300—324].

[104] (с. 324). В русском переводе [C15, с. 106—110].

4. Основания арифметики

[1] (с. 325). [A15]. Рецензия на [B67].

[2] (с. 325). Об Ибервеге см. примеч. 50 к статье I.5.5, речь идет о его книге [B141].

ПЕРЕПИСКА КАНТОРА С ДЕДЕКИНДОМ

[1] (с. 327). Перевод основывается на [A24] и [A1, с. 443—451] первоначальных немецких изданий. Использовался также перевод Кавайеса этой переписки на французский язык [A24] и некоторые фрагменты из писем, опускавшиеся в указанных изданиях, но восстановленные в статье Граттан-Гиннеса [C58] и в книге Дюгака [C52, с. 223—262]; они заключены в фигурные скобки.

[2] (с. 327). Т. е. за присланную Дедекиндом книгу [B14].

[3] (с. 327). Разумеется «взаимно однозначное соответствие»; терминология у Кантора еще не установилась — см. примеч. Цермело к I.2.

[4] (с. 328). См. примеч. 1 к статье I.2.

[5] (с. 331). Т. е. «Journal für die reine und angewandte Mathematik», издателем которого в то время был немецкий математик Борхардт. Эта статья [A6] — здесь I.2 — вскоре там и появилась.

[6] (с. 331). Сами письма Дедекинда не обнаружены.

[7] (с. 332). Дедекинд имеет в виду работу Кантора [A6]. Различие в указании издателя журнала «Journal für die reine...» у Кантора на с. 331 и здесь у Дедекинда объясняется тем, что названный журнал был основан в 1826 г. немецким математиком Крелле и обычно цитировался по его фамилии нередко и после смерти Крелле в 1855 г.

[8] (с. 333). Речь идет все о той же статье Кантора [A6]; страница и строки, указанные Дедекиндом, относятся к первоначальной публикации; в наст. изд.— это I.2, с. 21.

[9] (с. 334). Кантор пишет о статье Эрмита [B82]. См. примеч. 8 к статье I.5.3.

[10] (с. 335). По-видимому, речь идет о возражениях немецкого математика Иллигенса, сообщенных им Кантору, по поводу дедекиндовской теории действительных чисел, изложенной в [B14]. Позднее Иллигенс опубликовал статьи [C62] и [C63], содержавшие критику теорий действительных чисел Вейерштрасса, Кантора и Дедекинда и изложение своих взглядов на иррациональные числа. Кантор в [A19] очень коротко ответил на соображения Иллигенса. Страницы, указанные Дедекиндом, в русском переводе [B14] имеют номер, меньший на единицу.

[11] (с. 336). В русском переводе [B14] соответственно с. 13—14, 14—15, 24—25 для свойств I, II и с. 17, 25 для свойства IV.

[12] (с. 339). Это возражение воспроизведено Кантором в I.3, с. 32—33, без указания, что оно принадлежит Дедекинду.

[13] (с. 344). Я вижу, но не верю этому (фр.).

[14] (с. 349). Речь идет о книге Липшица [B105]; см. примеч. 11 к статье I.5.3, а также нижеследующее примечание.

[15] (с. 350). Отрывки этого письма, заключенные в фигурные скобки, опущены в [A24]; они восстановлены здесь, как указано в примеч. 1 по статье Граттан-Гиннеса [C58, с. 111—112] и книге Дюгака [C52, с. 229—230]. В письме речь идет главным образом о теории иррациональных чисел в том виде, как она представлена в книге Липшица [B105], и указываемые Дедекиндом места относятся к ней. Упоминаемая публикация Гейне — это [B79], о которой см. примеч. 24 к статье II.3. В указанном Дедекиндом замечании о греках из § 14 книги Липшица утверждается, что в евклидовой теории отношений величин имеется все необходимое для изложения теории иррациональных чисел; по этому поводу произошел обмен письмами между Дедекиндом и Липшицем — см. [C52, с. 47—53].

[16] (с. 350). О Дини и его книге [B59] см. примеч. 2 к статье I.5.1.

[17] (с. 351). Имеется в виду книга немецкого математика Томе [B134], в которой рассматривались актуально бесконечно малые числа; по поводу последних см. примеч. 3 и 4 к статье I.10 и примеч. 84 к статье II.3, а также примеч. [1] Цермело к II.3. Слова в скобках означают «страшно сказать» (лат.).

[18] (с. 351). Здесь указываются работы немецких математиков Томе [B135], Люрота [B108], Юргенса [B85] и Нетто [B115]; о них см. примеч. 1 к статье I.4.

[19] (с. 351). Имеется в виду утверждение Римана из его фрагментов по топологии. В русском переводе оно таково: «Многомерник размерности меньше чем n—1 не может отделить части n-мерника одну от другой. Связный n-мерник или обладает, или не обладает свойством — разделяться на части всяким (n—1)-мерным разрезом» [B40, с. 296].

[20] (с. 353). Кантор пишет здесь о работе Томе [B135]; свое доказательство он послал в тот же журнал, в котором была опубликована статья Томе, и оно появилось в виде [A8]. О канторовском доказательстве см. примеч. Цермело к I.4 и более подробно [C64, с. 157—162].

[21] (с. 354). Заранее, предварительно; дословно «от яйца» (лат.).

[22] (с. 354). Речь идет о статье Нетто [B115].

[23] (с. 354). Имеются в виду лекции Дирихле [C70]; они были изданы в 1876 г., но издал их не Дедекинд, а немецкий математик Грубе.

[24] (с. 354). Дедекинд готовил в это время третье издание лекций Дирихле [B60].

[25] (с. 355). Первое предложение в фигурных скобках в [A24] отсутствует; оно добавлено в соответствии с [C52, с. 255], где помещен весь текст начала письма.

[26] (с. 356). Т. е. в [B14, с. 18].

[27] (с. 357). Далее следует упомянутое в начале этого и следующего писем Кантора приложение, помещенное на отдельном листе; указанные в тексте первого письма условия A и B содержатся в нем.

[28] (с. 359). Это письмо отсутствует в [A24]. Оно впервые опубликовано Граттан-Гиннесом [C58, с. 125] и перепечатано также в книге Дюгака [C52, с. 256]. В последней приведен и текст извлечения из «Новых опытов» Лейбница [C52, с. 256—257], о котором писал Кантор. «Удивительной книжечкой Больцано» является труд последнего [B8].

[29] (с. 359). Отрывок, заключенный в фигурные скобки, как и аналогичный отрывок в конце этого письма, опущены в [A24]. Их перевод сделан здесь по книге Дюгака [C52, с. 258]. Незадолго до написания письма Кантором умерла мать Дедекинда.

[30] (с. 359). Кантор так и не опубликовал свое доказательство этой теоремы; см. примеч. 59 к статье I.5.5, где указаны доказательства ее другими математиками.

[31] (с. 361). См. второе предложение примеч. 4 к статье I.8 и примеч. 58 к статье I.5.5.

[32] (с. 361). Т. е. в [A9, № 2; A9, № 3; A9, № 4]. В первой из указанных статей цикла [A9] термин «символ бесконечности» явно не содержится, но используется в обозначениях — см. I.5.2; во второй и третьей Кантор применял его — см. I.5.3, I.5.4.

[33] (с. 362). Эту, не вполне ясную идею не развивали далее ни сам Кантор, ни, кажется, другие математики.

[34] (с. 362). Множество P, введенное здесь Кантором, является знаменитым примером совершенного нигде не плотного множества, получившего многочисленные применения. В печати оно появилось в следующем году — см. I.5.5, с. 104.

[35] (с. 363). Это и последующие письма впервые опубликовал Цермело в [A1, с. 443—450]. Там же находятся и его примечания к ним, как помещенные в тексте писем в квадратных скобках, так и на с. 451. Как установил Граттан-Гиннес [C58, с. 126—136], эта публикация Цермело не удовлетворяет нормам историко-научных стандартов. В частности, оригинала наиболее известного письма Кантора от 28 июля 1899 г. в том виде, в каком его напечатал Цермело, не существует, и публикация Цермело представляет собой компоновку двух писем Кантора — одного с тою же датой, а другого с датой 3 августа 1899 г. В [A1] имеются и другие недочеты: модернизация правописания, изменения в пунктуации, разбиения на абзацы, обозначения и т. д.

В настоящем издании перевод писем все же сделан с их издания Цермело; в него внесено лишь несколько несущественных изменений в соответствии с [C58]. Основанием для этого послужило то, что Цермело не исказил, а скорее уточнил теоретико-множественное содержание опубликованных им писем. Разбиение же публикации Цермело, обозначенной им письмом Кантора от 28 июля 1899 г., на два письма представляется нецелесообразным потому, что эта публикация вошла в обиход именно в таком виде, в частности, имеются переводы ее на французский и английский языки.

[36] (с. 369). Дедекинд имеет здесь в виду обозначения суммы множеств соответственно в своей работе [C16, с. 13, рус. пер.], а также, по-видимому, в работе Кантора I.10, с. 173, и в книге немецкого математика и логика Шрёдера [C80, с. 214].

[37] (с. 370). См. примеч. 59 к статье I.5.5.

[38] (с. 372). Цермело пишет здесь о своей работе [C84].

[39] (с. 372). Здесь о [C85].

УКАЗАТЕЛЬ ОСНОВНЫХ ПОНЯТИЙ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Абсолютно бесконечные=неконсистентные множественности 364
Абсолютное 74, 264
Адхеренция 158
Аксиома Архимеда 295
» арифметики 368
Актуально бесконечное 262
Алеф-нуль 183
Алеф-один 221
Алефы 363
Ассоциативный закон 178, 192, 212, 278, 311
Атомы 168

Более низкое и более высокое положение 187
Больцановское определение континуума 91
Больше и меньше для мощностей 175
» » для отрезков вполне упорядоченных множеств 206
» » для порядковых чисел 211

Валентность=мощность 248, 277
Вид, точка α'-вида 165
Видовая точка 165
Внутреннее, внешнее определения 51
Внутренняя точка 37
Возведение мощностей в степень 178
Вполне определенное (множество) 50
Вполне упорядоченное множество 67, 202, 277, 364
Всюду плотное множество 41, 124
Всюду плотный порядковый тип 200
Вычитание порядковых чисел 213

Главный элемент упорядоченного множества 199
Граница 37

Делитель, общий наибольший для множеств [пересечение] 46
Дистрибутивное свойство=свойство γ 107, 139, 154
Дистрибутивный закон для кардинальных чисел 178
» » для порядковых типов 193
» » » чисел 213

Замкнутые множества 122, 200

Измерение (пространства) 24
Изолированное точечное множество 57
Имманентная=интрасубъективная реальность 79
Инхеренция, полная и первого порядка 163

Кардинальное число=мощность 173, 276, 364
Класс множеств (многообразий) равной мощности 23, 248
» типов 189
Количество 67
Коммутативный закон для кардинальных чисел 178
» » для порядковых типов (вообще не выполняется) 193
Конечные кардинальные числа 180
» множества 183
Консистентная множественность=множество 364
Континуум 87, 91
Кохеренция 158
Кратно упорядоченные множества 188, 256, 306

Линейное многообразие (множество) чисел 27
Линейное точечное многообразие (множество) 40

Многообразие 22
Множественность 363
» вполне упорядоченная=последовательность 364
Множество 49, 50, 173
Множество=консистентная множественность 364
Множество, обратное упорядоченному множеству 189
Множество покрытий 178
» просто упорядоченное 187
Множимое, множитель для порядковых типов 193
» » » » чисел 212, 278
Монада 168
Мощность=кардинальное число 22, 66, 173, 248, 276, 364
Мощность (выражение у Штейнера) 51

Наименьшее общее кратное точечных множеств 46

Направление в упорядоченном множестве 306
Начальный элемент 205
Неархимедова числовая система 324
Неконсистентная=абсолютно бесконечная (множественность) 364
Непрерывные многообразия 36
Несобственно бесконечное=синкатегорематическое бесконечное 65, 78
Нормальная форма чисел второго числового класса 231

Обратный порядковый тип 189, 250
Объединение множеств 173
Однородное точечное множество 158
Окрестность 14
Определение внутреннее (внешнее) 51
Остаток вполне упорядоченного множества 205
Отображение (подобное множеств) 188
Отрезок упорядоченного множества 205

Перемежающиеся фундаментальные последовательности 198
Перечисление при помощи класса чисел 90
Плотное в себе точечное множество 123
» » упорядоченное множество 200
Подмножество=часть (правильная) 173, 370
Подобные множества 188, 249, 309, 364
Покрытие множества 178
Полуконтинуум 104
Порядковое отношение, отношение порядка 187, 364
Порядковые точки 165
» числа 211, 277, 364
Порядковый тип 188, 249, 364
Порядок однородного точечного множества 158
Последовательность=вполне упорядоченное множество 364
Потенциальное = синкатегорематическое бесконечное 265
Предел последовательности 10
» » порядковых чисел 214
Предельная точка [точка сгущения] 14, 40
» α'-го вида, порядка β 166
Предельный элемент 199
Приводимые множества 90
Принцип ограничения (стеснения) 66, 93
Принципы порождения 66, 92, 221
Производное=производное точечное множество 14, 40
Протяженность=объем точечного множества 125
Псевдотрансфинитные числа Веронезе 191

Разрозненное множество 124
Род, порядковые числа первого и второго рода 221
» точечные множества первого и второго рода 41

Свобода математики 80
Свойство величин 367
Связное точечное множество 91
Сечение (по Дедекинду) 82
Синкатегорематическое бесконечное 78
Система=множество (Дедекинд) 369
Система всех алефов 365
» » чисел 364
Сложение кардинальных чисел 176
» порядковых типов 192, 252, 311
» » чисел 212
Собственно бесконечное 65
» бесконечно малые 71
Совершенное упорядоченное множество 200
Совершенные точечные множества 90
Совокупность 18
Степень высшая (низшая) числа второго класса 231
» порядкового числа второго числового класса 226
Сумма множеств 176
Счетные множества 52

Теорема Бендиксона 120
Теории действительных чисел 9, 81
Теория действительных чисел Вейерштраса 82
» » » Дедекинда 82, 83
Точечные множества 40
Транзиентная=транссубъективная реальность 79
Трансфинитное=сверхконечное 74
Трансфинитные множества и кардинальные числа 183
» порядковые типы 189

Умножение кардинальных чисел 176, 177
» порядковых типов 192, 253, 312
» » чисел 212

Фундаментальная последовательность 83
» » в упорядоченном множестве 197
Фундаментальные последовательности разных порядков 85

Характеристика порядкового типа 315

Числовая величина λ-го вида 12
Числовые классы 68, 215, 365

Эквивалентность 22, 174
Эпсилон-числа второго числового класса 236

УКАЗАТЕЛЬ ИМЕН *

Абель (Abel N. H., 1802—1829) 80
Августин (Augustin A., 354—430) 289—291, 305, 390, 415, 418
Авиценна — см. Ибн Сина
Альберт Великий (Albertus Magnus, Albert Graf von Bollstädt, ок. 1193—1280) 291, 416
Александров П. С. (1896—1982) 373, 379—381, 396, 397
Аллин (Allihn F. T. H., 1811—1885) 267, 281, 411
Амикус (Amicus) 292
Ампер (Ampère A. M., 1775—1836) 168, 265, 410
Анаксагор (V в. до н. э.) 397
Аполлодор (Apollodorus, вторая половина II в.) 109
Аполлоний Пергский (ок. 260—170 до н. э.) 267
Аристотель (384—322 до н. э.) 72, 73, 88, 101, 109, 272, 283, 284, 374, 390, 391, 397, 403, 404, 414
Арно (Arnauld A., 1612—1694) 263, 410
Арнольд И. В. (1900—1948) 378
Аррьяга (Arriaga R. de, 1592—1667) 292
Архимед (ок. 287—212 до н. э.) 274, 295, 296, 390, 417
Асколи (Ascoli G., 1846—1896) 40, 392
Асмус В. Ф. (1894—1975) 390, 392

Баллауф (Ballauf L., 1817—?) 281, 392, 411
Бари Н. К. (1901—1961) 379, 396
Башмакова И. Г. (р. 1921) 400
Бейль (Bayle P., 1647—1706) 109, 292, 392, 406, 416
Бен Акиба (Ben Akiba, первая половина II в.) 273, 412
Бендиксон (Bendixon I. O., 1861—1935) 120, 145, 154, 157, 161, 376, 392, 406, 407, 409, 422
Беркли (Berkeley G., 1685—1753) 74, 102, 390, 392, 403, 405
Бернштейн (Bernstein F., 1878—1956) 105, 241, 370—372, 405
Бертран (Bertrand L., 1731—1812) 273, 392, 412
Бирюков Б. В. (р. 1922) 396, 397
Бирюкова Л. Г. (р. 1940) 396
Богуславский В. М. 392
Боек (Boeckh A., 1785—1867) 101, 392, 404
Больман (Bohlmann G., 1869—1928) 139, 406
Больцано (Bolzano B. P. J. N., 1781—1848) 77, 78, 91, 108, 358, 374, 375, 390, 398, 402, 419
Боргош (Borgosz J., р. 1928) 396, 405
Борель (Borel É. F. E. J., 1871—1956) 140, 377, 398, 405, 406
Бородай Т. Ю. (р. 1957) 400
Борхардт (Borchardt C. W., 1817—1880) 331, 348, 349, 351, 418
Боссе (Bosse G.) 394
Бошкович (Bošković R. J., 1711—1787) 265, 392, 410
Боэций (Boetius A. M. T. S., 445—524) 271, 274, 392, 411
Брадвардин (Bradwardin T., ок. 1290—1349) 374
Брауэр (Brouwer L. E. J., 1881—1966) 39, 398
Бруно (Bruno G., 1548—1600) 101, 392, 397
Брунхофер (Brunnhofer H.) 101, 392, 405
Булыга А. В. 397
Бурали-Форти (Burali-Forti C., 1861—1931) 242
Бурге (Bourguet L., 1678—1742) 394
Быков Г. В. (1914—1982) 396
Бэкон (Bacon F., 1561—1626) 385, 408
Бэр (Baire R. L., 1874—1932) 377

* Указатель составлен Ф. А. Медведевым.

Ван дер Варден (Wan der Waerden B. L., р. 1903) 324, 396
Васильев А. В. (1853—1929) 7, 378, 390, 391, 396
Васкец (Vasquez G., 1549—1604) 292, 417
Вебер В. (Weber W., 1804—1890) 168, 383
Вебер Э. Г. (Weber E. H., 1842—1913) 81, 349, 396, 404
Вейерштрасс (Weierstrass K. T. W., 1815—1897) 50, 70, 80—82, 108, 294, 331, 333, 375—377, 383, 390, 398, 402—404, 412, 418, 422
Вернер (Werner K., 1821—1888) 104, 396, 405
Веронезе (Veronese G., 1854—1917) 191, 192, 396, 408, 422
Веселовский И. Н. (1892—1977) 390, 391
Виванти (Vivanti G., 1859—1949) 296, 390, 417
Визгин В. П. (р. 1940) 400
Визгин Вл. П. (р. 1936) 400
Винер (Wiener H. L. G., 1857—1939) 315, 418
Вундт (Wundt W. M., 1832—1920) 267, 280, 283, 396, 411
Выгодский М. Я. (1898—1965) 391

Гайденко В. П. (р. 1940) 400
Гайденко П. П. (р. 1934) 396, 400, 405
Галилей (Galilei G., 1564—1642) 303, 374
Галлер (Haller A., 1708—1777) 101, 405
Галуа (Galois É., 1811—1832) 21
Гамильтон (Hamilton W. R., 1805—1865) 271, 399, 412
Гарнак (Harnack C. G. A., 1851—1888) 60, 150, 393, 396, 403, 404, 406
Гаусс (Gauss C. F., 1777—1855) 80, 263, 266, 276, 343, 349, 410
Гегель (Hegel G. W. F., 1770—1831) 267, 280, 396, 403, 405
Гёдель (Gödel K., 1906—1978) 376, 397, 405
Гейер (Geyer G., р. 1907) 381
Гейне (Heine H. E., 1821—1881) 83, 274, 275, 297, 350, 383, 393, 404, 412, 417, 419
Гельмгольц (Helmholtz H. von, 1821—1894) 23, 272—274, 343, 390, 391, 393, 401, 412
Гельфонд А. О. (1906—1968) 397
Гербарт (Herbart J. F., 1776—1841) 266, 280, 281, 385, 411, 413
Герхардт (Gerhardt C. J., 1816—1899) 394
Гессенберг (Hessenberg G., 1874—1925) 106, 244, 398, 409
Гильберт (Hilbert D., 1862—1943) 324, 377, 386, 397
Гнеденко Б. В. (р. 1912) 379, 396
Гоббс (Hobbes T., 1588—1679) 74, 391, 403
Гобсон (Hobson E. W., 1856—1933) 407
Гольдбах (Goldbach Ch., 1690—1764) 386
Гольдшайдер (Goldscheider F., 1852—1926) 294
Гончаров В. Л. (1896—1955) 392
Гоппе (Hoppe E. R. E., 1816—1900) 283, 414
Гофман (Hoffmann H., 1809—1894) 281, 391, 413
Гранди (Grandi G., 1671—1742) 394
Грассман Г. (Grassmann H. G., 1809—1877) 81, 393, 396
Грассман Р. (Grassmann L. R., 1815—1901) 396
Граттан-Гиннес (Grattan-Guinness I. O., р. 1941) 8, 387, 398, 409, 411, 418—420
Григорьян А. Т. (р. 1910) 391
Грубе (Grube F., 1835—1893) 398
Гуден (Goudin A., 1639—1695) 303, 393, 418
Гульдин (Guldin P. H., 1577—1643) 303
Гуртадо (Hurtado de Mendoza P., 1578—1651) 292
Гутберлет (Gutberlet C., 1837—1928) 263, 270, 277, 282—284, 286, 385, 393, 410, 411, 414

Даубен (Dauben J. W.) 387, 398, 403
Дедекинд (Dedekind J. W. R., 1831—1916) 7, 8, 23, 56, 81, 82, 85, 91, 242, 243, 327—372, 375—378, 383, 386, 387, 389—392, 397, 398, 401—404, 407, 408, 418—420, 422
Декарт (Descartes R., 1596—1650) 74, 264, 292, 391, 403, 410, 417
Демокрит (ок. 460—ок. 370 до н. э.) 88, 404

Джейлер (Jeiler I., 1823—1904) 292
Дженокки (Genocchi A., 1817—1889) 139, 397, 406
Джербальди (Gerbaldi F.) 390
Джонсон (Johnson D. M., p. 1942) 398, 402
Дини (Dini U., 1845—1918) 40, 350, 377, 392, 402, 419
Дирихле (Lejeune Dirichlet J. P. G., 1805—1859) 23, 80, 108, 354, 383, 391, 392, 398, 401, 403, 419
Дюбуа-Реймон (Du Bois-Reymond P. D. G., 1831—1889) 60, 295, 393, 395, 403, 417
Дюгак (Dugac P., p. 1926) 398, 418, 419
Дюринг (Dühring E. C., 1833—1921) 102, 103, 393, 405,
Дютен (Dutens L., 1730—1812) 167, 287

Евклид (365 — ок. 300 до н. э.) 13, 271, 272, 295, 391, 417
Егоров Д. Ф. (1869—1931) 379, 397

Жегалкин И. И. (1869—1947) 379, 397, 409
Жерар (Gerhardt Ch. F., 1816—1856) 248, 409
Жердиль (Gerdil S. H., 1718—1802) 262—264, 294, 410, 417, 418
Жордан (Jordan M. E. C., 1838—1922) 39, 406
Журден Ф. (Jourdain Ph. E. B., 1879—1919) 387, 390, 398
Журден Ш. (Jourdain Ch. M. G. B., 1817—1886) 104, 264, 393, 405, 410

Зенон Сидонский (ок. 150 до н. э.) 109, 406
Зенон Элейский (ок. 490 — ок. 430 до н. э.) 109, 373, 398, 405, 406
Зигварт (Siegwart Ch., 1830—1904) 103, 262, 391, 405, 410
Зиглиара (Zigliara T. M., 1833—1893) 303, 364, 418
Зубов В. П. (1899—1963) 397

Иберверг (Ueberweg F., 1826—1871) 102, 325, 392, 396, 405, 418
Ибн Сина (980—1037) 292, 417
Изенкрае (Isenkrahe M. C. H., 1844—1921) 385
Иллигенс (Illigens E.) 398, 418

Кавайес (Cavaillès J., 1903—1944) 8, 327, 387, 388, 390, 398, 418
Кавальери (Cavalieri B., 1598(?)—1647) 303
Кант (Kant I., 1724—1804) 75, 89, 103, 266—268, 271, 280, 325, 391, 396, 397, 405, 411
Кантор В. (Cantor V. M. S., geb. Guttmann, 1849—1923) 383, 384
Кантор Г. (Cantor G. F. L. Ph., 1845—1918) 7, 8, 18, 21, 22, 35, 39, 47, 49, 57, 63, 105, 106, 140, 141, 169, 172, 240—245, 267, 268, 324—373, 375—378, 381—390, 392, 397, 398, 400—420
Кантор Г. В. (Cantor G. W., 1814—1863) 382
Кантор К. (Cantor C. C., 1849—1899) 382
Кантор Л. (Cantor L., 1846—1870) 382
Кантор М. (Cantor M. A., geb. Böhm, 1819—1896) 382
Кантор С. (Cantor S., 1848—1931) 382, 385
Канторович Л. В. (р. 1912) 380
Каратеодори (Carathéodory C. É., 1873—1950) 140, 398
Карл Эмануэль IV (Karl Emanuel IV) 262
Картезий (Cartesius) — см. Декарт
Квинтилиан (Quintilianus M. F., ок. 35 — ок. 96) 290, 416
Келдыш Л. В. (р. 1904) 380
Кеннеди (Kennedy H. C., p. 1931) 398
Кертес (Kertész A., 1929—1974) 377, 378
Киллинг (Killing W., 1847—1923) 192, 393
Кирхгоф (Kirchhoff G. R., 1824—1887) 105, 274, 391, 412
Кирхман (Kirchmann J. H. von, 1802—1884) 102, 393, 405
Клауа (Klaua D., p. 1930) 398
Клюгель (Klügel G. S., 1739—1812) 283, 414
Ковалевская С. В. (1850—1891) 385
Колмогоров А. Н. (р. 1903) 8, 380, 384, 397
Коссак (Kossak E. A. M., 1839—1892) 81, 391
Коши (Cauchy A. L., 1789—1857) 37, 80,

108, 168, 262—265, 296, 303, 391, 405, 410, 418
Коэн (Cohen P. J., р. 1934) 376, 397, 405
Крелле (Crelle A. L., 1780—1855) 36, 40, 43, 49, 51, 53, 63, 66, 70, 83, 89, 109, 132, 136, 138—140, 180, 186, 197, 297, 299, 332, 418
Кронекер (Kronecker L., 1823—1891) 81, 272—275, 297, 377, 383, 384, 391, 393, 412, 417
Крыжановский Д. А. (1883—1938) 378
Крылов А. Н. (1863—1945) 391
Кузичева З. А. (р. 1933) 397
Кузнецов Б. Г. (1903—1984) 397
Куммер (Kummer E. E., 1810—1893) 81, 356, 383, 393

Лаврентьев М. А. (1900—1980) 380
Лагранж (Lagrange J. L., 1736—1813) 108
Лассвиц (Lasswitz K., 1848—1910) 276, 398, 413
Лебег (Lebesgue H. L., 1875—1941) 377, 397, 398, 407
Лев XIII (Leo XIII, Pecci G., 1810—1903) 264, 410
Левкипп (ок. 500 — ок. 440 до н. э.) 88, 404
Лежандр (Legendre A. M., 1752—1833) 108
Лейбниц (Leibniz G. W., 1646—1716) 74, 75, 77, 78, 101, 103, 168, 264—266, 271, 283, 287, 296, 303, 358, 385, 391, 393, 394, 397, 403, 411, 412, 415, 418, 419
Либераторе (Liberatore M., 1810—1892) 298, 394, 417
Либман (Liebmann O., 1840—1912) 23, 394, 401
Линдеман (Lindemann C. L. F., 1852—1939) 57, 399, 402
Липшиц (Lipschitz R. O. S., 1832—1903) 56, 81, 263, 276, 349, 350, 394, 402, 404, 410, 419
Лиувилль (Liouville J., 1809—1882) 19, 394, 401
Локк (Locke J., 1632—1704) 74, 264, 391, 403
Лосев А. Ф. (р. 1883) 391, 392
Лотце (Lotze R. H., 1817—1881) (264, 265, 383, 394, 410, 411
Лузин Н. Н. (1883—1950) 379, 380, 397
Лукреций (Lukrez T. E. C., 96—55 до н. э.) 88, 404
Лурье С. Я. (1890—1965) 397
Любзен (Lübsen H. W.) 283, 414
Люрот (Lüroth J., 1844—1910) 36, 351, 394, 402, 419
Ляпунов А. А. (1911—1973) 379, 380, 396, 397

Маклорен (Maclaurin C., 1698—1746) 294, 395, 417
Мангейм (Manheim J. K.) 388, 399
Марков А. А. (1903—1979) 397
Маркушевич А. И. (1908—1979) 397
Маротт (Marotte F. A., 1873—?) 390
Медведев Ф. А. (р. 1923) 7—9, 18, 22, 36, 40, 46, 49, 57, 106, 141, 146, 154, 170, 173, 246, 325, 327, 375, 397, 400
Мейер (Meyer L., 1630—1681) 74, 392, 403
Меньшов Д. Е. (р. 1892) 379, 380, 396
Мере (Méré A. H., 1610—1684) 109, 406
Мерсенн (Mersenn M., 1588—1648) 292, 417
Мертенс (Mertens F. C. J., 1840—1927) 383
Мерэ (Méray H. Ch. R., 1835—1911) 376
Мешковский (Meschkowski H., р. 1909) 385, 387, 388, 399
Милль (Mills J. S., 1806—1873) 325
Миннигероде (Minnigerode L. B., 1837—1896) 21, 383, 395, 401
Миттаг-Леффлер (Mittag-Leffler M. G., 1846—1927) 8, 70, 385, 387, 395, 403, 406, 409, 410
Млодзеевский Б. К. (1858—1923) 378, 379
Мольк (Molk C. F. J., 1857—1914) 273, 297, 395, 412, 417
Мордухай-Болтовской Д. Д. (1876—1952) 391
Муаньо (Moigno F. N. M., 1804—1884) 262—264, 303, 391, 410, 417
Мур (Moore E. H., 1862—1932) 378
Мэтьюс (Mathews J.) 399, 412
Мюллер (Müller J. H. T., 1797—?) 81, 395

Нарский И. С. (р. 1920) 390, 391

Нейман (Neumann C. G., 1832—1925) 149, 395
Некрасов В. Л. (1864—1922) 378, 379, 397, 407
Нётер (Noether A. E., 1882—1935) 8, 327, 387, 390, 398
Нетто (Netto E., 1846—1919) 36, 351, 354, 395, 419
Николай Кузанский (Nicolaus von Cusanus, 1401—1464) 101, 397
Никомах (ок. 140) 271, 395, 411
Новиков П. С. (1901—1975) 379, 380, 397
Новы (Nový L., р. 1929) 398
Норден А. П. (р. 1904) 391
Ньёвентейт (Nieuwentijt B., 1654—1718) 394
Ньютон (Newton I., 1643—1727) 265, 283, 296, 303, 391, 398, 408, 413

Овиедо (Oviedo F. de, 1602—1651) 292
Огурцов А. П. (р. 1936) 400
Ожигова Е. П. (р. 1923) 397
Ойзерман Т. И. (р. 1914) 391
Оре (Ore Ø., 1899—1968) 398
Ориген (Origenes, ок. 185 — ок. 254) 290, 291, 391, 416

Плаплаускас А. Б. (1931—1984) 397
Парменид (VI в. до н. э.) 103
Парпарт (Parpart U.) 389
Паскаль (Pascal B., 1623—1662) 109, 263, 391, 395, 410
Пеано (Peano G., 1858—1932) 139, 140, 241, 397, 398, 399, 406
Пезенас (Pézenas, E., 1692—1776) 294, 395
Перейра (Pereira, Pereyra, Pererius B., ок. 1535—1610) 303, 418
Перц (Pertz G. H., 1795—1876) 74, 394
Пеш (Pesch T., 1836—1899) 282, 283, 292, 303, 395, 413, 414, 417, 418
Пий VI (Pius VI, Braschi G. A., 1705—1779) 262
Пифагор (VI в. до н. э.) 273
Платон (ок. 429 — ок. 348 до н. э.) 101, 103, 272, 273, 289, 391, 404, 415
Полак Л. С. (р. 1908) 391
Посидоний (ок. 135 — ок. 50 до н. э.) 109
Поссе К. А. (1847—1928) 397
Пржигонский (Přihonský F. 1788—1859) 390
Пуанкаре (Poincaré J. H., 1854—1912) 7, 80, 377, 399
Пуассон (Poisson S. D., 1781—1840) 296, 395, 417

Рассел (Russell B. A. W., 1872—1970) 242
Редепеннинг (Redepenning E. R.) 290
Ренувье (Renouvier Ch., 1815—1903) 264, 282, 303, 385, 394, 395, 410, 413, 417
Риман (Riemann G. F. B., 1826—1866) 16, 23, 80, 343, 351, 353, 392, 393, 399, 401, 419
Рожанский И. Д. (р. 1913) 390, 397, 400
Розанес (Rosanes J., 1842—1922) 23, 395, 401
Руфинус (Rufinus, ок. 345 — ок. 410) 291

Сагенс (Saguens J.) 292, 395
Сансеверино (Sanseverino G., 1811—1865) 303, 418
Секст Эмпирик (Sextus Empiricus, II в.) 272, 392, 412
Сен-Венан (Saint-Venant A. J. C., Barre de, 1797—1886) 265, 395, 410
Слешинский И. В. (1854—1931) 375, 390
Смит (Smith H. L., 1892—1950) 378
Соколов В. В. (р. 1919) 391, 392, 397
Спиноза (Spinoza B., 1632—1677) 74, 75, 103, 264, 266, 280, 392, 403
Степанов В. В. (1889—1950) 379, 396, 397
Суарес (Suárez F., 1548—1617) 286, 414
Суслин М. Я. (1894—1919) 380

Тажуризина З. А. 397
Таннери (Tannery J., 1848—1910) 246, 247, 395, 409
Тарский (Tarski A., р. 1902) 399
Тацит (Tacitus C., I—II вв.) 291, 416
Тимирязев А. К. (1880—1955) 391
Тимченко И. Ю. (1862—1939) 377, 397
Толстов Г. П. (р. 1911) 397, 396
Томазиус (Thomasius J., 1622—1684) 271, 391, 412

Томе (Thomae J. K., 1840—1921) 36, 351, 353, 383, 395, 402, 419
Тонджорджи (Tongeorgi S.) 262, 282, 303, 410, 413, 418
Торретти (Torretti R.) 399
Торричелли (Torricelli E., 1608—1647) 303

Фарадей (Faraday M., 1791—1867) 168
Фарделла (Fardella M., 1650—1718) 394
Фехнер (Fechner G. T., 1801—1887) 265, 393, 411
Фихте (Fichte J. H., 1796—1879) 268, 411
Фихтенгольц Г. М. (1888—1959) 378
Фишер (Fischer K., 1824—1907) 103, 262, 393, 405, 410
Флюгель (Flügel O., 1842—1914) 267, 281, 411
Фома Аквинский (Thomas von Aquinas, 1225—1274) 88, 104, 262, 264, 282, 287, 291, 393, 395, 396, 405, 410, 414, 416
Фома С. (Thomas S., 1559—1644) 284
Фонтенель (Fontenelle B. le Bovyer de, 1657—1757) 192, 294, 393, 408, 417
Фрагмен (Phragmén L. E., 1863—1937) 154, 395, 407
Францелин (Franzelin J., 1816—1886) 287, 385, 413
Франциск Ассизский (Franciscus von Assisi, 1182—1226) 292
Франциск из Паулы (Franciscus von Paula, ?—1507) 292, 294
Фреге (Frege G. F. L., 1848—1925) 242, 325, 326, 390, 393
Френкель (Fraenkel A. A. H., 1891—1965) 7, 387, 389, 398, 400, 405
Фреше (Fréchet R. M., 1878—1973) 377
Фрике (Fricke K. E. R., 1861—1930) 398
Фриз (Fries J. F., 1738—1843) 103, 393, 405
Фукс (Fuchs J. L., 1833—1902) 80
Фуллертон (Fullerton G. S., 1859—1925) 303, 393, 417
Фуше (Foucher S., 1644—1696) 287, 394, 415

Хартенштейн (Hartenstein G., 1808—1890) 393
Хаусдорф (Hausdorff G., 1868—1942) 106, 241, 243—245, 397, 398, 404, 405, 409
Херш (Hersh R.) 397
Хинчин А. Я. (1894—1959) 380
Хоке (Hocke R.) 395
Хокинс (Hawkins T., р. 1938) 398, 402

Целлер (Zeller E., 1814—1908) 101, 103, 272, 396, 405, 412
Цермело (Zermelo E. F. F., 1871—1953) 7, 8, 140, 377, 389, 402, 404—409, 411, 418—420
Циммерман (Zimmermann R. von, 1824—1898) 101, 396, 405
Цицерон (Cicero M. T., 106—43 до н. э.) 290, 392, 416

Чебышев П. Л. (1821—1894) 378

Шатуновский С. О. (1859—1929) 378, 391, 397
Шварц (Schwarz H. A., 1843—1921) 383
Шекспир (Shakespeare W., 1564—1616) 385
Шёнфлис (Schoenflies A. M., 1853—1928) 387, 399
Шепп (Schepp D. A., 1837—1905) 139, 191, 396, 406
Шеринг (Schering E. Ch. J., 1833—1897) 383
Шеффер (Scheffer K. L., 1859—1885) 150, 399, 406, 407
Шиллер (Schiller F. von, 1759—1805) 274, 412
Шпернер (Sperner E., р. 1905) 39, 399
Шрёдер (Schröder F. W. K. E., 1841—1902) 105, 370—372, 395, 399, 405, 420
Шрётер (Schröter H. E., 1829—1892) 51
Штейнер (Steiner J., 1796—1863) 51, 395, 421
Штёкль (Stöckl A., 1823—1895) 283, 414
Штерн (Stern M.) 388
Штольц (Stolz O., 1842—1905) 295, 395, 417
Шумахер (Schumacher H. Ch., 1780—1850) 263, 276, 393

Эйленбург (Eulenburg A., 1840—1917) 288, 415
Эйлер (Euler L., 1707—1783) 397

Эмануэль Великий (Emanuel Maignans, ок. 1601—1676) 292
Энестрём (Eneström G. H., 1852—1923) 262, 284, 390, 410
Эпикур (ок. 342 — ок. 271 до н. э.) 88
Эрдманн Б. (Erdmann B., 1851—1921) 23, 393, 401
Эрдманн И. Э. (Erdmann J. E., 1805—1892) 74, 168, 266, 271, 394
Эрмит (Hermite Ch., 1822—1901) 51, 80, 334, 393, 397, 402, 418
Эрнст (Ernst, Landgraf von Hessen-Reinfels, 1623—1693) 394

Юнг (Young W. H., 1863—1942) 407
Юргенс (Jürgens E., 1849—1907) 36, 39, 351, 393, 398, 402, 419
Юшкевич А. П. (р. 1906) 8, 381, 394, 397
Юшкевич П. С. (1873—1945) 7, 63, 262, 268, 389, 390, 391, 403, 410, 411, 413

Якоби К. Г. Я. (Jacobi C. G. G., 1804—1851) 80
Якоби Ф. Г. (Jacobi F. H., 1743—1819) 266
Яновская С. А. (1896—1966) 380, 397, 398, 405

СОДЕРЖАНИЕ

От редакции 7

I. РАБОТЫ ПО ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1. Обобщение одной теоремы из теории тригонометрических рядов . . 9
2. Об одном свойстве совокупности всех действительных алгебраических чисел 18
3. К изучению о многообразиях 22
4. Об одной теореме из теории непрерывных многообразий 36
5. О бесконечных линейных точечных многообразиях (5.1—5.6) . . . 40
6. О различных теоремах теории точечных множеств, расположенных в непрерывном пространстве n измерений. Сообщение первое 141
7. О мощности совершенных точечных множеств 146
8. О различных теоремах из теории точечных множеств в n-кратно протяженном непрерывном пространстве G_n. Сообщение второе 154
9. Об одном элементарном вопросе учения о многообразиях 170
10. К обоснованию учения о трансфинитных множествах 173

II. РАБОТЫ ПО ФИЛОСОФСКИМ ВОПРОСАМ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1. Принципы теории порядковых типов. Первое сообщение 246
2. О различных точках зрения на актуально бесконечное 262
3. К учению о трансфинитном 268
4. Основания арифметики 325

ДОПОЛНЕНИЯ

Переписка Кантора с Дедекиндом 327

ПРИЛОЖЕНИЯ

Послесловие. *Колмогоров А. Н., Юшкевич А. П.* 373

Георг Кантор (Биографическая справка). *Медведев Ф. А.* 382

Библиография 389

Примечания 400

Указатель основных понятий теории множеств 421

Указатель имен 423

Георг Кантор

Труды по теории множеств

Утверждено к печати
Редакционной коллегией серии
«Классики науки»

Редактор издательства *Н. Н. Лезнова*
Художественный редактор *С. А. Литвак*
Технический редактор *Т. С. Жарикова*
Корректоры *Н. Б. Габасова, Н. И. Казарина*

ИБ № 29317

Сдано в набор 13.11.84.
Подписано к печати 4.03.85.
Формат 70×90 1/16
Бумага книжно-журнальная.
Импортная.
Гарнитура литературная
Печать высокая
Усл. печ. л. 31,7. Усл. кр. отт. 32,038. Уч.-изд. л. 31,2
Тираж 3450 экз. Тип. зак. 4234
Цена 3 р. 60 к.

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство «Наука»
117864 ГСП-7, Москва, В-485
Профсоюзная ул., 90

2-я типография издательства «Наука»
121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 6

В ИЗДАТЕЛЬСТВЕ «НАУКА»

готовится к печати:

Историко-математические исследования. Вып. 29.
20 л. 2 р. 50 к.

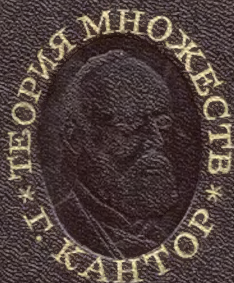
Сборник содержит материалы по истории античной и средневековой математики, а также статьи, относящиеся к различным вопросам математического анализа. Ряд работ посвящен творчеству Л. Эйлера, Н. В. Бугаева, П. С. Александрова, В. Я. Буняковского, А. М. Ляпунова, А. Пуанкаре и др. Издание рассчитано на математиков и историков науки.

Для получения книг почтой заказы просим направлять по адресу: 117192, Москва, Мичуринский проспект, 12, магазин «Книга — почтой» Центральной конторы «Академкнига»; 197345 Ленинград, Петрозаводская ул., 7, магазин «Книга — почтой» Северо-Западной конторы «Академкнига» или в ближайший магазин «Академкнига», имеющий отдел «Книга — почтой».

480091 **Алма-ата,** ул. Фурманова, 91/97 («Книга — почтой»);
370005 **Баку,** ул. Джапаридзе, 13 (Книга — почтой»);
320093 **Днепропетровск,** проспект Гагарина, 24 («Книга — почтой»);
734001 **Душанбе,** проспект Ленина, 95 («Книга — почтой»);
375002 **Ереван,** ул. Туманяна, 31;
664033 **Иркутск,** ул. Лермонтова, 289;
420043 **Казань,** ул. Достоевского, 53;
252030 **Киев,** ул. Ленина, 42;
252030 **Киев,** ул. Пирогова, 2;
252142 **Киев,** проспект Вернадского, 79;
252030 **Киев,** ул. Пирогова, 4 («Книга — почтой»);
277012 **Кишинев,** проспект Ленина, 148 («Книга — почтой»);
343900 **Краматорск Донецкой обл.,** ул. Марата, 1
660049 **Красноярск,** проспект Мира, 84;
443002 **Куйбышев,** проспект Ленина, 2 («Книга — почтой»);
191104 **Ленинград,** Литейный проспект, 57;
199164 **Ленинград,** Таможенный пер., 2;
196034 **Ленинград,** В/О, 9 линия, 16;
220012 **Минск,** Ленинский проспект, 72 («Книга — почтой»);
103009 **Москва,** ул. Горького, 19а;
117312 **Москва,** ул. Вавилова, 55/7;
630076 **Новосибирск,** Красный проспект, 51;
630090 **Новосибирск,** Академгородок, Морской проспект, 22 («Книга — почтой»);
142292 **Пущино,** Московская обл., МР, «В», 1;
620151 **Свердловск,** ул. Мамина-Сибиряка, 137 («Книга — почтой»);
700029 **Ташкент,** ул. Ленина, 73;
700100 **Ташкент,** ул. Шота Руставели, 43;
700187 **Ташкент,** ул. Дружбы народов, 6 («Книга — почтой»);
634050 **Томск,** наб. реки Ушайки, 18;
450059 **Уфа,** ул. Р. Зорге, 10 («Книга — почтой»).
450025 **Уфа,** ул. Коммунистическая, 49;
720001 **Фрунзе,** бульвар Дзержинского, 42 («Книга — почтой»);
310078 **Харьков,** ул. Чернышевского, 87 («Книга — почтой»).

Г. КАНТОР

ТРУДЫ ПО ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ



2 р. 60 к.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»